



## CLAVES PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA

*Problemas, secuencias, algoritmos y evaluación*

## ESCUELA Y COMUNIDAD

*Organizaciones barriales, proyectos e instituciones de gestión social*

# Números muy grandes y muñequitos muy pequeños... ¡unidos por la Matemática!

**SILVIA PÉREZ**  
Integrante del  
Grupo Patagónico  
de Didáctica de  
la Matemática

A partir de una noticia que le llega por casualidad, la autora desarrolla una experiencia que se enmarca en las ideas de la Educación Matemática Realista (EMR). El texto alterna relato y aportes teóricos (los últimos, identificados con bastardillas) revelando de este modo cómo la teoría y la práctica se relacionan de modo estrecho y se explican, cuestionan y enriquecen recíprocamente.

## ¿Cómo surgió esta experiencia?

Navegando por la web, encontré una noticia que llamó enseguida mi atención por lo familiar de los muñecos playmobil (¡que usé en mi propia infancia y, hasta hace poco, usaron mis hijos!) y por lo desafiante que sonó su encabezado (ver Figura 1).

¿Los pequeños muñecos triplican la población mundial? ¡Uau! ¿Y dan más de dos vueltas a la Tierra? ¿Casi o puede ser?! Creo que casi al mismo tiempo en que pensaba estas cosas, decidí ofrecer a mis alumnos de séptimo la oportunidad de matematizar esta noticia.

*La EMR entiende a la Matemática como actividad humana, “una actividad de resolución de problemas, de buscar problemas, pero también, de organizar un objeto de estudio” (Freudenthal, 1991). Esta actividad, denominada matematisación, tiene su origen en contextos realistas, recortes de la realidad (eventos, situaciones, momentos, etc.) que resultan significativos para los alumnos, movilizan sus conocimientos informales y experiencias para llegar de manera progresiva hacia los conocimientos más formales. La búsqueda (y hallazgo) de estos contextos y situaciones generadores de la actividad mate-*

## La Voz de Galicia.es

### Los «clicks» de Playmobil triplican la población de la Tierra

Los pequeños muñecos suman más de 21.100 millones de unidades desde que se iniciara su producción a principios de los años 70.



Los conocidos «clicks», pequeños muñecos de plástico de la empresa alemana de juguetería Playmobil, triplican la población de la Tierra, al sumar más de 21.100 millones de unidades desde que se iniciara su producción a principios de los años 70.

«Si los pusiéramos a todos ellos alineados, la fila de figuras daría la vuelta a la Tierra dos veces y media», destaca Andrea Schauer, gerente de Playmobil, en una entrevista que publica el semanario alemán *Die Zeit*. Tras subrayar que cada habitante de nuestro planeta posee como media tres figuras de Playmobil con la producción alcanzada hasta ahora, Schauer recuerda que el conocido juguete tuvo un nacimiento casual.

«La empresa Geobra-Brandstätter, casa madre de Playmobil, fabricaba a principios de los años setenta grandes vehículos de juguete de plástico, pero con la crisis del petróleo que se produjo entonces se volvió demasiado caro», explica.

Ello condujo a que los diseñadores se concentraran en la creación de vehículos más pequeños, así como de las figuras para jugar con ellos, que con el tiempo se han vuelto cada vez más sofisticadas, señala finalmente la gerente de Playmobil.

Figura 1

matizadora de los alumnos, se conoce como fenomenología didáctica. La noticia constituyó un contexto realista para estos alumnos, los motivó a trabajar y permitió que encaren el trabajo matemático de acuerdo a sus posibilidades, conocimientos anteriores y sentido común. “El que un contexto sea o no realista depende de la experiencia previa de los alumnos y/o de su capacidad para imaginarlo o visualizarlo” (Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016).

En ese momento tenía a cargo en Matemática a dos grupos de séptimo de una escuela privada bilingüe de San Carlos de Bariloche. Era el segundo año consecutivo que trabajábamos juntos, por lo que teníamos importantes acuerdos logrados en cuanto a la forma de trabajo en el área.

