El rompecabezas hexagonal: ¿Dónde está la matemática?

ANA BRESSAN. ADRIANA RABINO. BETINA ZOLKOWER

> La geometría de Euclides continúa sorprendiéndonos y entreteniéndonos. Los elementos de la geometría plana —puntos, líneas, círculos— son los ladrillos de muchas estructuras maravillosas. (Gardner, 2006: 107)

La corriente conocida como Educación Matemática Realista (EMR) surgida en Holanda a partir de los años 60, que reconoce como fundador al matemático Hans Freudenthal (1905-1990), tiene como principio rector concebir la matemática como una actividad humana la cual debe ser accesible a todos. Esta idea, que hoy es ya un concepto que figura en la mayoría de los diseños curriculares de los países más avanzados, no lo era en esa época en que la Matemática Moderna los dominaba con la intención de dar a los programas escolares la estructura propia de esta disciplina a nivel científico, haciendo desaparecer, además, la enseñanza de la geometría euclideana en las escuelas.

Pensar la matemática como actividad humana es lo opuesto de pensarla como un producto acabado a ser enseñado. Son los mismos estudiantes quienes a través de un proceso de reinvención guiada por el docente tienen la oportunidad de hacer matemática y resolver problemas utilizando estrategias informales, preformales o formales según sus posibilidades, de modo que todos puedan tener algún grado de experiencia matemática en su escolaridad.

Para dar oportunidad a todos los estudiantes la EMR procura conectar la matemática con la realidad y, a través del trabajo en las aulas, con contextos significativos para los alumnos. No implica esto que las actividades deban estar ligadas solamente a contenidos de su vida cotidiana o a experiencias sensoriales, sino más bien que los contextos en que ellas se presentan tengan características motivadoras y desafiantes para ellos, permitiéndoles utilizar su creatividad y sus estrategias informales, sirviendo de puente para pasar de situaciones concretas a una matemática cada vez más abstracta.

Para Freudenthal «los contextos son recortes de la realidad, los cuales en algún proceso de aprendizaje particular llaman a ser matematizado» (1991: 73). Desde esta perspectiva, los rompecabezas geométricos resultan buenos contextos para provocar procesos de matematización en nuestros estudiantes. Son motivadores por su naturaleza lúdica, estimuladores de la actividad intelectual y generadores de problemas. Además de entretener, pueden ser explotados por los docentes desafiando a los alumnos para que visualicen formas, relaciones y propiedades geométricas, mejoren sus representaciones mentales; incrementen su vocabulario a través de descripciones correctas y desarrollen variadas formas de razonamiento acerca de las propiedades geométricas y métricas encerradas en ellos.

Podemos considerar distintos tipos de rompecabezas geométricos: por unión (dadas las piezas se compone una figura o cuerpo) y por disección (implica cortar de manera específica, cualquier figura o cuerpo geométrico para obtener otros). Dentro de esta última clase, además, están aquellos rompecabezas que buscan dividir la pieza original en un número finito de piezas, reacomodándolas luego para obtener otra figura o cuerpo.

En este artículo se busca ejemplificar lo expuesto a partir de un rompecabezas hexagonal correspondiente al primer tipo —extraído del texto de Ivan Moscovich (2004), *Deviously Difficult Mind-Bending Puzzles*— que aparece en la figura 1 y presentar una serie de actividades para profundizar sus propiedades geométricas una vez armado por los mismos alumnos, lo cual ya de por sí posee una riqueza importante. Las actividades están pensadas para estudiantes de **segundo y tercer ciclo de la escuela primaria y primeros años del nivel medio**.

