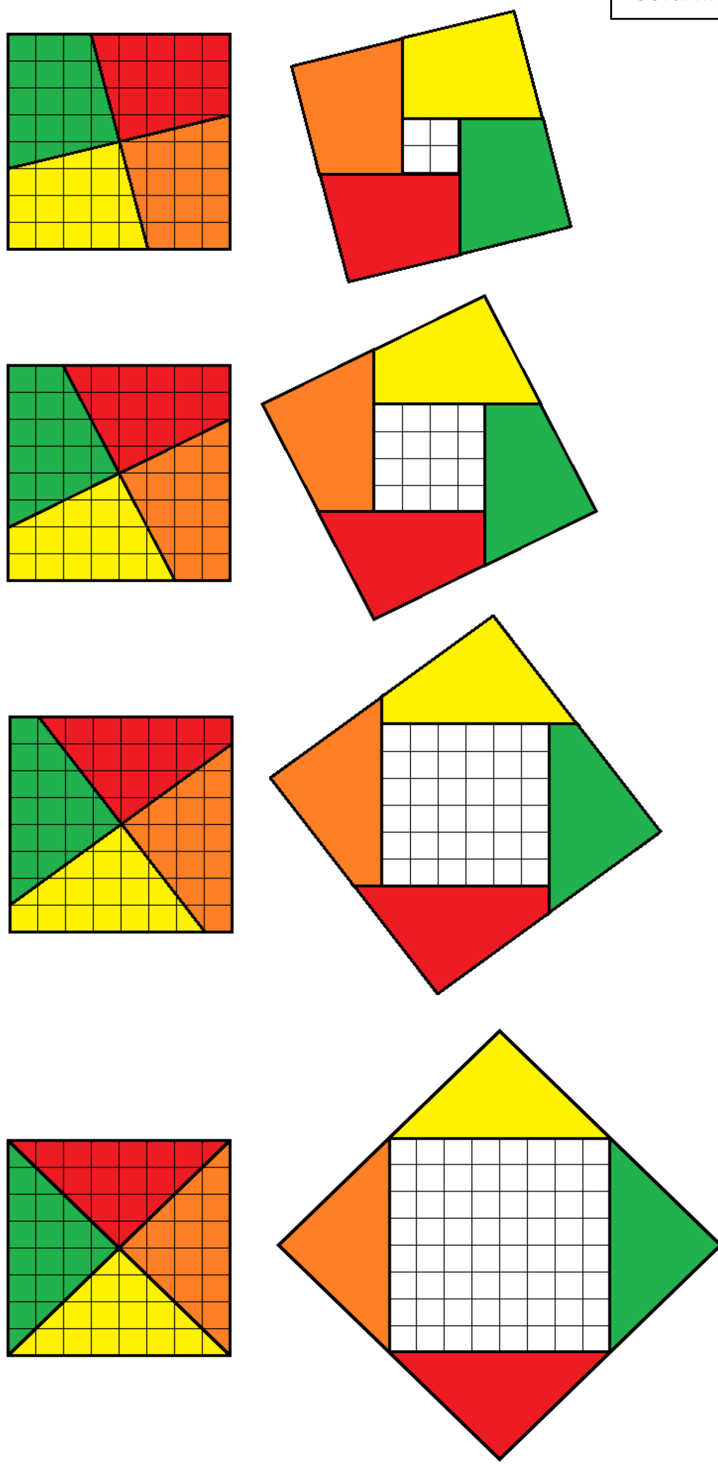
CUADRADOS AGUJEREADOS (SECUNDARIA)

Adriana Rabino, Ana Bressan

Columna izquierda

Columna derecha



1.Analiza las relaciones existentes entre los trapezoides de los cuadrados de la columna de la izquierda. ¿Qué condiciones verifican los puntos de corte de los segmentos con los lados del cuadrado? ¿Qué valor tienen los ángulos que concurren en el centro del cuadrado? Justificar. ¿Qué puedes decir sobre los trapezoides obtenidos? ¿Cómo puedes demostrarlo? ¿Qué parte de la superficie del cuadrado es cada uno de los trapezoides?

