

## QUINTO PROBLEMA DE LAS ESFERAS

Oscar Bressan

A continuación presentamos una reformulación del problema aparecido en el texto *Errar es un placer* de E. M. Martínez. Grupo Editorial Iberoamericano. 1998 Págs. 27 a 30. El autor presenta el siguiente problema tomado de D. Doland : Some irrational results with irrational numbers. Rev. Mathematics teachers. 1981.

### 1) Enunciado del problema:

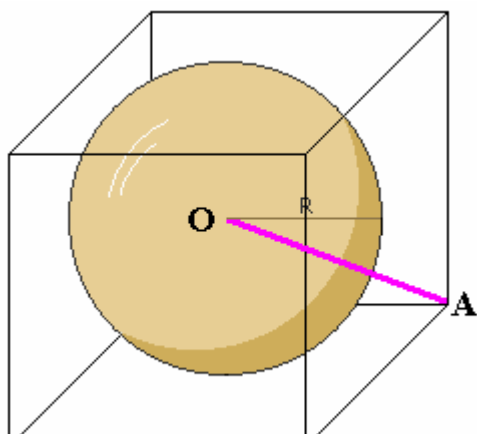
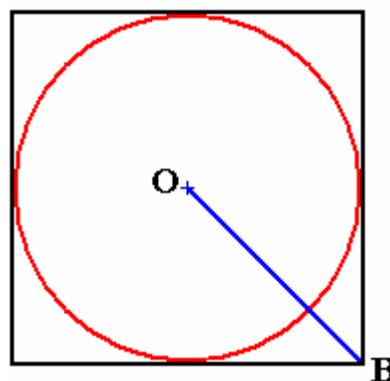
*“Una esfera de radio 10 cm se colocó en la esquina de un cuarto de tal forma que fuera tangente a las paredes y el piso, las cuales formaban, entre ellas, ángulos rectos. También se colocó una esfera pequeña entre la esfera grande, las paredes y el piso de tal modo que es tangente a esos elementos. Encontrar el volumen de la esfera pequeña”.*

La solución está realizada en el plano, por lo cual el problema queda reducido a dos circunferencias y el desarrollo se hace sobre ese modelo y no sobre el espacio que es el contexto original planteado en el problema. Acá se resuelve el problema en el espacio, como consideramos que es correcto de hacer.

### 2) Bases previas:

Debemos tener en cuenta que si tenemos una circunferencia de radio “r” inscrita en un cuadrado, la distancia (“d”) entre el centro de la circunferencia y un vértice del cuadrado es:

$$d = \overline{OB} = r \sqrt{2}$$



**Pero**, si tenemos una esfera de radio “r” inscrita en un cubo, la distancia entre el centro de la esfera y un vértice del cubo es:

$$\overline{OA} = R \sqrt{3}$$

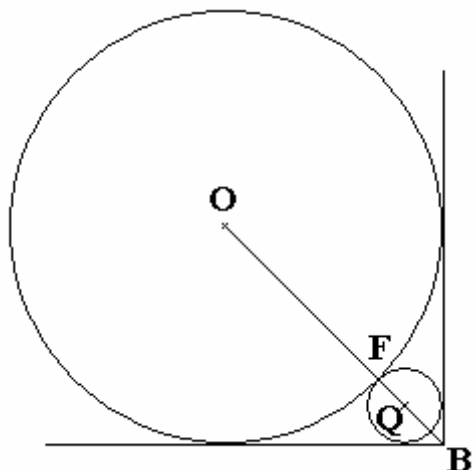
(¡OJO!  $\sqrt{3}$  y no  $\sqrt{2}$ )

### 3) Planteo del problema:

Para encontrar el radio de la esfera menor procederemos como sigue:

$$OB = BQ + QF + FO$$

donde:



$$\overline{OB} = 10\sqrt{3}$$

$$\overline{BQ} = r\sqrt{3}$$

$$\overline{QF} = r$$

$$\overline{FO} = 10$$

Dado que:

$$10\sqrt{3} = r\sqrt{3} + r + 10$$

despejando a "r" se obtiene:

$$r = \frac{10(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}$$

El volumen de la esfera se calcula con la fórmula:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

y al sustituir "r" se llega a:

$$V = \frac{4 \cdot 1000 \cdot \pi}{3} \left[ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right]^3$$

**a) Verificar que el procedimiento seguido es correcto.**

Dicha expresión para el cálculo del volumen se puede expresar como:

$$V_1 = \frac{4000\pi}{3} \left[ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right]^3$$

