UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Filosofía y Humanidades

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Las transformaciones semióticas en los procesos de definición de objetos matemáticos

Mabel Gladys Panizza

Córdoba

2015

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Filosofía y Humanidades

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Las transformaciones semióticas en los procesos de definición de objetos matemáticos

Mabel Gladys Panizza

Director: Dr. Raymond Duval
Co- director: Dr. Humberto Alagia

Miembros del Tribunal Evaluador:

Dra. Dilma Fregona

Dr.Diego Letzen

Dra. Patricia Sadovsky

Tesis de Doctorado elaborada en el marco del Programa de Doctorados Personalizados de la Escuela en Ciencias de la Educación de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba, para obtener el título de Doctora en Ciencias de la Educación.

Córdoba

2015

Agradecimientos

A Raymond Duval, por confiar en mi capacidad de autonomía, por apreciar mis ideas y haberlas puesto siempre en ruta hacia nuevos horizontes. Por su inmensa generosidad intelectual, su disponibilidad, su paciencia, su espera respetuosa. Por el placer de extensas jornadas de discusión. Por su esfuerzo por comprender el castellano, y más aún, por comprender *mi* francés, el escrito y el hablado. Por su hospitalidad y su amistad.

A Humberto Alagia, por haber aceptado co-dirigir esta tesis. Por su dedicación para entrar en mis ideas, sus lecturas atentas, su calidez y disposición para escucharme en cada oportunidad. Por su contribución como matemático al desarrollo y a la difusión de la investigación en Didáctica de la Matemática en Argentina.

A Diego Letzen, Dilma Fregona y Patricia Sadovsky, por sus lecturas comprometidas de la tesis y por la interacción que sostuvimos durante la defensa.

A mi marido, Jean-Philippe Drouhard, por sus críticas audaces, constructivas y sutiles. Por las horas vividas intercambiando ideas. Por su permanencia, su confianza en mí, su amor… ¡y la tinta violeta en distintas versiones de la tesis!

A Estela Miranda y Adela Coria, por asumir la dirección de un doctorado con proyección a diferentes áreas, con todo el desafío que implica sostener tal emprendimiento; un agradecimiento especial por dar lugar a doctorados en didácticas específicas. Gracias por su buena disposición y cálida atención a los doctorandos.

Al equipo del Programa de Doctorado Personalizado de la Facultad de Filosofía y Humanidades de la Universidad Nacional de Córdoba. Muy especialmente, a Cristina Esteley, Dilma Fregona y Mónica Villareal, por su participación como especialistas en didáctica de la matemática.

A Patricia Sadovsky y Carmen Sessa, por los esfuerzos compartidos y sostenidos para fomentar la investigación y la formación en Didáctica de la Matemática en nuestro país.

A Guillermina Meana, por nuestras discusiones y por haber realizado, como investigadora y como docente, observaciones en el nivel medio.

A todos los investigadores con los que trabajé en el marco de los proyectos UBACYT, por ayudarme a profundizar mis ideas y concebir líneas de investigación; un agradecimiento especial a Abraham Arcavi, por integrarse a mi equipo durante su semestre sabático.

A mis compañeros del grupo de investigación CESAME (con sede en Niza), por las largas discusiones desde distintos marcos teóricos, las críticas ácidas y los años compartiendo ideales.

A los compañeros de doctorado, con los que tuve el placer de compartir y proyectar ideas.

A los docentes del CBC de la UBA, por haberme abierto las puertas de sus aulas para realizar la investigación. A los alumnos, por haberme permitido escucharlos para intentar comprender cómo piensan.

A mis padres, por haber fomentado mi interés por el conocimiento y brindarme las condiciones para que lo adquiriera.

A mis hijos, Laura y Aníbal, por apoyarme y por estar.

A todos aquellos que alguna vez me ayudaron a pensar.

A Jean-Philippe

Tabla de contenido

1 Determinación del objeto de investigación

1.1 Introducción

Los problemas de aprendizaje ligados a la definición de objetos matemáticos son encarados por la enseñanza o bien comenzando por actividades que se supone deben conducir al descubrimiento de lo que se quiere definir, o bien a partir de definiciones enunciadas explícitamente. Ambas aproximaciones muestran debilidades y limitaciones, por razones intrínsecas a la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en cada caso.

