Un paquete de problemas de potenciación

Betina Zolkower- Adriana Rabino- Ana Bressan

A continuación se presenta una serie de problemas de potenciación y distintas estrategias de resolución. Betina Zolkower nos propuso hacer *paquetes* de problemas en relación a un contenido a enseñar, más desafiantes que los trabajados habitualmente en las aulas, y hacia allí fuimos nosotros.

Los distintos caminos de resolución fueron realizados por docentes integrantes del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática en uno de sus encuentros de trabajo.

Queda a los docentes seleccionar y organizar estos problemas de acuerdo a su intención didáctica, pues poseen distintos niveles de complejidad.

PROBLEMAS

1. ¿Qué podemos decir de la siguiente suma:

$$2^{2006} - 2^{2005} - 2^{2004} - 2^{2003} - 2^{2002} - 2^{2001} - 2^{2000}?$$

2. Comparar las dos expresiones siguientes:

i. $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 1^2 =$
ii. $100 + 99 + 98 + 97 + \ldots\ldots\ldots + 1 =$

3. ¿Con cuántos ceros termina el factorial de 100?

4. ¿Cuál es el último dígito de $1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + \ldots\ldots + 9^{2006}$?

5. ¿Cuál es el último dígito de 2^{2006}? ¿Y de 3^{2006}?

6. ¿Con cuántos ceros termina $9^{999} + 1$?

7. Hallar el siguiente producto:

$$(1+1/1).(1+1/2).(1+1/3).(1+1/4)\ldots\ldots\ldots(1+1/22006)$$

8. ¿Cuáles de los siguientes pares de números cuadrados se encuentran a mayor distancia?:

i. 30^2 y 40^2 **ii.** 41^2 y 51^2 **iii.** 55^2 y 65^2 **iv.** 89^2 y 99^2

9. Sin hacer las cuentas decidir, para cada uno de los siguientes productos, si son pares o impares:

i. $2^9 . 3^{12}$ **ii.** $7^{60} . 2^{39}$ **iii.** $5^{10} . 4^{21}$ **iv.** $6^{45} . 4^{45}$

10. En la secuencia de números agrupados, ¿cómo podemos anticipar cuál es la suma de los números en un grupo determinado en función del número de orden que tiene en la secuencia?:

(1) ; (3,5) ; (7,9,11) ; (13,15,17,19) ;……………..

(En todos los paréntesis están los números impares ordenados pero a cada uno se le agrega uno más).

11. Estimar cuántos dígitos tiene el siguiente número:

$$20 \times 21 \times 22 \times 23 \times 24 \times 25 \times 26 \times 27 \times 28 \times 29 \times 30$$

12. Hallar la respuesta más aproximada posible y de la manera más rápida de la siguiente resta:

$$(666.666.666)^2 – (333.333.333)^2$$

<u>ALGUNAS POSIBLES RESPUESTAS</u>

1.
i. Sacando factor común: $2^{2000}.(2^6 – 2^5 – 2^4 – 2^3 – 2^2 – 2^1 – 2^0)$. Resolviendo el paréntesis da como resultado 1, entonces el resultado final es 2^{2000}.
ii. Usando la fórmula de una progresión geométrica: $S = a (r^n – 1)/ (r – 1)$ de razón igual a -1/2.
Para ello se fueron agrupando los términos de la siguiente manera:
$2^{2006} – 2^{2005} = 2^{2006}/2^1$
Luego $2^{2006}/2^1 – 2^{2004} = 2^{2006}/2^2$ y así sucesivamente. El resultado final es $2^{2006}/2^6 = 2^{2000}$.

2.
Tomando los término de la primer suma algebraica de a dos como diferencia de cuadrados se comprueba que ambas expresiones son equivalentes. Por ejemplo: $100^2 – 99^2 = (100 + 99).(100 – 99) = 199 .1 = 199 = 100 + 99$
$98^2 - 97^2 = (98 + 97).(98 – 87) = 195 . 1 = 195 = 98 + 97$, y así sucesivamente.