*Lograr que el aula se convierta en un espacio estimulante de discusión, reflexión e intercambio respetuoso y enriquecedor de opiniones e ideas, depende de las reglas o normas que se establezcan entre docente y alumnos respecto de qué se aceptará en clase, qué no, qué esperar mutuamente, cómo valorizar las ideas, procedimientos y respuestas, etcétera. Este cúmulo de normas que regula la actividad docente y de los alumnos en la clase de Matemática, es lo que desde la didáctica francesa se denomina “contrato didáctico” (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997 y Brousseau, 1986). Como ya veníamos de compartir un año, se había logrado ya un clima de confianza y oportunidades que alentaba la participación de todos, al igual que un claro arreglo sobre cómo trabajar en las clases.*

## ANTES DE LLEVAR LA NOTICIA AL AULA

Al planificar su posible uso en el aula me dediqué a:

- anticipar qué podrían hacer los chicos,
- delimitar cuál sería el problema o pregunta central a trabajar,
- determinar claramente qué contenidos podía abordar,
- definir cómo iniciaría la clase, qué discusiones matemáticas quería que surgieran, a qué conclusiones pretendía llegar.

Los contenidos curriculares centrales que identifiqué fueron:

- Números “grandes”, su lectura y escritura.
- Propiedades del sistema de numeración.

- Operaciones con números naturales y racionales.
- Cálculo mental, escrito y con calculadora; exacto y aproximado.
- Resolución de situaciones de proporcionalidad directa utilizando distintas estrategias. Unidades convencionales de longitud, equivalencias entre ellas. Medición efectiva de longitudes usando distintos instrumentos.
- Precisión y error en la medida.

De modo transversal, apuntando a la construcción y el fortalecimiento de la resolución de problemas, incluí los siguientes contenidos:

- la creación de preguntas sobre la base de ciertos datos, lo que llevará al planteo y formulación del problema matemático que encierra la situación;
- la identificación e interpretación de los datos dados;
- la modelización de la situación problemática a través de tablas, gráficos, etc.;
- la estimación del resultado del problema;
- la anticipación acerca de si la respuesta debe ser exacta o aproximada, la selección de estrategias de resolución y su validez, la revisión de la razonabilidad de los resultados (propios y ajenos), la evaluación del resultado y la detección y justificación de errores.

Interesa destacar de esta etapa de diseño que, si bien tenía claramente definido hacia dónde quería orientar el trabajo, la propuesta para los alumnos fue abierta. Los chicos fueron invitados a analizar la noticia proyectada en el pizarrón y a expresar sus opiniones al respecto con la intencionalidad de poder determinar y formular, colectivamente, cuál sería el problema a resolver.

*Ocuparse de la planificación, la anticipación de posibles estrategias de resolución (correctas y erróneas), el recorte conceptual y la profundización a lograr, constituye parte esencial del trabajo docente, sobre todo cuando uno decide incorporar al aula la realidad en toda su complejidad y riqueza fenomenológica. De acuerdo con Freudenthal (1991) esta actividad organizadora de situaciones de enseñanza-aprendizaje se denomina didactizar.*

Se hace evidente en este punto, otra idea importante de la EMR: la integración o interrelación de contenidos de distintos ejes curriculares, dado que para resolver situaciones problemáticas de este tipo suele ser necesaria la conexión de habilidades y herramientas matemáticas de distinto tipo. En este caso, conocimientos de número, operaciones y medida.

## ¿CÓMO TRABAJAMOS CON LOS ALUMNOS?

Proponer una tarea vinculada a una noticia y a estos muñecos tan familiares, generó de manera inmediata mucho interés. Los primeros comentarios aludieron a su conocimiento y experiencia con ellos: “¡Yo tengo de esos!, ¡Yo jugaba con esos!, ¡Ay, sí, yo jugaba con la plaza de playmobiles! ¡Había uno con bigotes, me acuerdo!...”.

También expresaron curiosidad, con preguntas muy parecidas a las que me había hecho al encontrar la noticia: “¿hay el triple de playmobiles que de personas en el mundo? ¿Contarán los que se rompen? ¿Cómo saben? ¡¿Y dan más de dos vueltas a la Tierra?! ¡No puede ser!”.

¡El problema estaba servido! La propuesta fue entonces ocuparnos de constatar si podía ser cierto aquello que decía el recorte del diario: 21.100 millones de playmobiles dando dos vueltas y media a la Tierra.