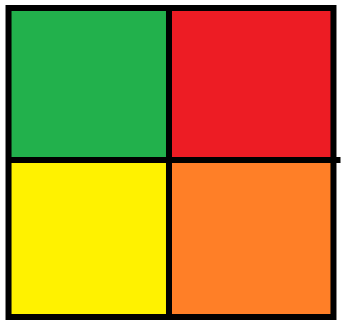
Solución: Los segmentos se intersecan en su punto medio que es el centro del cuadrado. Esto se puede demostrar apoyándonos en la cuadrícula y aplicando el Teorema de Pitágoras. Las figuras son trapezoides, salvo en el último cuadrado que son triángulos. Los segmentos cortan los lados del cuadrado siempre a la misma distancia de los vértices opuestos. Comparando los trapezoides de un mismo cuadrado, se puede verificar que son congruentes. Para probarlo se debe verificar que poseen los lados homólogos iguales y los ángulos congruentes: un par de ángulos correspondientes es recto (vértice del cuadrado) y dos pares son congruentes porque son alternos internos entres paralelas, luego el par de ángulos restantes también lo son (restando a 360°, por ser cuadrilátero). Para comprobar la congruencia de los lados homólogos, los alumnos pueden comenzar usando el cuadriculado y el teorema de Pitágoras para sacar a sacar conclusiones. También pueden pensar que se puede rotar 90° un trapezoide alrededor del centro dando por resultado que resultan congruentes entre sí. Pueden existir otras demostraciones. Los ángulos centrales son rectos, porque si los 4 trapezoides de cada cuadrado son congruentes, los 4 ángulos centrales también lo son, por lo tanto son ángulos rectos. Los otros ángulos son suplementarios (suman 180°).

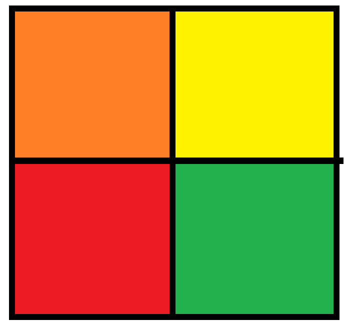
Dado que los 4 trapezoides son congruentes, sus áreas son iguales y, por lo tanto, cada uno resulta tener ¼ del área del cuadrado total.

2. Tienes un caso extremo en el último cuadrado de la columna izquierda de la figura dada ¿Por qué? ¿Valen tus conclusiones anteriores? Explica.

3.¿Qué otras posiciones podrán tomar los segmentos (considerando que sus extremos siempre pertenecen a los lados del cuadrado)? ¿Cuáles son las longitudes máximas y mínimas que pueden tener los segmentos de corte? ¿Puedes encontrar otro caso particular? ¿Qué figuras has obtenido en lugar de trapezoides?

Soluciones: Los extremos de los segmentos intersecados deben estar en la misma posición respecto de los 4 lados del cuadrado, y pueden tomar infinitas posiciones alrededor del centro del cuadrado conservando los ángulos rectos. El último cuadrado de la izquierda es un caso particular, donde se forman triángulos (es el caso en que los segmentos son las diagonales del cuadrado). Otro caso particular es cuando las figuras obtenidas dejan de ser trapezoides para convertirse en cuadrados (trapezoide particular), en el caso que los segmentos coinciden con las bases medias del cuadrado dado.





4. Ahora compara los cuadrados dados en la figura inicial (columnas izquierda y derecha). ¿Qué relaciones puedes observar entre los cuadrados de una misma fila? Analiza las longitudes de los lados de ambos cuadrados ¿Encuentras alguna relación entre los lados de los trapezoides (o de los segmentos que determinan los trapezoides en los cuadrados de la izquierda con los lados del cuadrado de la derecha?

5. Si consideras que el cuadrado de la izquierda tiene un lado de 8 unidades, ¿cuál es el valor del lado del cuadrado de la derecha? Puedes resolver esto usando T. de Pitágoras, ¿por qué?

Solución: Suponiendo que en ambas figuras de una misma fila las figuras en color son congruentes, una vez determinado que el lado del cuadrado a derecha es congruente con uno de los segmentos (ambos coincidentes) que forman los trapezoides en el cuadrado izquierdo, por adición de lados de trapecios, es fácil encontrar su valor en base al cálculo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo donde se conocen los catetos (4 y 1 si se toma medio segmento como hipotenusa; 8 y 2 si se considera la longitud del segmento entero). Otra forma de resolver es: el área del cuadrado de la derecha es 64 +4 (en el primer caso)= 68. Luego el lado mide √68.

6.Dado que el área de cada cuadrado de la columna izquierda es de 64 unidades, considera cómo varían las áreas en los cuadrados de la derecha. ¿Qué las hace variar?