Las aproximaciones a partir de actividades afrontan una primera dificultad ligada a la naturaleza de los objetos matemáticos, que limita el modo de acceso a los mismos. En estas actividades, cada objeto « individual »[1] es presentado en tanto representante de una clase de objetos (la que se intenta definir). Asimismo, cada uno de ellos es presentado a través de una representación semiótica particular (Duval 1993, 1995), la que hace explicitas (sólo) algunas de las propiedades del mismo. Dos niveles de restricción en la generalidad operan entonces sobre las posibilidades de inferir las propiedades de la “clase” que se intenta definir: el de los « individuos» y el de sus representaciones posibles (en diferentes registros semióticos). Las operaciones de observación, identificación de rasgos característicos, descripción de estos rasgos, clasificación y denominación se deben realizar a partir de estas representaciones particulares.

Difícilmente entonces estas observaciones estén eximidas de la marca de lo particular; en consecuencia, las regularidades encontradas fácilmente quedan atrapadas en los rasgos típicos de los objetos individuales observados y los de sus representaciones particulares. La experiencia de los alumnos con el objeto matemático a definir se ve limitada por un lado por los datos provistos por la enseñanza y por otro lado por los pocos ejemplos que ellos mismos pueden imaginar de los objetos

[1] Utilizamos la expresión «objeto individual» para designar una instancia particular del objeto matemático de referencia

matemáticos conocidos con anterioridad y sobre los cuales ha de apoyarse la nueva definición. Por estas razones, y por las capacidades de los alumnos ligadas al reconocimiento, observación, descripción y denominación de objetos, las definiciones que realizan de los objetos matemáticos distan mucho de las definiciones pertinentes desde el punto de vista matemático.

Por otra parte, las aproximaciones a partir de definiciones enunciadas explícitamente requieren la capacidad de decidir cuáles son los objetos que pertenecen a la clase definida por un enunciado y cuáles son los que no pertenecen. Esta capacidad supone a su vez concebir en su generalidad los posibles objetos de referencia de los enunciados, y someterlos al criterio lógico de condiciones necesarias y suficientes.

Ahora bien, el problema didáctico de la definición no se limita al de la caracterización adecuada de conjuntos de objetos mediante propiedades (definiciones por *comprensión*) y la identificación de la clase de objetos definida por un enunciado (su *extensión)*. Dicho de otra manera, el problema didáctico de la definición no finaliza con el logro de la capacidad de adecuación entre la *comprensión* y la *extensión* de un enunciado (la definición), abordado en una dirección o la contraria según la aproximación educativa adoptada. Otro aspecto importante es el de la capacidad de *utilizar* una definición en distintos procesos de pensamiento. Esta capacidad puede ser pensada en términos de otras dos intrínsecamente relacionadas entre sí (porque se suponen y se nutren una a la otra):

- la capacidad de reconocer que la definición *puede* ser utilizada, es decir puede resultar operativa; y

- la capacidad de *transformar* el *definiens*[2] en otros enunciados. Esta capacidad es necesaria para comprender el significado del concepto definido, para utilizar la definición en procesos de conjetura y de prueba, entre otros procesos de pensamiento.

2 En una definición se distinguen dos aspectos: el *definiendum* – expresión que se quiere definir -, y el *definiens* – expresión por medio de la cual se define el *definiendum*

1.2 Estudio didáctico de la definición

¿Qué significa realizar un estudio didáctico de la definición matemática? Muchos autores consideran importante analizar y establecer los criterios que rigen una *buena* definición matemática, a la vez que consideran implícitamente un significado único y compartido cuando se trata de la definición considerada desde el *punto de vista de la enseñanza.*

Sin embargo, la noción de definición no requiere precisión desde el punto de vista matemático sino desde el punto de vista didáctico, donde la noción es equívoca porque adopta formas diferentes según el nivel educativo y el dominio de conocimiento. Como veremos, se requiere profundización de su significado en cada contexto particular. ¿Cuáles son esas diferencias?