En esta instancia se confirma:

Cuando los alumnos se sienten motivados o interesados en un problema, naturalmente ven estimulada su creatividad y la capacidad de formularse preguntas respecto del mismo. Esto genera la necesidad de resolver o dar respuesta a esos interrogantes, estimulando a su vez la producción de ideas, estrategias de resolución, puesta en juego de conocimientos previos, etc. Se trata de aprovechar y avivar la curiosidad de los alumnos también para proponer problemas y no solo para resolverlos (Santaló, 1997, en Bressan, Pérez y Zolkower, 2006).

Los estudiantes se organizaron espontáneamente en grupos y alguien expresó que necesitaban saber cuál es la longitud o el perímetro de la Tierra y tener algunos playmobiles reales. Para la próxima clase, los chicos verían de conseguir la información y los materiales acordados.

Al día siguiente, ya organizados los grupos para trabajar, los chicos preguntaron:

**Seño, ¿cuál es la circunferencia de la Tierra? ¡Porque tenemos números distintos!**

La primera cuestión interesante a discutir: ¿por qué en distintas fuentes aparecen longitudes distintas si la Tierra es la misma?, ¿cómo se mide una distancia así?, ¿cuál nos conviene tomar? Esto llevó una mini-lección dentro de la clase, dedicada al problema histórico de medir la circunfe-

rencia terrestre, los cálculos de Eratóstenes y la necesidad de máxima precisión (o no) en este caso. Los chicos no tardaron en descartar las medidas con decimales y utilizar los valores enteros (ver Figura 2).

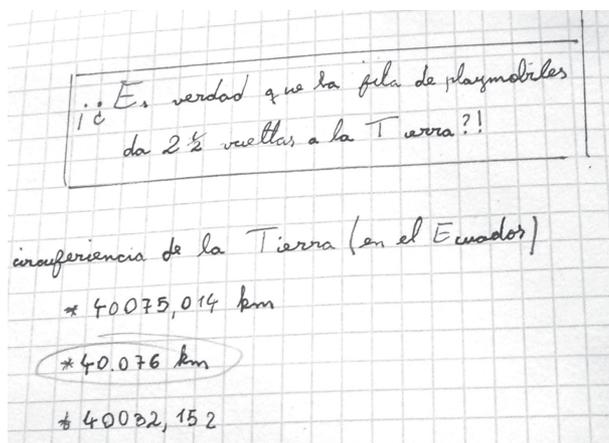


Figura 2

Como hacía habitualmente con este grupo, los interrumpí durante el proceso de resolución para poner en común y discutir las ideas (no los resultados) que estaban gestando. De esta forma, generaba un nuevo espacio de trabajo colectivo que permitía intercambiar ideas, despersonalizarlas y reflexionar sobre su pertinencia, eficiencia, corrección, etcétera antes de desarrollarlas por completo.

La Figura 3 muestra el registro de este proceso donde las ideas propuestas fueron evaluadas y revisadas cuando el problema todavía no estaba resuelto.

Otro principio fundante de la EMR es el de interacción. Es responsabilidad del docente generar oportunidades y organizarlas para que los alumnos compartan procedimientos y conocimientos matemáticos, y discutan ideas colectivamente. Esta interacción, de carácter cognitivo, se potencia en este “corte” o interrupción durante la resolución de un problema. Son los propios alumnos los responsables de probar, cuestionar, contrastar y evaluar las ideas en un proceso interactivo donde el docente media entre los alumnos entre sí, en su relación con el problema y entre su trabajo informal y las herramientas matemáticas más formales.

Cuando los grupos retomaron la tarea, pude tomar nota de distintas discusiones vinculadas a la medida: cómo usar los playmobiles, si acostados, parados, si considerar el ancho de los más grandes o un promedio entre los playmobiles más grandes y los más pequeños, si dejar un espacio entre ellos, etc. Cada grupo decidió cómo utilizar los muñequitos. Algunos optaron por tomar una muestra y hacer mediciones efectivas, como se observa en la Figura 4.

