DIFERENCIA ENTRE DOS SERIES USANDO CUADRADOS

Autores: Oscar Bressan y Ana Bressan

Calcular cuánto vale la diferencia entre:

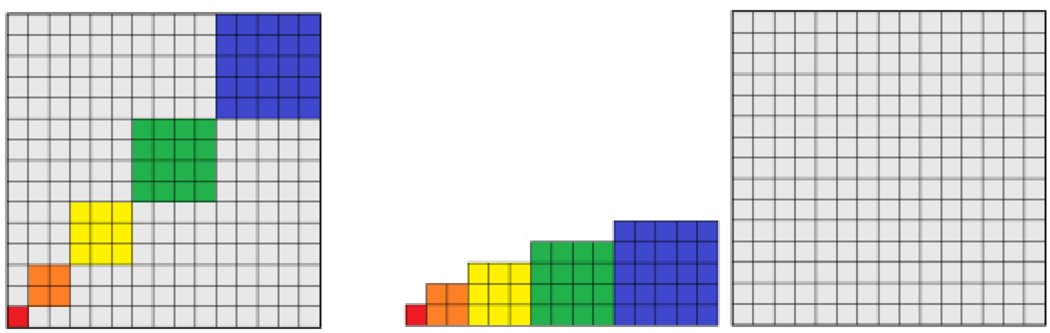
$$\text{Dif} = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

Soluciones:

Si nos quedamos sin analizar casos suele conjeturarse que la segunda serie sería mayor que la serie de las bases elevada al cuadrado, ¡porque se ven más cuadrados!

¡Pero hay que probar esto!

a) Si recurrimos a los gráficos de áreas se ve claramente que $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$ (área grisada) es mayor que $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$ (áreas coloreadas)



También se aprecia que la diferencia aumenta con el mayor número de términos considerados

b) Si buscamos un patrón haciendo la tabla de diferencias para distintos *n* (1,2,3, …) es difícil encontrar un patrón en ellas. Lo que sí se ve es el rápido crecimiento de las diferencias. ¿Responden estos valores a alguna función? No es tan sencillo distinguirla.

n	Dif.
1	0
2	4
3	22
4	70
5	170
6	350
7	644
8	1092
9	…

c) Pasamos entonces a un tratamiento algebraico:

Si aplicamos el desarrollo del cuadrado de un binomio o un trinomio… se puede apreciar que el primer miembro de la desigualdad a comparar contiene a todos los cuadrados del segundo, más los dobles productos, luego es mayor la primera serie que la segunda. Recordemos que:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + \mathbf{2ab} \text{ es mayor que } a^2 + b^2$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \mathbf{2ab + 2\,ac + 2bc}$$

y que los dobles productos aumentan al aumentar los valores de las series.

d) Ahora bien, si usamos herramientas algebraicas más sofisticadas, considerando la primera serie tenemos:

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n\,(n + 1)/\,2 = \mathbf{n/2 + n^2/2}$

Y su cuadrado a $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = (n/2 + n^2/2)^2 = (1/4)\, n^2\, (n + 1)^2 = \mathbf{n^2/4 + n^3/2 + n^4/4}$

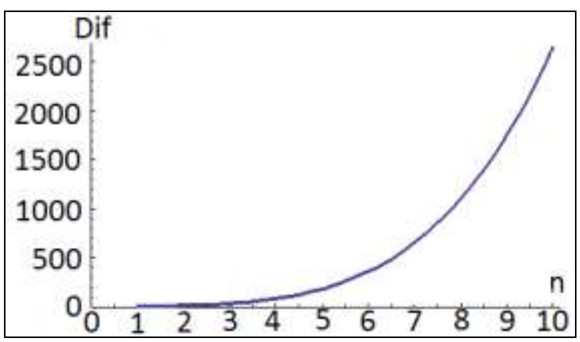
Mientras que la segunda serie responde a la siguiente fórmula (se puede sacar inductivamente o usando un software):

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = (1/6)\, n\, (n + 1)\, (2\,n + 1) = \mathbf{n/6 + n^2/2 + n^3/3 \text{ y}}$$

calculando la diferencia usando estas fórmulas obtenemos:

$$\therefore \qquad \boxed{\mathbf{Dif = n\,(-2 - 3\,n + 2\,n^2 + 3\,n^3)/12 = -\,n/6 - n^2/4 + n^3/6 + n^4/4}}$$

Una fórmula sencilla ya que depende solo de n



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dif	0	4	22	70	170	350	644	1092	1740

Una función **polinomial de grado 4** que muestra en su gráfico el aumento rápido de la diferencia.