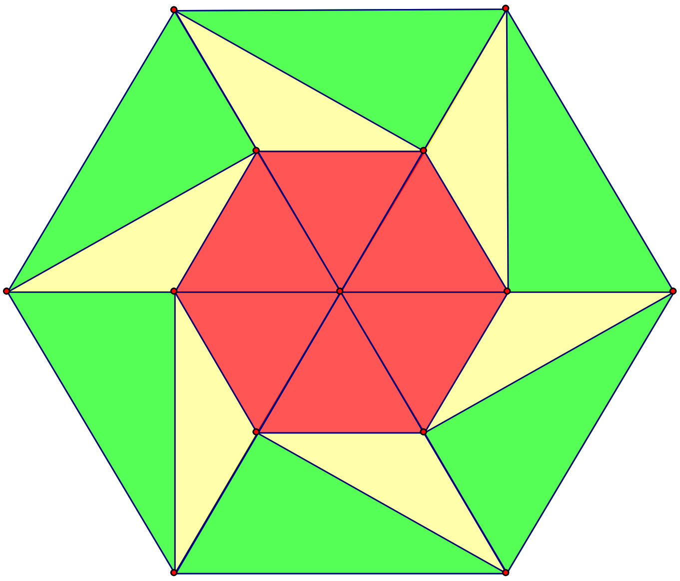


Fig. 1: Rompecabezas hexagonal

El rompecabezas hexagonal llega al aula

Existen varias maneras de introducir este rompecabezas en el aula. Puntualizamos tres posibilidades que implican distintos niveles de dificultad para los estudiantes (se sugiere confeccionarlo en cartón u otro material similar para que sea más perdurable):

1. Darles el rompecabezas armado y que ellos lo corten y vuelvan a armar.

La vista inicial del rompecabezas y el recortado ayuda a ver la disposición y propiedades de las piezas y sus posibles elementos de contacto y formas de cubrimiento. Es posible que buscando armar el rompecabezas original obtengan otros hexágonos variando la ubicación de las piezas. Ejemplos:

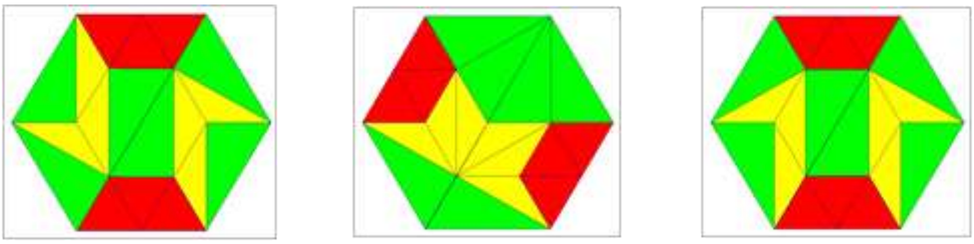


Fig. 2: Otros hexágonos con las mismas figuras

2. Darles las piezas cortadas y que ellos armen los hexágonos sin tener una visualización previa del rompecabezas, lo cual requiere desde el comienzo la manipulación de las piezas en función de la forma requerida y la búsqueda de relaciones entre ellas, aunque generalmente los primeros intentos de armado son por prueba y error, sin atenderlas demasiado.
3. Darles por escrito las instrucciones para que los alumnos construyan el hexágono regular original, constaten si su construcción acuerda con una interpretación correcta de estas, lo pinten y lo recorten. Esta actividad los obliga a recordar las propiedades del hexágono y a reconocer las características de cada pieza y las relaciones entre ellas, utilizando instrumentos de geometría y/o medida para su construcción.

Después de haber resuelto alguna de estas instancias, los estudiantes pueden copiar o pegar los distintos diseños que hayan surgido en papeles afiches para tenerlos a la vista y discutir sus hallazgos con toda la clase. Una actividad interesante consiste en registrar sus afirmaciones respondiendo a una pregunta como ¿qué observaron al armar el rompecabezas? y cuestionar la validez de estas. El pedido de justificación de las afirmaciones que surjan, posiblemente primero de la visualización del rompecabezas y luego del uso de la medida, llevará a los alumnos a intentar pruebas basadas sobre las propiedades geométricas de las figuras y a la posibilidad de discutir condiciones necesarias y suficientes para la construcción de este rompecabezas. Ya en el **nivel secundario** muchas propiedades pueden pedirse que sean demostradas con mayor rigurosidad.

A continuación se ejemplifican preguntas que, de no surgir en los estudiantes, podría hacer el docente para explotar este rompecabezas. Son solo sugerencias y el docente está libre de generar otras más adecuadas a sus intereses.

Se recomienda que el docente realice primero por sí mismo las actividades a fin de anticipar posibles ideas y estrategias de sus alumnos y pensar su acción didáctica para llevarlos al máximo de sus posibilidades de razonamiento y comunicación, de acuerdo con el tópico involucrado en cada pregunta.