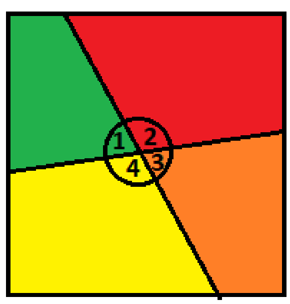
Solución: Suponiendo que la inclinación que toman los segmentos de corte en los cuadrados de la izquierda, es igual a la de los lados de los cuadrados de la derecha, se forman triángulos rectángulos iguales en ambas figuras, analizando catetos. De esta manera se puede calcular la longitud de los lados de los cuadrados a derecha y calcular su área. Ver más adelante “otro análisis”.

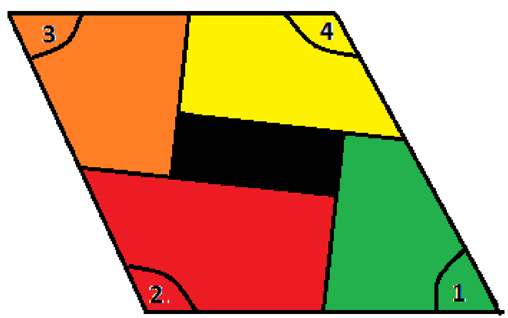
7. Calculadas la longitud del lado y el área correspondiente a cada cuadrado de la derecha, completa la siguiente tabla. ¿Qué relación encuentras entre la diferencia de áreas?

Lado del cuadrado derecho …	Área del cuadrado derecho…	Diferencia de áreas Área c. der. - 64u
$2\sqrt{(4^2 + 1^2)}$	$(2\sqrt{17})^2 = 68$	4u
$2\sqrt{(4^2 + 2^2)}$	$(2\sqrt{20})^2 = 80$	16u
$2\sqrt{(4^2 + 3^2)}$	…	
….		

8. Supón que generas otros trapezoides en los cuadrados de la izquierda dando giros distintos a los segmentos de tal manera que los ángulos centrales no sean rectos. ¿Se formará un cuadrado a la derecha? ¿Habrá agujeros cuadrados en estas figuras? ¿Podrás encontrar una relación general entre ellos? Explica por escrito lo hallado hasta ahora.

<u>Solución:</u> No se forma un cuadrado porque los ángulos centrales no son rectos (que son los ángulos-vértices en la figura de la derecha), pero al ser opuestos por el vértice, son congruentes, por lo tanto van a formar un paralelogramo. Y el agujero es un rectángulo, porque está formado por las perpendiculares de cuadrado de izquierda. Se puede verificar recortando la figura y armando. Por ejemplo:





<u>OTROS ANÁLISIS.</u> Adriana Rabino

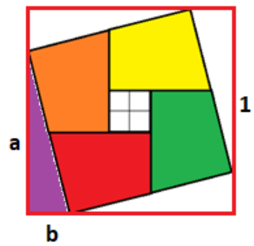
a) Observa los "agujeros" de los cuadrados de la columna de la derecha.

<u>Algunas respuestas:</u>

- Los lados son números pares: 0, 2, 4, 6, 8.
- Las áreas son números pares al cuadrado
- Las áreas ordenadas de los cuadrados agujereados pueden calcularse sumando los 64 cuadraditos del triángulo original más los del agujero:
  64 + **0**; 64 + **4**; 64 + **16**; 64 + **36**; 64 + **64**. ¿Puede seguir esta sucesión? ¿Por qué?

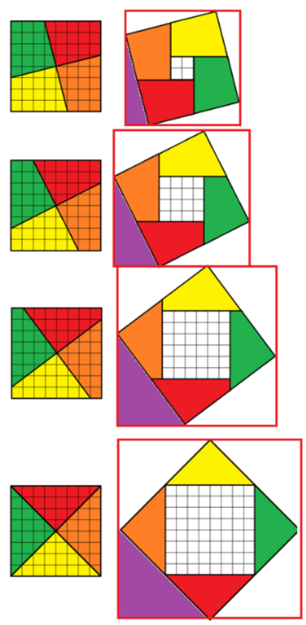
b. ¿Cómo van variando las inclinaciones de los cuadrados de la derecha? (Usando trigonometría).

Solución:
Ver los triángulos violetas y cómo varía la inclinación de la hipotenusa.
Como son valores relativos (pensemos que en cada cuadrado rojo el lado mide 1 unidad, para simplificar), esta inclinación se puede medir de distintas maneras: con la tangente hallando el ángulo de inclinación, con la pendiente estableciendo una relación entre catetos.