Otra forma: Tomando los valores extremos de afuera hacia adentro se puede expresar la primera suma algebraica como:

$$(100^2 – 1^2) – (99^2 – 2^2) + (98^2 - 3^2) - ………………..- (51^2 – 50^2)$$

Haciendo diferencia de cuadrados se tiene:

$$(100+1)(100-1) – (99+2)(99-2) + (98+3)(98-3) - ….- (51+50)(51-50)$$

Como el primer paréntesis de cada término es siempre 101, se puede sacar como factor común:

$$101.(99 – 97 + 95 – 93+…+3 -1) = 101.(2+2+2+…+2) = 101. 2 . 25 = 5050$$

Para comprobar si son equivalentes

i. $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. - 1^2 =$

ii. 100 + 99 + 98 + 97 + ………..+ 1 = basta aplicar en esta serie la suma de los primeros cien números naturales y ver que da el mismo resultado:

$$101.100/2 = 5050.$$

3.
Pensando en cuántos ceros tiene el factorial de 100, se nos ocurrió ir por partes:

10! =10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 y tiene 2 ceros (uno por 10 y el otro por 5.2) si agregamos para llegar al de 20 tendremos que 20.19.18.17.16.15.14.13.12.11 tiene dos ceros, y así sucesivamente hasta 90.89.88.87.86.85.84.83.82.81 que también tiene dos ceros!!!!
Por lo tanto hasta aquí hay 18 ceros en total, faltaría llegar a 100: 100.99.98.97.96.95.94.93.92.91, con el mismo razonamiento anterior pero teniendo en cuenta que 100 tiene dos ceros, en este último tramo habrá tres ceros, o sea que el resultado de buscado será ¡21 ceros!.

Otra forma: Los múltiplos de 10 son 10, ahí van 10 ceros. En cada una de las decenas, el producto de los números que terminan en 2 y en 5 terminan en cero, y esto se repite 10 veces. Ya son 20 ceros. Teniendo en cuenta que el 100 tiene dos ceros, en total son 21 ceros.

4. ¿Cuál es el último dígito de $1 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + \ldots\ldots. + 9^{2006}$?
El último dígito de las potencias de 9 se alternan entre 1 y 9 (esto se comprueba fácilmente con la calculadora). Si el exponente es impar la potencia termina en 9 y si es par termina en 1. Entonces, asociando de a dos potencias consecutivas en la serie dada, de modo que la suma termine en cero, por ejemplo, se tendrá:

$9^2 + 9^3$ termina en cero
$9^4 + 9^5$ termina en cero
…………………
$9^{2004} + 9^{2005}$ termina en cero

Por lo tanto, la suma de todas estas sumas termina en cero. Si le agregamos 9^{2006}, al ser una potencia par termina en 1, más el 1 del primer término de la suma original, dará por resultado que esta suma termina en 2.

5.
Las potencias de 2 terminan en 2, 4, 8 ó 6 (considerando exponentes naturales). Utilizando entonces la relación módulo 4, dividiendo los exponentes por 4 observamos que si el resto es 1 la potencia termina en 2, si el resto es 2 termina en 4, si el resto es 3 termina en 8 y si el resto es 0 termina en 6. Por lo tanto, para saber la terminación de 2^{2006}, dividimos a 2006 por 4 (aplicando la relación módulo 4) que nos da un cociente de 501 con resto 2. O sea que 2^{2006} termina en 4.

6.
La terminación de las potencias de 9 son 9, 1, 9, 1 y así sucesivamente. Se observa que las potencias pares terminan en 1 y las impares en 9, luego 9^{999}

va a terminar en 9 y sumándole 1, la suma terminará en 0. Pero la pregunta es ¿Con cuántos ceros termina $9^{999} + 1$?

Deberíamos demostrar que ninguna potencia termina en 99 porque entonces descartaríamos que la suma terminara en dos ceros. Si calculamos las potencias de 9 mayores que 9^2 vemos que se pueden expresar como: 81.9.9.9….Al multiplicar por el número par 8 (decena del 81), queda garantizado que en las decenas siempre va a aparecer un número par (7$\underline{2}$9, 65$\underline{6}$1, 590$\underline{4}$9, 5314$\underline{4}$1, 47829$\underline{6}$9,….), por lo tanto 9^{999} nunca terminará en 99. O sea que $9^{999} + 1$ termina con un solo cero.

Otra forma: Por inducción completa:
Se sabe que 9^n termina en 1 si n es impar y termina en 9 si n es par. Esto nos asegura que 9^{999} termina en 9.
Por inducción completa se puede demostrar que el dígito de las decenas siempre es par.
- Para n = 1, se tiene que $9^1 = 09$, que lo satisface ya que consideramos el 0 número par.
- Suponemos que esto se cumple para un número dado n, de modo que 9^n se expresa como abc...xyz, donde cada letra es un dígito y la letra “y” (el dígito de las decenas) es par.
- Consideremos ahora lo que pasaría para un número 9^{n+1}
Aquí tenemos dos posibilidades para el dígito z de las unidades: que sea 1 o que sea 9.

Si z=1, entonces 9^{n+1} es igual a 9^n. 9 = abc...xyz . 9 y el dígito de las unidades es 9 (o sea z.9) y el de las decenas es par (dado que 9^n tiene decena par) porque es el resultado del producto de un dígito par por 9 (o sea 9.y).