Ejemplos de preguntas para trabajar con el rompecabezas hexagonal

Estas cuestiones (¡que no están secuenciadas!) abarcan contenidos correspondientes a diferentes años de la **escuela primaria y media**. Constituyen problemas abiertos que pueden ser encarados por todos los alumnos mostrando los distintos niveles de pensamiento que pueden coexistir en una clase.

Será el docente quien a través de la *interacción* en la clase dé lugar a procesos de reinvención que los conduzcan a una matematización progresiva que, partiendo desde lo informal e intuitivo que suelen utilizar inicialmente para *mostrar* propiedades del hexágono y sus figuras (procedimientos de prueba y error, superposición o medición), puedan llegar al uso de inferencias acerca de estas propiedades, hasta hacer justificaciones y demostraciones sencillas dentro de las posibilidades de cada uno.

a) Utilizando el hexágono original (figura 1), contestar individualmente o por grupos las siguientes preguntas, tomando como dato que el *radio*[1] del hexágono rojo es la mitad del radio del hexágono mayor.

- ¿Qué clases de triángulos hacen este rompecabezas?
- ¿Cómo están relacionados unos con otros?
- Encuentra otras formas de hacer un hexágono con estas piezas (¡existen al menos 15 maneras!)
- ¿Qué relaciones conoces de los tres tipos de triángulos que te ayudan a encontrar maneras de unirlos para construir el rompecabezas? ¿De cuántas maneras puedes hacerlo?
- ¿Qué equivalencias puedes establecer entre figuras del rompecabezas?
- ¿Qué fracción del rompecabezas es roja (o está hecha con triángulos equiláteros rectángulos)? (Lo mismo para la amarilla —triángulos isósceles— y la verde —triángulos rectángulos—).

[1] Por radio de un polígono regular se entiende el segmento que une el centro de este con un vértice.

- ¿Qué fracción del rompecabezas es cada pieza?
- ¿Cómo construirías el rompecabezas con transportador?
- ¿Cómo construirías el rompecabezas con regla y compás?
- ¿Qué propiedades del hexágono regular usaste en cada tipo de construcción?

b) Sobre la base del análisis de los diferentes hexágonos obtenidos contestar:

- ¿Cuáles de estos hexágonos presentan simetrías? ¿Cuáles no?
- ¿Qué tipos de simetrías puedes encontrar en estos? Identificar ejes y/o centros de simetría.

c) Elige uno de los hexágonos armados:

- agranda el rompecabezas 4 veces del tamaño actual.
- reduce el rompecabezas a ¼ del actual.
- encuentra una regla para ampliar o reducir este rompecabezas a cualquier tamaño.

Extensión: Sobre la base del estudio de este rompecabezas, diseña uno propio que sea:

a. un rompecabezas hexagonal regular diferente (con piezas diferentes);
b. un octógono regular;
c. un pentágono regular.

A continuación se explicitan los temas geométricos que pueden abarcarse con las distintas preguntas y se comentan las posibles respuestas:

- ¿Qué clases de triángulos hacen este rompecabezas?

Temas: Clasificación de triángulos. Congruencia de triángulos. Mediana y altura de un triángulo equilátero. Ángulos adyacentes de un triángulo.

Visualmente se aprecia que el triángulo verde es rectángulo-escaleno, el amarillo es isósceles-obtusángulo y el rojo es equilátero (y por supuesto, acutángulo). Algunos alumnos recurrirán a la medida de lados y ángulos para comprobar lo que afirman.

… Pero si hay que demostrarlo se requerirá de herramientas conceptuales más generales. Por de pronto no hay un solo camino para hacerlo. Proponemos un ejemplo de un razonamiento que lleve a fundamentar la naturaleza de cada tipo de triángulo del hexágono. Convengamos que los alumnos pueden utilizar el lenguaje verbal para mostrar su razonamiento, pero es importante que lo vayan explicando con claridad sobre la figura.