1.2.1 Un análisis en términos de exigencias para el funcionamiento didáctico

Entre las diferencias posibles, destacamos la necesidad o no de formular una definición para poder trabajar en un dominio, la posibilidad de formulación en lenguaje natural o la necesidad de recurrir al lenguaje mixto -natural o simbólico- (Laborde, 1992); el papel y características de la cuantificación (implícita o explícita; simple o doble); el campo posible de variación de ejemplos y contraejemplos (amplio/restringido, numerable/no numerable); los registros semióticos habituales de representación, etc. Todas éstas son diferencias no de *naturaleza*; sino del *grado de exigencia* que plantean las definiciones para un buen funcionamiento según nivel educativo y el dominio de conocimiento.

A fin de sostener nuestro análisis mostramos a continuación cómo juegan estos aspectos en dos casos significativamente diferentes del tratamiento de la definición en la enseñanza. Analizaremos a manera de ejemplos el trabajo de Balacheff referido al papel de la definición en procesos de conjetura y de prueba en geometría elemental y el modelo de Dubinsky sobre el aprendizaje de la cuantificación, especialmente en lo que se refiere a la negación de enunciados en matemática superior y su relación con las definiciones en ese nivel.

1.2.1.1 El ejemplo de Balacheff

Balacheff (2000), mediante un dispositivo experimental de comunicación entre dos alumnos, estudia los procedimientos utilizados al establecer una fórmula para la enumeración de las diagonales de un polígono y examina el *papel* de la definición tanto en el establecimiento de la conjetura, como en su eventual prueba. Presenta dos dispositivos con la misma tarea de descubrir y dar una fórmula pero con modalidades diferentes de presentación de las definiciones: en el primer dispositivo no se da ninguna definición, en el segundo se administran desde el comienzo las definiciones de diagonal y de polígono.

A grandes rasgos, en lo que concierne a las definiciones, Balacheff se ubica en este trabajo en un modelo cercano al de Lakatos (1976), en el sentido de pensar a las refutaciones como elementos de reconstrucción de las definiciones de los conceptos involucrados (de polígono y de diagonal), especialmente en la primera experiencia en la cual no se administran las definiciones. El trabajo empírico muestra que para algunos alumnos es necesario “regresar a la definición” porque necesitan el significado de una palabra para resolver el problema; en esos casos, cuando los alumnos se preguntan qué es un polígono o una diagonal, la definición juega un papel importante en la resolución del problema. En la segunda experiencia busca observar qué rol cumplen en los procesos de elaboración de conjeturas y de prueba las definiciones cuando son administradas desde el comienzo. Según Balacheff -en el marco de esta experiencia- el hecho de administrar una definición de los objetos en juego desde el comienzo no modifica sensiblemente los procesos de conjetura y de prueba.[3]

Es interesante aquí destacar la manera en que Balacheff precisa la noción de definición adoptada en su trabajo:

> Tomamos aquí la noción de definición en el sentido ingenuo, por oposición a una acepción formal en la que la definición es una abreviatura que permite un ahorro de palabras. Una definición será para nosotros aquí un discurso; esto es, un texto que busca aclarar y fijar el

3 A un mismo resultado llega Vinner (1991) en relación con la resolución de problemas en el nivel universitario, lo que expondremos en el próximo capítulo.

> significado de una palabra. Este punto de vista es coherente con aquello que aparece de manera inmediata en los comportamientos observados en el primer experimento: los estudiantes regresan a la definición porque quieren resolver el problema del significado de una palabra. Es también coherente con la función de la definición en los estudiantes de matemáticas que ha sido destacada por Vinner (1976). Para la mayoría de ellos, una definición tiene un valor lexical. Ella explica, con palabras, el significado de otras palabras. Finalmente, este punto de vista es coherente con el uso práctico que los matemáticos hacen de la definición. Ella permite que dos interlocutores logren comprenderse apropiadamente. Es decir, que hablen acerca de la misma cosa.