Ideas  
 → medir el ancho y el alto del play. y ver cuántos entran en un km y multiplicarlo (¿?)  
 → medir el alto del play. y ver por cuánto multiplicarlo para que dé 40.000  
 → multiplicar el ancho por 21.000 mill. y ~~ver~~ dividir eso  $\times 40.000$   
 (convertido a cm o cm)  
 → dividir una vuelta por el ancho de un playmobil y  $\times 25$   
 → hacer una tabla 

cm	40	100.000
playm	10	?

  
 → averiguar los play de 1 vuelta y de ahí los "si necesitan para 2 1/2 vueltas"

Figura 3

Otros, como se ve en la Figura 5, trabajaron a nivel numérico estableciendo una razón de un playmobil y su ancho para buscar razones equivalentes y establecer cuántas vueltas dan los 21.000 millones de muñecos:

Esto trajo aparejada como cuestión secundaria, el uso de la calculadora para números tan grandes... "la calculadora común marca error y la científica, ¿por qué pone ese número arriba?", ¿qué significa?, ¿qué relación tiene ese superíndice con la cantidad de ceros que tiene el número atrás?, ¿cómo se puede realizar un cálculo tan "grande" usando números más chicos?". Otra oportunidad para avanzar matemáticamente en el conocimiento de nuestro sistema de numeración decimal, la notación científica, el uso de la calculadora científica y propiedades de las operaciones.

El proceso de matematización, según Freudenthal, pasa por distintos niveles de comprensión matemática, vincu-

lados al uso de distintas estrategias, modelos y lenguajes. Cuando los alumnos se ven enfrentados a problemas accesibles en contextos realistas, pueden resolver de acuerdo a sus posibilidades, mostrando su nivel de comprensión. En esta clase, algunos alumnos necesitaron acomodar los muñecos y medir con la regla mientras que otros trabajaron con su razonamiento proporcional de forma numérica directamente.

Para la puesta en común final y mientras terminaban los últimos cálculos, pasé en afiches algunas resoluciones para presentar a toda la clase (ver Figura 6).

En las resoluciones **A**, **C** y **F** se puede apreciar que algunos equipos decidieron trabajar con la cantidad de playmobiles y averiguar cuántos kilómetros y vueltas a la Tierra ocuparían los 21.000 millones, y llegaron a que ocuparían 15,825 km; 18 o más de  $2\frac{1}{2}$  vueltas.

Esto dio oportunidad de discutir por qué había diferencias en los resultados y la relación con la posición y medida usada por playmobil (3; 4 o 3,5 cm respectivamente). También resultó interesante la respuesta dada en **F**. Si bien no determinaron la cantidad de vueltas que dan todos los muñecos, dijeron no necesitarlo porque si una vuelta corresponde a 40.000 km, teniendo 735.000 km es evidente que son más de 2 vueltas, ¡son casi 20! En este caso se ve además el trabajo con una tabla de razones donde el uso de una estrategia inicial (duplicar sucesivamente la cantidad de playmobiles y de centímetros que ocupan) quedó inconclusa y se reemplazó por el uso de la unidad (los kilómetros que cubre 1 playmobil) para hallar la distancia que cubrirían los 21.000 millones.

Estas representaciones emergentes de la propia actividad matematizadora de los alumnos, sirven para organizar, trabajar y reflexionar sobre las ideas, conceptos y relaciones matemáticas que encierran. Los modelos, en tanto herramientas didácticas, sostienen o apuntalan el pasaje de un nivel a otro mayor de matematización, a la vez que permiten volver a otros inferiores en caso de ser necesario. Funcionan como "puentes" entre los conocimientos informales de los alumnos y los formales de la matemática. A su vez, "la reflexión sobre la propia actividad tiene un papel decisivo para el cambio de nivel" (Bressan et ál., 2016, p. 8).