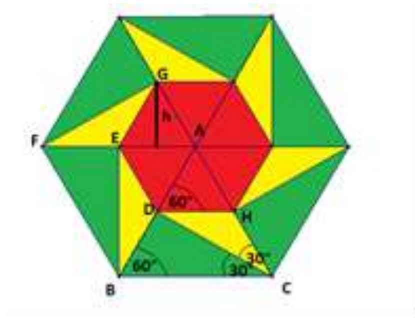


Fig. 3: Hexágono auxiliar para ubicar datos

a. Si se considera la figura central roja, que también es un hexágono regular (¿por qué?), se observa que está formada por 6 triángulos equiláteros (dado que en cualquier hexágono regular, la longitud del lado es igual a la del radio). Así queda demostrado que el triángulo rojo es equilátero.
b. Centrándonos en el triángulo ABC, se puede comprobar que el triángulo ACD (unión de un triángulo rojo y uno amarillo) es igual al triángulo BCD (verde).
c. Dado que el triángulo ABC es equilátero (ídem a la demostración anterior) y D es el punto medio del lado AB (dato), DC es la mediana del triángulo ABC (por definición de mediana), pero al ser un triángulo equilátero, a su vez la mediana es altura y mediatriz y divide al triángulo en dos triángulos congruentes. Con lo cual el triángulo ACD es igual al triángulo BCD. De esto se puede deducir que la medida del ángulo ACD (amarillo) = medida del ángulo DCB (verde) = 30°.
d. Como el ángulo ABC del triángulo ABC mide 60° (por ser triángulo ABC equilátero) y el <DCB mide 30°, el ángulo BDE (verde) es recto (pues la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a180°). Con lo cual el triángulo BDC (verde) es rectángulo.
e. El ángulo CDH (amarillo) mide 30° ya que es adyacente con los ángulos de 90° y 60°. Con lo cual el triángulo DHC es isósceles (amarillo) (por propiedad de los ángulos de la base de un triángulo isósceles).

- ¿Cómo resultan las áreas de estos triángulos? ¿Qué fracción de cada color constituye el rompecabezas?

Temas: Equivalencia de áreas. Fracciones y porcentajes de áreas.

El triángulo rojo tiene la misma área que el triángulo amarillo. Dado que los segmentos FE y EA son iguales por condición inicial dada, si se toman estos lados como bases de cada uno de los dos triángulos (rojo y amarillo), se tiene que la altura h es la misma para ambos.

Por lo tanto, los dos triángulos tienen la misma área al tener igual base e igual altura.

El triángulo verde se conforma con el rojo más el amarillo (que tiene igual área), por lo tanto el área del verde es el doble de la del rojo o del amarillo.

Resulta entonces, sobre la base de lo anterior que la parte roja representa ¼ del rompecabezas o el 25 %, ya que su área es equivalente a la amarilla y a su vez, la amarilla junto a la roja son equivalentes a la verde (demostrado anteriormente). Entonces la amarilla representa el 25 % y la verde el 50 % del hexágono mayor.

- **¿Cómo se puede construir un hexágono regular?**

<u>Temas:</u> Construcción de figuras geométricas. Uso de instrumentos de geometría. Propiedades del hexágono.

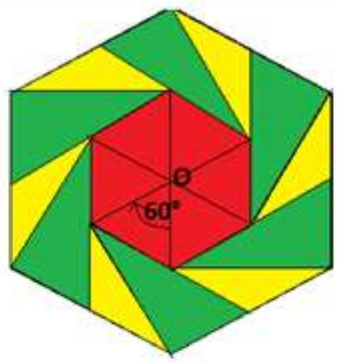
Para construir el hexágono con transportador, hay que marcar seis ángulos consecutivos de 60° cada uno (al ser un polígono regular, cada ángulo central mide 360°: 6 = 60°), luego hay que marcar lados de esos ángulos congruentes y luego unir los extremos de esos lados en forma consecutiva. Pueden usar este mismo método para construir otros polígonos regulares como pentágonos u octógonos regulares, considerando la partición del ángulo de 360° según la cantidad de lados del polígono a construir.

Para construir el hexágono regular con regla y compás, es necesario trazar una circunferencia, y con la misma amplitud del radio transportar seis veces esa amplitud sobre la circunferencia. Dibujar el hexágono uniendo estos puntos (vértices). Esta construcción se basa sobre la propiedad que el lado del hexágono tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia circunscripta. Por lo tanto no es válida para construir cualquier otro polígono regular.