**b) Justificar este paso.**

Si consideramos las siguientes transformaciones:

$$\left[ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right]^3 = \left[ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \right]^3 = \left[ \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} \right]^3 = \frac{(\sqrt{3}-1)^6}{8}$$

**c) Explicar cada una de estas transformaciones.**

De ahí que otra expresión para el cálculo del volumen puede ser:

$$V_2 = \frac{4000\pi}{3} \frac{(\sqrt{3}-1)^6}{8}$$

Por otra parte podemos utilizar el hecho de que:

$$\left[ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right]^3 = \left[ \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} \right]^3 = (2 - \sqrt{3})^3$$

Así que el volumen de la esfera también se puede expresar como:

$$V_3 = \frac{4000 \pi}{3} (2 - \sqrt{3})^3$$

**d) Indicar la transformación realizada en este paso.**

Finalmente podemos expresar el volumen de un cuarto modo:

$$\left[ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \right]^3 = (2 - \sqrt{3})^3 = 8 - 12\sqrt{3} + 18 - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$

**e) ¿Es correcto?**

Por lo tanto:

$$V_4 = \frac{4000 \pi}{3} (26 - 15\sqrt{3})$$

#### **4) Cálculos:**

Las cuatro expresiones anteriores ( $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$ ) pueden servir para calcular el volumen de la esfera pequeña. Para simplificar los cálculos se puede usar una calculadora o una computadora.

**f) Utilizando el valor de  $\pi$  con siete cifras significativas, es decir  $\pi = 3,1415926$  pero variando la aproximación de  $\sqrt{3}$ , completa la siguiente tabla:**

Aproximaciones para $\sqrt{3}$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
1,7	72,9947	61,6009	113,0973	2094,3951
1,73	80,0883	79,2384	82,4480	209,4395
1,732	80,5712	80,5499	80,6293	83,7758
1,7320	80,5712	80,5499	80,6293	83,7758
1,73205	80,5833	80,5829	80,5842	80,6342
1,732050	80,5833	80,5829	80,5842	80,6342
1,7320508	80,5835	80,5835	80,5835	80,5839
1,73205080	80,5835	80,5835	80,5835	80,5839

1,732050807	80,5835	80,5835	80,5835	80,5835
1,7320508075	80,5835	80,5835	80,5835	80,5835

g) *¿Cuál elegirías como resultado correcto?*

h) *¿Crees que la fórmula  $V_4$  es errónea? Justifica.*

i) *¿Cómo puedes explicar la diferencia de los resultados?*

### **5) Ante el dilema. Primera parte del enigma:**

Los resultados son intrigantes ya que las fórmulas  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$  en todos los casos los resultados correctos cuando ponemos el valor exacto de  $\sqrt{3}$  pero ¿porqué tienen una convergencia tan diferente cuando usamos valores aproximados?

Es obvio que la cuatro fórmulas de  $V$  tienen un comportamiento diferente a las aproximaciones que hacemos al valor de  $\sqrt{3}$ . Esta respuesta puede estudiarse con rigor si escribimos las cuatro fórmulas como:

$$VC_1 = \frac{4000 \pi}{3} \left[ \frac{x-1}{x+1} \right]^3$$

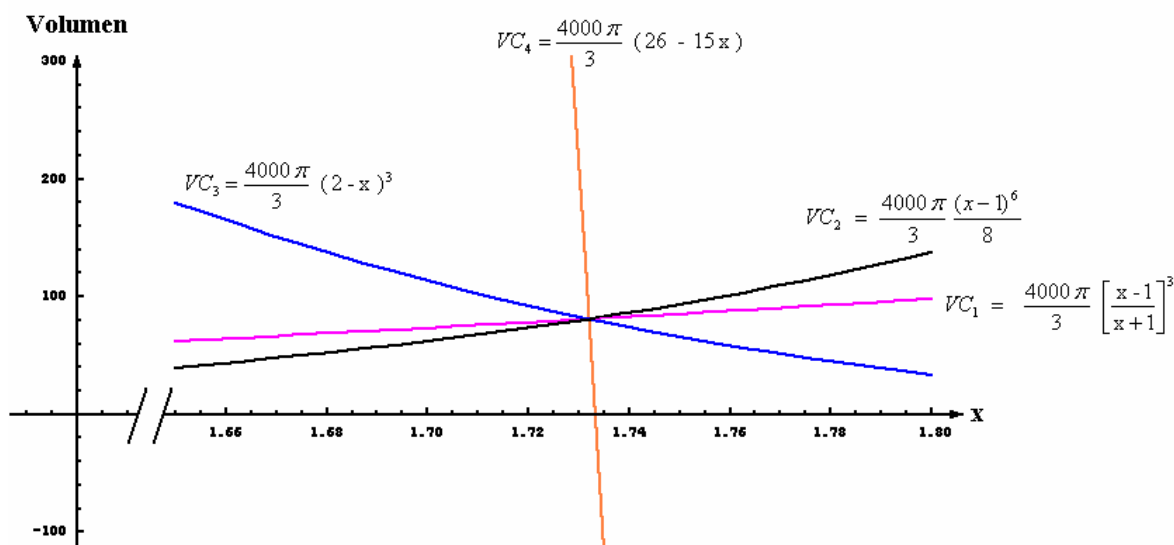
$$VC_2 = \frac{4000 \pi}{3} \frac{(x-1)^6}{8}$$