Sabemos que a + b = 1
Haciendo a/b podemos establecer esta variación dándole distintos valores a b desde 0 hasta 1. Dado que a = 1 - b, se puede tabular **(1 - b) /b.**

Usando tg $\alpha = a/b = (1 - b)/b$ con $0 < b \leq 1$, de esta manera se puede ver cómo va variando el ángulo de inclinación.



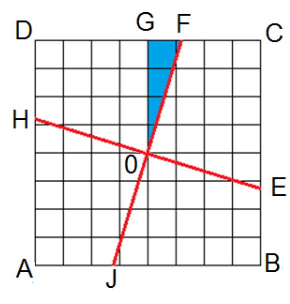
c. Este "movimiento" podría ser un continuo. ¿Cómo generalizar para cualquier inclinación de los segmentos en el cuadrados original y, por lo tanto, en el lado del cuadrado agujereado?

Solución:
Podemos volcar los datos en una tabla, lo cual resulta una manera muy práctica para hallar regularidades. Luego ver cómo va variando el ángulo de inclinación en el triángulo violeta. En los casos extremos, si b = 0, el ángulo α es de 90° y los lados del cuadrado resultan horizontales y verticales. Lo mismo que si b = 1, el ángulo α es de 0° y los lados del cuadrado vuelven a ser horizontales y verticales pero en el cuadrado se produjo una rotación de90°:

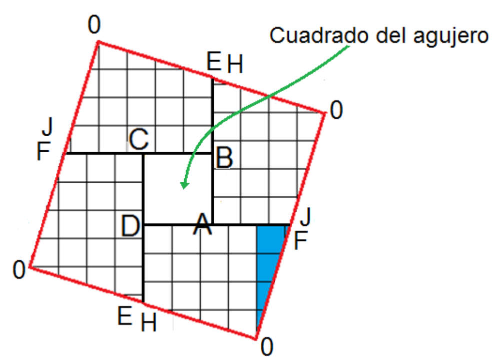
b	tg α = (1-b)/b	α
0	∞	90°
0,01	99	89°25´16”
0,1	9	83°39´35”
0,3	2,3…	66°48´5”
0,5	1	45°
0,8	0,25	14°2´10”
0,99	0,01…	0°34´43”
1	0	0

d. CUADRADOS AGUJEREADOS. Oscar Bressan

Se intenta cortar un cuadrado a traves de dos segmentos ortogonales que pasen por el centro y volver a formar un cuadrado con un agujero en el centro, de tal modo que el cuadrado central (agujero) tenga cualquier superficie entre cero y la superficie del cuadrado original.



Cuadrado original



Cuadrado nuevo

Sea:

ℓ = AB
Superficie del cuadrado original = ℓ^2
EC + CF = ℓ
0G = $\ell/2$
0F = 0E = $\sqrt{(GF^2 + (\ell/2)^2)}$

Lado del cuadrado nuevo = 0F + 0E = $\mathbf{2\sqrt{(GF^2 + 0G^2)}}$
Superficie del cuadrado nuevo = 4 ($0F^2$ + $0E^2$) = 4 ($0F^2$ + $0F^2$) = $\mathbf{8\ 0F^2}$
Superficie del cuadrado del agujero = $\mathbf{8\ 0F^2 - \ell^2}$

<u>PROBLEMA</u>

¿Para qué ángulo G0F la superficie del cuadrado del agujero está en la relación 25/64 del cuadrado original?

Esto implica que el agujero cuadrado tiene una superficie igual a 25 y el original tiene una superficie de 64.

Llamaremos θ al ángulo G0F.

Sup. cuad. original = $\ell^2 = 64$ y $\ell = 8$.

Sup. cuad. agujero = $8\ 0F^2 - \ell^2 = 25$

$\cos\theta = G0/0F = (\ell/2)/0F$ $\quad$ $0F = (\ell/2)/\cos\theta$

Sup. cuad. agujero = $8\ (\ell^2/4)/\cos^2\theta - \ell^2 = 2\ \ell^2/\cos^2\theta - \ell^2 = \ell^2\ (2\cos^2\theta - 1) = 25 \Rightarrow \theta = 33{,}5^o$

Así se puede resolver para cualquier razón entre 0 (0/64) y 1 (64/64) siendo el cociente entre el área del agujero/y el área del cuadrado original (agujero con área nula a área igual al cuadrado original).