- **¿Cuáles de estos hexágonos presentan simetrías? ¿Cuáles no? ¿Qué tipos de simetrías se pueden encontrar en ellos?**

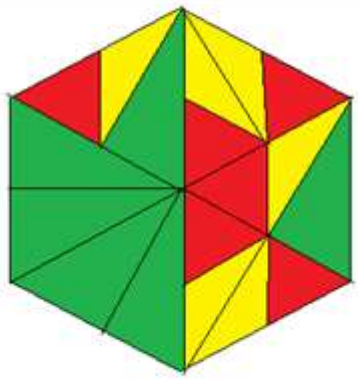
<u>Tema:</u> Simetrías en hexágonos compuestos por triángulos en distintas posiciones.

En el desarrollo de todas las formas posibles de armar los distintos hexágonos se pueden visualizar y reconocer movimientos rígidos como: simetrías axiales, simetrías centrales y rotaciones, destacando los ejes de simetría, centros de simetría o ángulos y centros de rotación según el caso. Por ejemplo:



Simetría central de centro O o rotación de centro O y ángulo +/-60° (+/-120°, +/-180°, +/-240°, +/-300°)

Simetría axial



No presenta simetrías ni rotaciones

- **¿Cómo agrandar 4 veces este rompecabezas?**

Temas: Semejanza. Proporcionalidad**.**

Al agrandar o achicar el rompecabezas se está buscando una figura semejante a la dada. Para ello se debe respetar que los ángulos se mantengan congruentes y las longitudes proporcionales. Cuando decimos que se agrande 4 veces, ¿nos referimos a agrandar el área 4 veces? En ese caso, ¿las longitudes se agrandan 4 veces? Tener en cuenta que si se empieza por agrandar 4 veces los lados (o longitudes) su área aumenta 16 veces (es decir 4^2). La misma relación se produce al achicar la figura.

Debe quedar bien esclarecida la no proporcionalidad entre longitud y área. Es importante discutir qué significa agrandar 4 veces. Intuitivamente la primera intención es pensar que lo que agrandamos es el área (es como si tuviéramos un cuadrado y armamos otro con 4 cuadrados), pero es muy probable que para lograrlo los alumnos agranden 4 veces las longitudes (y por qué no los ángulos). Si hacen esto, el área aumentará 16 veces y si modifican los ángulos la figura se deformará. Entonces, para que la figura aumente 4 veces su área, sus dimensiones lineales deben aumentar 2 veces (o sea $\sqrt{4}$).

A nivel secundario se puede usar el concepto de homotecia para agrandar o achicar la figura. Otra vez hay que tener en cuenta que si utilizamos $k = 4$ o $k = 1/4$, el área de la figura aumenta o disminuye 16 veces. Por lo tanto, si queremos que su área aumente 4 veces, la razón debe ser $\sqrt{4} = 2$. Análogamente, para que su área disminuya 4 veces, la razón de homotecia debe ser $\sqrt{1/4} = 1/2$.

Conclusión

Hasta aquí se ha tratado de mostrar cómo un buen contexto visual como este rompecabezas hexagonal puede ser el punto de partida para conducir a incentivar la actividad mental de los alumnos y ampliar sus conocimientos geométricos, a través de múltiples preguntas emergentes de la necesidad de explicar y justificar lo que *ven* y *pueden hacer con él.*

Como dice P. van Hiele (1999)[2], discípulo de Freudenthal:

> *Recuerden: la geometría comienza con el juego. Tengan a mano materiales como el rompecabezas de siete piezas.*[3] *Jueguen con ellos ustedes mismos. Reflexionen acerca de los temas de geometría que incluyen y cómo secuenciar las actividades para desarrollar los niveles de pensamiento de los chicos en estos temas. Luego involucren a sus alumnos en juegos y actividades que ofrezcan un aprendizaje en el pensamiento geométrico. Los alumnos cuyo pensamiento geométrico es nutrido cuidadosamente están en mejores condiciones de estudiar exitosamente la clase de matemática creada por Euclides.*

---

[2] Pierre van Hiele se refiere al rompecabezas trabajado en su artículo: Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play (Desarrollando el pensamiento geométrico a través de actividades que comienzan como un juego) publicado en Teaching Children Mathematics 5(6): 310-16, February 1999. Para leer experiencias en que se usan este rompecabezas consultar Experiencias de aula en la página ‹www.gpdmatematica.org.ar.›

Bibliografía

GARDNER, M. (2006). *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems*. Editado por Dana Richards.

MOSCOVICH, Ivan. (2004). *Deviously Difficult Mind-Bending Puzzles*. Nueva York: Sterling Publishing.