Figura 4

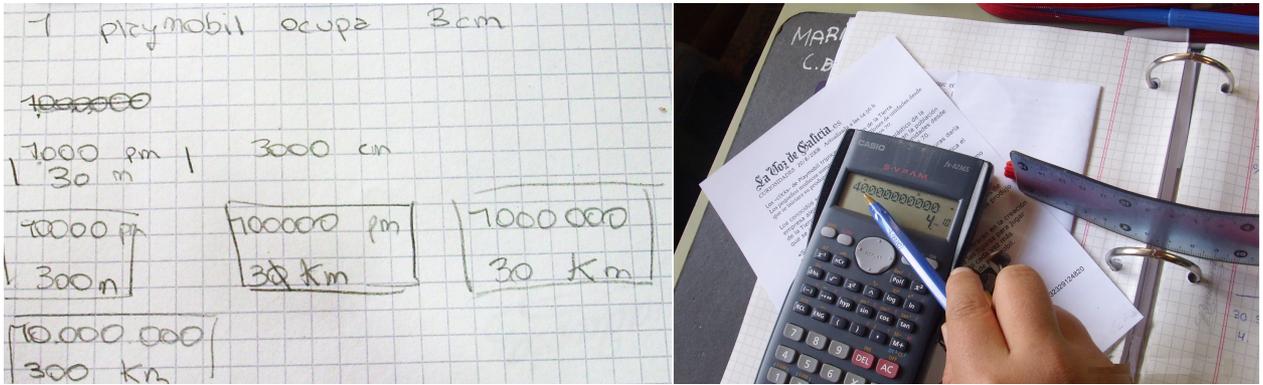


Figura 5

La tabla de razones utilizada por el grupo F, es una herramienta para encontrar razones equivalentes haciendo uso de distintas operaciones y propiedades, a la vez que sirve de soporte para el cálculo escrito y desarrolla estrategias de cálculo mental y estimativo. También constituye un modelo que sirve para representar situaciones de proporcionalidad y operar con números racionales (aunque se utiliza inicialmente en los grados más bajos para abordar la multiplicación y la división).

La resolución B, incompleta e incorrecta, sirvió para clarificar cuestiones vinculadas a la equivalencia entre cm y km y el cálculo con números muy grandes (al trabajar en centímetros) y muy pequeños (al trabajar con kilómetros).

Los autores de las producciones D y E averiguaron cuántos playmobiles darían las 2 ½ vueltas a la Tierra. Al com-

parar ese resultado (2500 y 2284 millones en cada caso) con los 21.100 millones de muñequitos, confirmamos que algo no cerraba...: "¡es cualquiera esa noticia!", "¡es mentira lo que dice!", "¿por qué pusieron 2 ½ vueltas si en realidad dan muchas más?!, ¡no les conviene poner menos!", "¡no saben hacer cuentas!".

Las ideas del primer afiche fueron nuevamente objeto de discusión, esta vez para evaluar si resultaron útiles o no, si alguna no fue utilizada, por qué y anotar ideas nuevas que no fueron pensadas en un primer momento ("averiguar los play necesarios para cubrir 1 vuelta y de ahí los que se necesitan para 2 ½ vueltas").

Este "proceso en el que los alumnos reinventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas, en interacción con sus pares



Figura 6

y bajo la guía del docente” (Bressan et ál., 2016, p. 5) fue denominado por Freudenthal (1991) *reinvención guiada*. Las interacciones, tanto entre alumnos como entre el docente y los alumnos, son centrales para maximizar oportunidades de producción, intercambio y apropiación de ideas matemáticas y provocar un cambio de nivel. Este punto de vista considera a la diversidad un valor que enriquece la interacción. Las distintas producciones de los alumnos dan cuenta en este sentido, de cómo todos pudieron acceder de alguna forma a trabajar con este problema y avanzar en el tratamiento matemático de los contenidos implicados.

### ¿QUÉ SACARON LOS ALUMNOS EN LIMPIO DE ESTE PROBLEMA?

Dado que no salían del asombro por la incoherencia entre lo expresado en la noticia sobre la cantidad de *playmobiles* y la cantidad de vueltas a la Tierra, les propuse escribir de forma individual, una conclusión de este problema. Algunas de las más interesantes:

–Nosotros medimos y comprobando los datos de la noticia y concluimos que se pueden dar más de dos vueltas y media. Esto significa que las publicidades mienten, además no se sabe con exactitud la cantidad exacta de *playmobiles*.

–Hay una cantidad impresionante de *playmobiles* que pueden dar mucho más que dos vueltas y media al mundo, de cualquier manera que lo pongas y que las publicidades no siempre dicen la verdad.

–Los *playmobiles* dan aproximadamente 18 vueltas alrededor de la Tierra y no  $2\frac{1}{2}$ . ¿Será verdad lo que dicen? No, la fábrica mintió al respecto. Y nunca habrá con exactitud el número de *playmobiles* porque todos los días se van fabricando.

