Usando los números 1, 2, 3 y 4

Oscar Bressan - GPDM

Usando solamente los números 1, 2, 3 y 4 (deben intervenir todos pero ninguno repetido) encontrar cuál es el número más grande y cuál es el más pequeño que puede formarse. Solo pueden usarse las operaciones de suma, producto y potencia.

Por ejemplo podemos tener:

$32 + 41$

$2 \times (43 + 1)$

413^{2}

Solución:

El número menor: El número más pequeño es el número 1 que se puede formar de muchas maneras. Como ejemplos tenemos:

$1^{(2+3+4)} = 1$

$1^{432} = 1$

$1^{\left(3^{24}\right)} = 1$

Como no estamos autorizados a usar restas ni divisiones, no existe un número menor al 1.

El número mayor: Sabemos que con potencias se logran números impresionantemente grandes, muchísimos más grandes que con sumas o productos. Esto nos da una pista por donde encarar el problema.

	EXPONENTE								
BASE	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		8	16	32	64	128	256	512	1.024
3	9		81	243	729	2.187	6.561	19.683	59.049
4	16	64		1.024	4.096	16.384	65.536	262.144	1.048.576
5	25	125	625		15.625	78.125	390.625	1.953.125	9.765.625
6	36	216	1.296	7.776		279.936	1.679.616	10.077.696	60.466.176
7	49	343	2.401	16.807	117.649		5.764.801	40.353.607	282.475.249
8	64	512	4.096	32.768	262.144	2.097.152		134.217.728	1.073.741.824
9	81	729	6.561	59.049	531.441	4.782.969	43.046.721		3.486.784.401
10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	10.000.000	100.000.000	1.000.000.000	

Números del 2 al 10 elevados a potencias del 2 al 10

TABLA 1

Es obvio que la base no debe ser igual a “1” ya que en este caso el resultado final es igual a “1” cualquiera sea el exponente. Tampoco ayuda que el exponente sea igual a “1”. Por el otro lado si pensamos en dos números naturales “a” y “b” mayores que 1, con a < b, podemos preguntarnos que es más conveniente para obtener un número más grande: ¿a^b ó b^a?.

En la tabla 1 hemos tomados los números del 2 al 10 y los hemos elevado a potencias del 2 al 10. Observamos que si a = 2 y b = 3 obtenemos:

$$2^3 = 8 < 3^2 = 9$$

o sea que en este caso nos conviene elegir que la base sea el número mayor y el exponente sea el número menor (sombreados en color celeste en la tabla).

Si tomamos a = 2 y b = 4 obtenemos:

$$2^4 = 4^2 = 16$$

o sea que para este caso particular los resultados son iguales (sombreados en color verde claro en la tabla).

Pero de ahí en más siempre se obtiene un resultado mayor si tomamos como <u>base el número menor “a” y como potencia el mayor “b”</u> (esto se puede demostrar). En la tabla vemos que los resultados sombreados en amarillo son mayores que los sombreados en lila claro. Esto nos sugiere usar una base lo más pequeña posible, por supuesto mayor que “1”. O sea que debemos usar el número “2” como base, y pensar en el mayor exponente que podamos construir con el resto de los números (1, 3 y 4). Estamos pensando en algo así:

$$2^x$$

El exponente (“x”) también puede ser una potencia, usando como base el menor de esos números con exclusión del 1, o sea que la base debe ser igual a 3. Pensamos en algo así:

$$2^{\left(3^?\right)}$$

Y con los números 1 y 4 debemos construir un exponente lo más grande posible. El más grande posible es directamente el 41 (cuarenta y uno). Finalmente tenemos que el número más grande que podemos construir es:

$$2^{\left(3^{41}\right)}$$

Vamos a ver cuán grande es este número. El exponente es

$$3^{41} = 36.472.996.377.170.786.403$$

o sea que es más que 36 trillones

$$2^{\left(3^{41}\right)} = 2^{36.472.996.377.170.786.403}$$

Para tener una idea aproximada del valor de este número podemos usar como aproximación que

$$2^{10} \cong 10^3$$

ya que $2^{10} = 1.024$ y $10^3 = 1.000$. Entonces:

$$2^{36.472.996.377.170.786.403} = (2^{10})^{3.647.299.637.717.078.640,3} \cong (10^3)^{3.647.299.637.717.078.640,3} =$$

$$= 10^{(3\times 3.647.299.637.717.078.640,3)} = 10^{10.941.898.913.151.235.920,9}$$

En consecuencia el resultado final es un número con más de 10 trillones de cifras, que es inmensamente más grande (¡increiblemente más grande!) que lo que hoy se calcula como el número total de partículas que contiene el universo. Se postula que en todo el universo hay del orden de 10^{122} partículas.

Ninguna computadora del mundo, ni hoy ni nunca, podrá escribir ese número porque no va a conseguir partículas suficientes para llegar a hacerlo.