

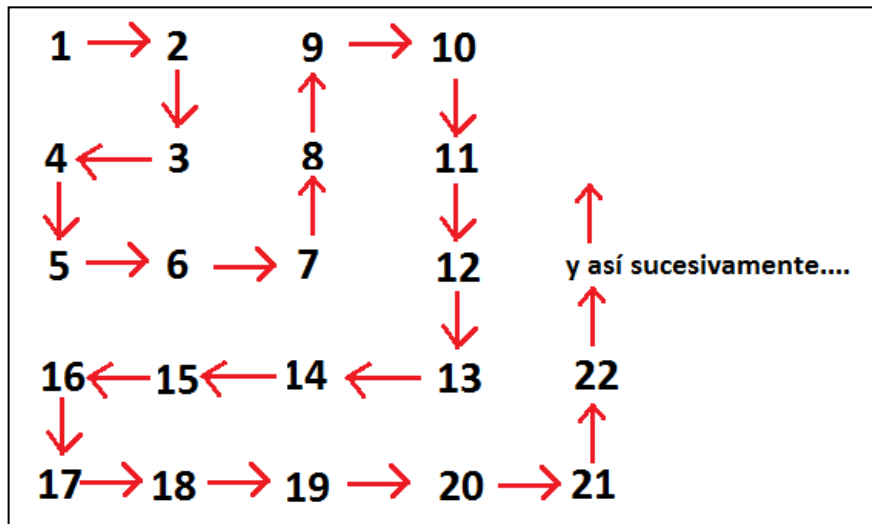
ZIGZAGUEANDO UN CUADRADO

Aporte del Prof. Marcelo Ponce – CEM 48 El Bolsón. Prov. de Río Negro

Colaboración: Oscar y Ana Bressan

Contenidos: Búsqueda de regularidades numéricas. Generalización.

Se disponen los números naturales a partir de 1 de la siguiente manera:



Problema 1: ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el número 2015?

Problema 2: ¿Y si el número buscado fuera par? Por ejemplo, 1934.

Problema 3: Escribir una regla para ubicar cualquier número.

SOLUCIONES

1) OBSERVACIONES GENERALES:

La trayectoria de las flechas ayuda a seguir cómo se irían formando los cuadrados geométricos (como cuando se llega al 4 o al 9). Estos cuadrados tienen al número 1 como vértice común y a un cuadrado perfecto (4; 9; 16;...) como otro de sus vértices.

Los lados de los cuadrados van aumentando en una unidad.

En la fila 1, en las columnas impares, están los cuadrados de números impares (1, 9, 25,...). El número de columna coincide con la base del cuadrado impar. Por ejemplo, $3^2 = 9$, está en la columna 3.

En la columna 1, en filas pares, están los cuadrados de números pares (4, 16, 36,...). (El 1 puede ser considerado en ambos casos, sea como cuadrado impar o sea como cuadrado par). El número de fila coincide con la base del cuadrado par, por ejemplo, $4^2 = 16$ está en la cuarta fila.

Para buscar la ubicación del 19, puedo orientarme en base a los cuadrados que lo encuadran: 16 y 25, por el primero debería estar en la fila 4, por el segundo en la columna 5, pero dado que no es un cuadrado exacto, hay que conviene orientarse a partir del cuadrado más cercano, en este caso 16. Siendo que 19 dista a tres lugares de 16 (y no pertenece al cuadrado de 4×4), debe estar en el de 5×5 , por lo tanto es necesario avanzar 3 lugares en sentido ascendente, por

lo tanto se avanzará bajará hasta 17 en la fila 5, y de allí se efectuarán dos desplazamientos hacia la derecha: ¡18 y 19! **Luego el 19 está en la fila 5, columna 3.**

Otro ejemplo: Ubicar el 23. En este caso su cuadrado más cercano es 25, por lo tanto estará en el cuadrado de 5×5 , antes del 25 ¿pero dónde? Es fácil notar que siendo 23 menos que 25 y 2 la diferencia con 25, que está en la columna 5, 23 debe estar en la misma columna que este número y en la fila 3, ya que lo separan 2 flechas de 25. **El 23 está en la fila 3, columna 5.**