$$VC_3 = \frac{4000 \pi}{3} (2-x)^3$$

$$VC_4 = \frac{4000 \pi}{3} (26 - 15x)$$

donde hemos reemplazado a  $\sqrt{3}$  por  $x$ . Sustituyendo  $x$  por  $\sqrt{3}$  en cualquiera de la cuatro fórmulas de  $VC$  obtenemos el valor correcto.

Como queda de manifiesto en el gráfico siguiente, las cuatro fórmulas tienen una dependencia diferente de  $x$ :



Observamos que cuando  $x = \sqrt{3} = 1,7320508075\dots$  todas las curvas se cortan en un solo punto, que corresponde a un volumen de  $80.583470393094564\dots$

También en el gráfico observamos una convergencia diferente a este valor de  $x$ . En la tabla anterior uno se acercaba al valor exacto de la  $\sqrt{3}$  desde la izquierda. Mirándolo en el gráfico se encuentra el siguiente comportamiento:

- $VC_1$  (en violeta) es una función que **crece** suavemente y así ocurre con los valores de la tabla.
- $VC_2$  (en negro) **crece** un poco más rápidamente, y así se verifica en la tabla.
- $VC_3$  (en azul) en cambio **decrece**, lo que también se verifica en la tabla.
- Finalmente  $VC_4$  (en naranja) **decrece** muy fuertemente, y a ello se debe ese especial comportamiento en la tabla.

### 6) Ante el dilema. Segunda parte del enigma:

De todos modos sobrevive un segundo enigma: ¿por qué encontramos un comportamiento diferente en cuando a la convergencia de cuatro fórmulas de un volumen, deducidas estrictamente bajo las leyes de la matemática?

Realmente la cuatro fórmulas  $V_1, V_2, V_3$  y  $V_4$  son correctas cuando usamos el valor exacto de  $\sqrt{3}$ , pero son incorrectas como dependencia funcional. Vamos a ver en detalle esta conclusión para un caso particular, que es cuando pasamos de  $V_3$  a  $V_4$ , pero lo mismo podría hacerse con cualquier otra.

Tenemos

$$V_3 = \frac{4000\pi}{3} (2 - \sqrt{3})^3$$

$$V_4 = \frac{4000\pi}{3} (26 - 15\sqrt{3})$$

lo que **debería** implicar que

$$(2 - x)^3 = 26 - 15x$$

pero en cambio:

$$(2 - x)^3 \neq 26 - 15x$$

(donde  $x$  son valores aproximados de  $\sqrt{3}$ ) porque el término de la izquierda no tiene la misma forma funcional que el término de la derecha. El desarrollo sería correcto si hubiéramos hecho:

$$(2 - x)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 - x^3 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$$

**pero en cambio es erróneo reemplazar  $x^2$  por 3 y a través de este resultado reemplazar  $x^3$  por  $3\sqrt{x}$ , si  $x$  es un valor aproximado a la  $\sqrt{3}$ . Estos cambios sólo son legítimos si  $x$  es exactamente igual a la  $\sqrt{3}$ .**

Como ejemplo, si tomamos  $x$  como el valor aproximado 1,732, el único desarrollo válido es:

$$(2 - 1,732)^3 = 8 - 12 * (1,732) + 6 * (1,732)^2 - (1,732)^3$$

### **7) Conclusión:**

Las fórmulas  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $V_4$  son correctas como ecuaciones para calcular el volumen de la esferita pequeña, pero son incorrectas si las consideramos como funciones de  $x$  donde  $x$  es el valor aproximado de la raíz de 3. El error proviene de usar aproximaciones a esta raíz cuadrada y luego sustituir el cuadrado de la raíz de un valor aproximado por el valor 3.