# El algoritmo de Euclides y la cantidad de cuadrados como consecuencia de la subdivisión de un rectángulo

## GPDM

Nos interesa saber cuántos cuadrados, del mayor tamaño posible, se pueden cortar de un papel rectangular, con la condición de que todo el rectángulo quede dividido en cuadrados.

El ***cociente entre la altura y el ancho*** del rectángulo debe ser un número racional (de lo contrario no habría solución), o sea del tipo ***a/b*** donde a y b son naturales y primos entre si (es necesario que sean primos entre sí para evitar infinitas dualidades; sino fueran primos entre sí se los simplifica hasta que lo sean). Para darle un nombre (arbitrario) a este cociente lo llamaremos la ***razón del rectángulo***. El tamaño físico del rectángulo va a depender de un ***factor de escala*** dimensional. Si, por ejemplo, la razón del rectángulo es 174/65, y el factor de escala es 1 mm, entonces la altura del papel es 174 × 1 mm = 174 mm y el ancho 65 × 1 mm = 65 mm.

Uno está tentado a buscar una fórmula más o menos sencilla que en función de ***a*** y ***b*** nos diga cuántos cuadrados tendremos finalmente (Tal como $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = 1/6\ n + ½\ n^2 + 1/3\ n^3$). Creo que se podría probar que no puede existir ninguna fórmula no iteractiva que resuelva el problema, ya que se está trabajando en el campo de los números primos, y muy cerca de la conjetura de Riemann.

No obstante la solución se puede encontrar a través de un algoritmo sencillo. Nos va a ayudar un caso concreto, por ejemplo cuando el cociente de la altura a la base es 174/65.

Primer paso: dividimos el número mayor por el menor, anotamos el resto y el cociente entero.

Número mayor 174 dividido por 65 da un resto de 44 y un resultado de 2

Segundo paso: reemplazamos los número originales (174 y 65) por el menor de estos números y el resto recién obtenido. Dividimos uno por el otro, anotamos el resto y el resultado:

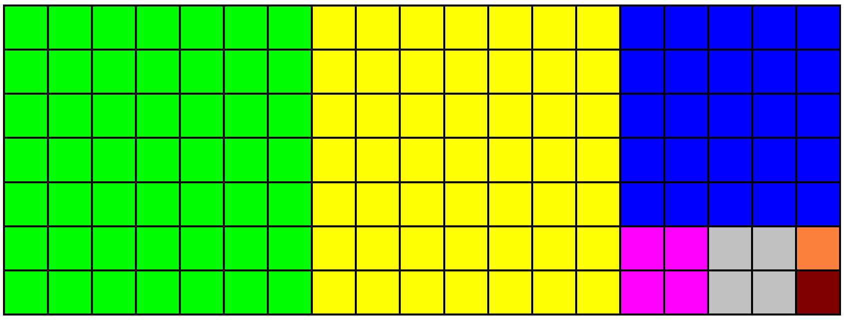
Número mayor 65 dividido por 44 da un resto de 21 y un resultado de 1

Tercer paso (y subsiguientes) volvemos a repetir el proceso hasta que el resto es 0. Puesto en una tabla tenemos:

| DIVIDENDO | DIVISOR | RESTO | COCIENTE |
|---|---|---|---|
| 174 | 65 | 44 | 2 |
| 65 | 44 | 21 | 1 |
| 44 | 21 | 2 | 2 |
| 21 | 2 | 1 | 10 |
| 2 | 1 | 0 | 2 |
| TOTAL DE CUADRADOS (SUMA DE COCIENTES) | | | 17 |

El total de cuadrados que se sacan es igual a la suma de los cocientes, que en este ejemplo es 17.

Veámoslo gráficamente para un caso más sencillo. Sea una razón del rectángulo igual a 19/7. Entonces tendremos:



| DIVIDENDO | DIVISOR | RESTO | COCIENTE |
|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 5 | 2 |
| 7 | 5 | 2 | 1 |
| 5 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 0 | 2 |
| **TOTAL DE CUADROS (SUMA DE COCIENTES)** | | | **7** |

Un resultado adicional interesante es que a través de esta tabla se obtienen las dimensiones de los cuadrados. Cada cociente de esta tabla da el número de cuadrados cuyo lado es el divisor (multiplicado por el factor de escala). Por ejemplo si el factor de escala fuera 1 cm, tendríamos:

2 cuadrados de 7 cm de lado

1 cuadrado de 5 cm de lado

2 cuadrados de 2 cm de lado

2 cuadrados de 1 cm de lado

Este algoritmo está emparentado con el de Euclides que se usa para encontrar el máximo común divisor de dos números (un algoritmo que tiene cerca de 2300 años de antigüedad y sirve para la búsqueda del mcd entre dos números. En los casos anteriores ¿cuál es el mínimo común divisor?). Recordar que el **último divisor** con el que se obtiene resto 0 es el mcd de ambos números)

**<u>Problema relacionado:</u>** Si al azar cortamos un rectángulo de papel, ¿cuál es la probabilidad que la razón del rectángulo (altura/base) sea un número racional? (Por cada racional existen infinitos irracionales, recordar que los racionales son numerables y los irracionales no)