Esta frase muestra que en este nivel de escolaridad (13-14 años) y para este contenido geométrico elemental, según Balacheff es suficiente una definición intuitiva de los objetos en juego, la que puede ser expresada en lenguaje natural como "texto que busca aclarar y fijar el significado de una palabra".

Por otra parte, Balacheff analiza los libros de texto y encuentra que los mismos utilizan en diferentes proporciones el lenguaje simbólico y el lenguaje natural pero siendo claramente el lenguaje natural el dominante. Las representaciones gráficas de los polígonos se utilizan ya sea como ilustración de la definición o como elementos de su formulación o ambas.

Este ejemplo muestra que en geometría elemental se recurre al uso de definiciones desde el comienzo de la enseñanza, a la vez que se trata de definiciones más bien "intuitivas" formuladas principalmente en lenguaje natural. En matemática superior, donde se requieren definiciones formales expresadas en lenguaje simbólico o mixto mediante enunciados con simple o doble cuantificación, el problema de la definición en la enseñanza presenta características muy diferentes de las presentadas aquí por Balacheff para la geometría elemental. Esto nos autoriza a decir que no es posible hablar de la enseñanza de *la* definición.

1.2.1.2 El ejemplo de Dubinsky

Dubinsky (1988) aborda el problema de la enseñanza de la definición de conceptos avanzados, en el contexto más amplio del tratamiento de enunciados complejos cuantificados con varias variables.

El modelo relativo a los enunciados complejos -*descripción genética de la cuantificación*- describe la génesis, estructura y construcción del *esquema de la cuantificación*, encontrándose en la etapa final de esta génesis las condiciones para *actuar* sobre enunciados con varias variables y varios cuantificadores[4]. En el artículo, presenta, analiza y muestra evidencia empírica relativa al tratamiento de enunciados en lenguaje natural, en el sistema de las escrituras simbólicas y en lenguaje mixto (escrituras simbólicas y lenguaje natural) analizando las dificultades de los alumnos en las distintas etapas del proceso de construcción del *esquema.*

En este contexto, da un lugar especial a la *acción* de negación, que agrega su propia complejidad al tratamiento general de los enunciados con varias variables y varios cuantificadores. Relaciona la *negación* de enunciados con la *definición* de conceptos, en tanto según sus propias palabras la comprensión del significado de un concepto supone entender lo que *es* y lo que *no es*. En virtud de esta importancia reconocida por él y sostenida por nosotros, en el capítulo 2 presentaremos más ampliamente su teoría sobre los enunciados complejos y su trabajo sobre la *negación* de proposiciones (*acción* de negación sobre los *objetos* según su modelo acción-proceso-objeto) como problema ligado a la enseñanza de la definición.

Este trabajo muestra la complejidad de la enseñanza de la definición en términos de las exigencias ligadas a la estructura formal del enunciado. Lejos de agotar la complejidad del problema de la enseñanza de la definición invita a pensar en distintas dimensiones este problema didáctico.

---

[4] Los aspectos generales sobre la estructura y construcción de los esquemas en el área de la matemática presentados por Dubinsky en este trabajo forman parte actualmente de la APOS Theory (Asiala et al. 1996; Dubinsky 1996 y 2000).

1.2.2 Síntesis sobre las exigencias planteadas por la enseñanza de la definición según el dominio de conocimiento y el nivel de escolaridad

Los ejemplos anteriores muestran la pertinencia del análisis en términos de exigencias que estamos proponiendo. Tanto Balacheff como Dubinsky hablan del problema de la definición en la enseñanza pero con distinto *significado*, porque cada uno aborda un *objeto* diferente, las *exigencias* son diferentes, etc. Si la posibilidad de concebir *ejemplos* y *contraejemplos* en geometría elemental y en análisis o álgebra superior parece presentar dificultades similares, las dificultadas ligadas a la *formulación* de la definición se oponen diametralmente: en un extremo se encuentran definiciones "intuitivas" y en lenguaje natural relativas a los polígonos, y en el otro extremo los enunciados con simple y múltiple cuantificación y varias variables. En el medio se encuentran un conjunto de matices y diferencias relativas al dominio de conocimiento y el nivel de escolaridad.