Si en cambio z=9, el dígito de las decenas será par por ser la suma de dos números pares: el producto de “9.y” más 8, que me llevo del producto de las unidades (9x9= 81) ya que debo multiplicar a 9^n por 9 para obtener 9^{n+1}.

En consecuencia los dos últimos dígitos de 9^{999} van a ser un número par (decenas) y un 9 (unidades). Si se le suma 1, entonces el resultado va a ser un número cuya unidad será 0 (del 9 + 1) y un dígito de las decenas que es impar (suma del dígito de las decenas de 9^{999}, que es par, más el 1 que me llevo de 9 + 1), y nunca puede ser un cero. Por lo tanto $9^{999} + 1$ termina con un solo cero.

7. Si analizamos el siguiente producto:

$$(1+1/1).(1+1/2).(1+1/3).(1+1/4)\ldots\ldots\ldots(1+1/2006)$$

El producto de los dos primeros términos es 2 . 3/2 = 3. Asociando este resultado con el término siguiente resulta: 3 . 4/3 = 4, y así sucesivamente hasta el último producto que es 2006 . 2007/2006 = 2007.

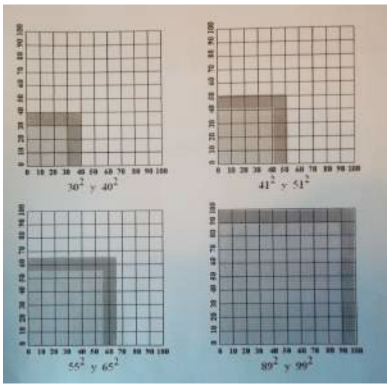
Otra forma: Resolviendo las sumas de cada paréntesis quedaría:

$$2 \cdot 3/2 \cdot 4/3 \cdot 5/4 \ldots\ldots\ldots\ldots 2006/2005 \cdot 2007/2006.$$

Simplificando cada numerador con el siguiente denominador se cancela todo menos 2007.

8. ¿Cuáles de los siguientes pares de números cuadrados se encuentran a mayor distancia?:

i. 30^2 y 40^2 **ii.** 41^2 y 51^2 **iii.** 55^2 y 65^2 **iv.** 89^2 99^2

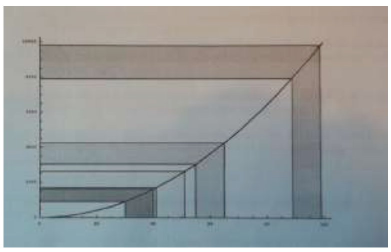


Solución geométrica o gráfica: representando cuadrados en los ejes cartesianos con uno de los vértices en el (0,0) y el vértice opuesto en el (30,30) o (40,40) por ejemplo (para el primer caso). La diferencia entre estos dos números queda representada por una banda en forma de **L**. Siguiendo con este procedimiento se ve claramente que a medida que aumentan los pares de números, las bandas que se van creando son cada vez mayores (aunque su ancho siempre es el mismo porque la diferencia entre las bases siempre es 10).
Por lo tanto la mayor diferencia está entre 89^2 y 99^2.

Otra forma: Cada par se puede comparar descomponiendo el segundo cuadrado de la siguiente manera:
Entre 30^2 y 40^2 tenemos que $40^2 = (30 + 10)^2 = 30^2 + \underline{2.10.30 + 10^2}$ (lo subrayado es la diferencia entre las dos potencias)
Entre 41^2 y 51^2 expresamos $51^2 = (41 + 10)^2 = 41^2 + \underline{2.10.41 + 10^2}$
Y así sucesivamente.
Como se verá, la parte subrayada siempre tiene 10^2 pero el doble producto de los dos términos del binomio va creciendo a medida que crecen los pares, aunque la diferencia de las bases siempre sea 10. Por lo tanto, el par mayor va a tener mayor diferencia.

Y otra forma: También se puede sacar la diferencia entre cada par de cuadrados y ver cuál es mayor. Por ejemplo:
$40^2 – 30^2 = (40 + 30).(40 – 30) = 70 . 10$
$51^2 – 41^2 = (51 + 41).(51 – 41) = 92. 10$
Y así sucesivamente. Siempre el paréntesis de la diferencia va a dar 10 y el paréntesis de la suma va a ser mayor cuanto más grandes sean los números.

Y otra forma más: Pensado desde el aspecto funcional como el crecimiento de la función cuadrática $y = x^2$, en el dominio donde aparecen las bases la diferencia siempre va a ser 10. Sin embargo, al observar las diferencias entre las imágenes de cada par son cada vez mayores a medida que los números aumentan, por lo tanto en el último par se encuentra la diferencia mayor.