### UNA REFLEXIÓN SOBRE LA EXPERIENCIA

Trabajar con esta noticia sirvió para abordar muchas cuestiones de la Matemática. Por un lado, y desde lo conceptual, proveyó oportunidad para operar con números grandes y con muchos ceros, revisar en qué se basan las reglas de tachar los ceros de ambos números al dividir, afianzar equivalencias entre unidades convencionales de longitud, analizar y reflexionar sobre la estimación en el cálculo y el uso de la calculadora, etcétera. En un sentido más amplio, permitió fortalecer procesos vinculados a la resolución de problemas, desde definir cuál es el problema o pregunta a responder; proponer y evaluar distintas ideas o estrategias

para encontrar una respuesta hasta juzgar si un resultado es razonable o no.

Desde la dimensión social que toda práctica educativa posee, este problema confirma que la Matemática, lejos de ser meramente instrumental, tiene la potencialidad de servir como herramienta para interpretar críticamente la realidad hoy manejada por los medios y tomar posición respecto de ella.

También rescato de esta experiencia, que la participación activa y comprometida de los alumnos depende de que los docentes ofrezcamos propuestas interesantes y verdaderamente desafiantes y confiemos en las posibilidades de todos de hacer Matemática.

Pensar y escribir este texto, me llevó también a confirmar una vez más, por qué la EMR al menos en desde lo personal, resulta una herramienta teórica útil, tanto para diseñar y organizar la práctica a priori y entenderla a posteriori.

*Después de este trabajo, resuenan las palabras de Freudenthal, quien hace un cuarto de siglo pensaba que “la imagen de la matemática se enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la sociedad” (Freudenthal, 1991, p. 132). Y entonces vuelvo a preguntarme qué matemática queremos enseñar, aunque primero tendríamos que recapacitar sobre qué mundo queremos tener...*

#### BIBLIOGRAFÍA

- Bressan, A., Pérez, S. y Zolkower, B. (2006). “Las imágenes y las preguntas en la escuela”. *Revista Novedades Educativas*. Año 18, N° 182.
- Bressan, A., Gallego, M. F., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases teóricas* [en línea]. En [www.gpdmatematica.org.ar](http://www.gpdmatematica.org.ar), “Publicaciones”.
- Brousseau, G. (1986). “Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques”. En Brun, J. (1996). *Didactique des mathématiques*. Lausanne: Delachaux et Niestlé, pp. 45-143.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas*. Universidad de Barcelona: ICE-Horsori, pp. 61-63, 77-81.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer.



### COLUMNA DE OPINIÓN

- » Escuela, formación ciudadana y vialidad. *Diego Bibian*

### CLAVES PARA ENSEÑAR MATEMÁTICA

- » Cinco tesis sobre la evaluación en el aula de Matemática. *Omar Malet*
- » Funcionalidad de los algoritmos... *Ricardo Cantoral y Daniela Reyes-Gasperini*
- » Enseñar estadística a partir del contexto. *Rubén Evans, Marcelo Ponce y Adriana Rabino*
- » Números muy grandes y muñequitos muy pequeños... ¡unidos por la Matemática! *Silvia Pérez*
- » La enseñanza de la geometría en el nivel inicial y en el nivel primario. *Alicia Giarrizzo*

### ESCUELA Y COMUNIDAD

- » ¿Cómo se crean y recrean prácticas escolares...? *Gabriela Scarfó y Lourdes Arnoten*
- » La educación domiciliaria y hospitalaria hoy. *Selva Caffaratti*
- » Territorios en juego: La Barriada. *Pablo Migliorata*
- » Dispositivos orientados a la inclusión social y educativa. *Marcelo Zanelli y Paula Medela*

### FORMACIÓN DOCENTE

- » Estrategias para la enseñanza de límite funcional. *Carolina Pandolfi*

### NO PUEDO NEGARLE MI VOZ

- » Una conversación con Mauricio Kartún. Enseñanza, trama, deseo. *Ángela Menchón y Daniel Brailovsky*

### MISCELÁNEAS

- » Una plataforma *online* para acercar a los padres a la escuela
- » En la red...
- » Agenda