¿Qué pasará entonces con 27? Ya no pertenece a los números que encuadran el cuadrado 5×5 . Por lo tanto, y dada su cercanía con 25, es esperable que esté en la columna 6. Si me muevo de 25 a 26 es un lugar, por lo tanto necesito bajar a 27, que estará en la fila 2 para desplazarme 2 lugares. **El 27 está en la fila 2, columna 6.**

Es interesante buscar en qué cuadrado geométrico está el número que se quiere ubicar. Por ejemplo, sea ubicar el número 237. No es un impar cuadrado perfecto, por lo tanto no está en las columnas impares. Su cuadrado más próximo por defecto es el de 15×15 y, por exceso, el de 16×16 , por lo tanto estará en un lado de este último (cada lado tiene 16 unidades). Dado que $256 - 237 = 19$ debe estar a 19 lugares de distancia anteriores al 256. Por lo tanto, no puede estar en su misma fila (de 16 unidades) luego estará **en la fila 13 y la columna 16.**

Avancemos a números mayores.

Problema 1: ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el número 2015?

POSIBLE SOLUCIÓN

Los números impares de la primera fila del cuadrado son los cuadrados de los números impares ($1^2, 3^2, 5^2, \dots$).

El número 2015 es impar pero no es un cuadrado perfecto. Veamos cuáles son los cuadrados impares más próximos. Dado que $\sqrt{2015} = 44,8 \Rightarrow 43^2 = 1849$ y $45^2 = 2025$. Entonces el 2025 está en la primera fila y en la columna 45. Pero como buscamos el 2015, y debajo de estos cuadrados impares los números disminuyen de a uno, hay que bajar hasta el 2015 diez lugares, o sea llegar hasta la fila 11. Por lo tanto el número 2015 está en la columna 45 y en la fila 11.

Problema 2: ¿Y si el número buscado fuera par? Por ejemplo, 1934.

Analicemos los números pares de la primera columna. Ellos son los cuadrados de los números pares ($2^2, 4^2, 6^2, \dots$).

1936 no es cuadrado perfecto (de ser así estaría en la primera columna). Veamos los cuadrados pares más próximos. Como $\sqrt{1934} = 43,97 \Rightarrow 42^2 = 1764$ y $44^2 = 1936$.

O sea que 1936 está en la primera columna y en la fila 44, y como los números en esa fila van disminuyendo de a uno, si queremos llegar a 1934, hay que llegar a la tercera columna. Por lo tanto el número 1934 está en la fila 44 y la columna 3.

Problema 3: Escribir una regla para ubicar cualquier número.

Pensamos un número natural cualquiera, al que lo llamo " n " y quiero saber en qué fila y en qué columna se encuentra ese número " n ". ¿Cómo hago para encontrarlo?

Observamos que todos los cuadrados (4, 9, 16, 25,...) se encuentran en la fila 1 o en la columna 1. Esta propiedad va a ser fundamental para ubicar cualquier número.

Vamos a encontrarnos con seis casos diferentes:

- a) **CUADRADO PAR:** que "n" sea el cuadrado de un número par, por ejemplo que "n" sea 4, 16, 36, 64,... Todos los cuadrados de números pares están en la columna 1 y en la fila que es la raíz cuadrada del número. Por ejemplo, el número 144 está en la columna 1 y en la fila $12 = \sqrt{144}$.
- b) **CUADRADO IMPAR:** que "n" sea el cuadrado de un número impar, por ejemplo que "n" sea 9, 25, 49, 81... Todos los cuadrados de números impares están en la fila 1 y en la columna que es la raíz cuadrada del número. Por ejemplo el número 225 está en la fila 1 y en la columna $15 = \sqrt{225}$.

El resto de los números, o sea los que no son cuadrados perfectos, están entre dos cuadrados perfectos, (el número 19 está entre el 16 y el 25) con dos posibilidades: que el cuadrado perfecto más cercano por defecto (lo llamamos CPD) sea el cuadrado de un número par, o que sea el cuadrado de un número impar. El número 19 corresponde al primer caso, porque el 16 es el cuadrado perfecto más cercano por defecto. El número 31 está en el segundo caso, porque 25 es el cuadrado perfecto más cercano por defecto.

Al cuadrado perfecto más cercano por exceso lo llamamos CPE. El 25 es el CPE de 19 y 36 es el CPE de 31.