9. Sin hacer las cuentas decidir, para cada uno de los siguientes productos, si son pares o impares:

i. $2^9 . 3^{12}$ **ii.** $7^{60} . 2^{39}$ **iii.** $5^{10} . 4^{21}$ **iv.** $6^{45} . 4^{45}$

Si una de las bases es par, el resultado de toda la expresión va a ser par porque siempre uno de los factores es par y analizando la paridad, par por par es par y par por impar también es par. Por lo tanto todas las expresiones son pares.

10. En la secuencia de números agrupados, ¿cómo podemos anticipar cuál es la suma de los números en un grupo determinado en función del número de orden que tiene en la secuencia?:

(1) ; (3,5) ; (7,9,11) ; (13,15,17,19 ;……………..

Si sumamos los elementos de cada uno de los paréntesis obtenemos la sucesión 1, 8, 27, 64,………o, lo que es equivalente, 1^3 , 2^3 , 3^3 , 4^3 ,………Se puede concluir entonces que el grupo n va a dar la suma n^3.

11. Estimar cuántos dígitos tiene el siguiente número:

20 x 21 x 22 x 23 x 24 x 25 x 26 x 27 x 28 x 29 x 30

Tener en cuenta que pide "estimar".
Una forma: Agrupando en grupos de 20 x 20 = 400 (desestimando las unidades) da $400^5.30$ y eso se puede expresar como $4^5.100^5.30 = 4^5.10^{10}.30$ que tiene aproximadamente entre 14 y 15 cifras.
Otra forma: Haciendo cociente de factoriales: 30! / 19! y usando la calculadora...
Otra forma más: Si usamos como estrategia los logaritmos, este producto se transforma en suma de logaritmos. La característica del logaritmo de un número da el número de cifras enteras que posee menos 1. Por ejemplo, el logaritmo de 2 es 0,13, luego el de 20 es 1,30 (por tener 2 cifras). Así, estimando 1,3.10 (veces que aparece el 20) se obtienen 13 cifras, luego 1 cifra más por el logaritmo de 30 = 1,477. En total, aproximadamente 14 cifras.

12. Hallar la respuesta más aproximada posible y de la manera más rápida de la siguiente resta:

$$(666.666.666)^2 – (333.333.333)^2$$

Se puede pensar como una diferencia de cuadrados:
$(666.666.666)^2 – (333.333.333)^2 =$
$= (666.666.666 + 333.333.333).(666.666.666 – 333.333.333) =$
$= (999.999.999).(333.333.333) \sim (1.000.000.000).(333.333.333) =$
$= 333.333.333.000.000.000.$

Para cerrar:

Fermat se interesó por estudiar los números primos impares de la forma $2^n + 1$.

Ejemplos de *primos de Fermat,* como se los denomina, son los números: 3, 5, 17, 257, 65537. Según expresa Ian Stewart en su libro *Belleza y verdad. Una historia de la simetría* (2008, Ed. Crítica. Madrid): *Estos son los únicos primos de Fermat conocidos. Nunca se ha demostrado que no existan más primos de Fermat, pero tampoco se ha demostrado lo contrario. Hasta donde sabemos, podría haber algún primo de Fermat absolutamente gigantesco todavía no conocido para la humanidad. En el estado actual del conocimiento este número es como mínimo $2^{33554432} + 1$, y de hecho ése podría ser el siguiente primo de Fermat. (El exponente 33554432 es una potencia de 2, a saber 2^{25}.Todos lo primos de Fermat son uno más dos elevado a una potencia de dos).* (Pág.169)

En base a lo trabajado anteriormente, si bien es dudoso que podamos calcular el resultado de este primo de Fermat, ¿podríamos darnos alguna idea de la cantidad de cifras que tendría el mismo y que número sería el de las unidades del resultado?

Rtas:
Nº de cifras: Es muy conveniente aplicar la descomposición 2^{25} en potencias: $2^{10} \times 2^{10} \times 2^5$ aproximando a 1000 x 1000 x 30 lo que conduce a un valor cercano a 30 000 000. Para calcular $2^{30000000}$ es conveniente reemplazar nuevamente 2^5 por 1000 = 10^3 y elevando $[10^3]^{300000}$ nos queda 10^{900000}, lo que es igual a un 1 seguido de 9 000 000 de ceros , lo cual da un número de 10 millones de cifras …
Usando logaritmos con el Mathematica da 10.100.890 cifras.

El número de las unidades es 3 (trabajamos con el criterio de divisibilidad por 4 para buscar la terminación de $2^{33554432}$)