Vemos en la tabla que cuando se da el primer caso (camino señalado en naranja en la tabla) los números crecen primero de izquierda a derecha hasta llegar a un número medio (en el camino naranja el número medio es el 21) y de allí en adelante de abajo hacia arriba. Podemos decir que crecen en forma contraria a como se mueven las agujas del reloj.

En el segundo caso (camino señalado en verde en la tabla) los números crecen primero de arriba hacia abajo hasta llegar a un número medio (aquí es el 31) y de allí en adelante de derecha a izquierda. Podemos decir que crecen en el sentido de las agujas del reloj.

1	2	9	10	25	26	49
4	3	8	11	24	27	48
5	6	7	12	23	28	47
16	15	14	13	22	29	46
17	18	19	20	21	30	45
36	35	34	33	32	31	44
37	38	39	40	41	42	43

El número medio (NM) juega un rol importante, ya que allí cambia la dirección de crecimiento. El NM se calcula como:

$$NM = (CPD + CPE + 1)/2$$

Por ejemplo para el camino naranja, donde CPD = 16 y CPE = 25 tenemos que:

$$NM = (16 + 25 + 1)/2 = 21$$

- c) ENTRE PAR Y MENOR O IGUAL QUE NM: Sea "n" un número cuyo CPD sea par y "n" sea menor o igual que el NM. Entonces "n" está en la fila igual a 1 más la raíz cuadrada de CPD, y en la columna igual a "n" menos CPD.
Ejemplo, sea el número 41. En este caso el CPD = 36, el CPE = 49 y $NM = (36+49+1)/2 = 43$. Vemos que 41 está entre 36 y 43. Está en la séptima fila ($7 = 1 + \sqrt{36}$) y en la quinta columna ($5 = 41 - 36$).
- d) ENTRE PAR Y MAYOR QUE NM: Sea "n" un número cuyo CPD sea par y "n" sea mayor que el NM. Entonces "n" está en la columna igual a 1 más la raíz cuadrada de CPD, y en la fila $CPE + 1 - "n"$.
Ejemplo, sea el número 45. En este caso el CPD = 36, el CPE = 49 y $NM = (36+49+1)/2 = 43$. Vemos que 45 está es menor que 49 (el CPE) pero mayor que el NM. Está en la séptima columna ($7 = 1 + \sqrt{36}$) y en la quinta fila ($5 = 49 + 1 - 45$).
- e) ENTRE IMPAR Y MENOR O IGUAL QUE NM: Sea "n" un número cuyo CPD sea impar y "n" sea menor o igual que el NM. Entonces "n" está en la columna igual a 1 más la raíz cuadrada de CPD, y en la fila igual a "n" menos CPD.
Ejemplo, sea el número 29. En este caso el CPD = 25, el CPE = 36 y $NM = (25+36+1)/2 = 31$. Vemos que 29 está entre 25 y 31. Está en la sexta fila ($6 = 1 + \sqrt{25}$) y en la cuarta columna ($4 = 29 - 25$).
- f) ENTRE IMPAR Y MAYOR QUE NM: Sea "n" un número cuyo CPD sea impar y "n" sea mayor que el NM. Entonces "n" está en la fila igual a 1 más la raíz cuadrada de CPD, y en la columna igual a $CPE + 1 - "n"$.
Ejemplo, sea el número 34. En este caso el CPD = 25, el CPE = 36 y $NM = (25+36+1)/2 = 31$. Vemos que 34 está entre 25 y 31. Está en la sexta fila ($6 = 1 + \sqrt{25}$) y en la tercer columna ($3 = 36 + 1 - 34$).

Vamos a hacer ahora un ejercicio con un número más grande. Sea "n" = 29248. Para determinar su CPD y CPE le sacamos la raíz cuadrada que es $\sqrt{29248} = 171,02046...$
El CPD es $171^2 = 29241$. El CPE es $(171+1)^2 = 29584$. NM es $(29241 + 29584 + 1)/2 = 29413$. Como n está entre el CPE y el NM, o sea que se encuentra en la condición e) (ENTRE IMPAR Y MENOR O IGUAL QUE NM). Por lo tanto su columna es $1 + \sqrt{29241} = 172$ y su fila es $n - CPM$ o sea $29248 - 29241 = 7$.