De manera sintética mostramos a continuación los resultados de nuestro análisis sobre las exigencias planteadas por la enseñanza de la definición

1.2.2.1 El caso de enseñanza de la geometría elemental (primaria y secundaria)

El ejemplo de Balacheff parece ser representativo de lo que ocurre en general en la enseñanza de la geometría elemental (primaria y secundaria): se necesita desde el comienzo la formulación de definiciones, a la vez que –como ya dijimos- se trata de definiciones más bien "intuitivas" que requieren principalmente del lenguaje natural; el status de las letras para la designación de objetos se reduce a menudo al de nombre propio y los contraejemplos se presentan como dibujos en el registro figural, es decir en un solo registro de representación.

1.2.2.2 El caso de la aritmética y el álgebra elemental

En aritmética o álgebra elemental, en cambio, las definiciones pueden evitarse con el recurso a reglas que permiten el cálculo (numérico y algebraico) sobre ecuaciones e inecuaciones. Sin embargo, el tratamiento de estas expresiones simbólicas plantea dos problemas cognitivos mayores: 1) el de la cuantificación existencial y universal (que conlleva la distinción entre ecuaciones e identidades); 2) el hecho de que esa cuantificación es implícita al momento de iniciarse el tratamiento algebraico (Drouhard & Panizza, 2012).

Puede ocurrir -y de hecho ocurre a menudo- que el dominio de variaciones de ejemplos y contraejemplos sea infinito no numerable; estos ejemplos y contraejemplos suelen ser representados en diferentes sistemas semióticos que exigen no sólo la comprensión de las reglas de formación y tratamiento de cada uno, sino la articulación entre dichos sistemas.

El status de las letras para la designación de objetos es diverso; puede ser el de nombre propio, de constante, de incógnita, de variable, de parámetro.

Es interesante agregar que algunos estudios muestran a partir del análisis de libros de texto sobre las definiciones -más o menos explícitas-, que el concepto de ecuación adopta interpretaciones diferentes que parecen depender del nivel educativo (Meana, 2003, Atrorps, 2006). Esto indicaría que los autores de manuales escolares encuentran necesidad de presentar el objeto paramatemático (en la terminología de Chevallard) de ecuación de manera diferente según el nivel educativo.

1.2.2.3 El caso del álgebra o el análisis matemático de nivel superior

En álgebra o en análisis de nivel superior se requieren definiciones explícita y formalmente enunciadas que combinan el lenguaje simbólico y el verbal en la misma descripción; la cuantificación deviene necesariamente explícita y aparece rápidamente la necesidad de una doble cuantificación. El aporte de Dubinsky muestra la complejidad de comprensión de este tipo de enunciados. No tratamos aquí de comparar con la dificultad planteada por los enunciados con cuantificación implícita del álgebra elemental, sino simplemente mostrar que se trata de una complejidad diferente.

El dominio de variaciones de ejemplos y contraejemplos en estos dominios matemáticos en general es infinito no numerable y se plantea el problema cognitivo de la densidad y la completitud para la base cognitiva de datos necesaria para poder evaluar un enunciado.

1.2.3 Conclusiones

El hecho de que el estudio didáctico de la definición de un mismo contenido a lo largo de la escolaridad pueda plantear exigencias tan diferentes para un buen funcionamiento didáctico, hace que la palabra "definición" misma tenga diferentes significados desde el punto de vista de la enseñanza.

Por otro lado, -de una manera en parte simétrica de la anterior- contenidos tan distintos como el de los *desplazamientos sobre una grilla discreta* (Ouvrier-Buffet, 2006; ver capítulo 2) y el de la *continuidad de funciones* plantean problemas similares al estudio didáctico de la definición, en cuanto al requerimiento de la doble cuantificación se refiere, aunque puedan diferir sustancialmente en otros aspectos.

Estas diferencias y similitudes no son neutras a la hora de identificar a qué se refiere una investigación didáctica relativa a la definición matemática. Como veremos más adelante, estas apreciaciones son importantes para comprender el aporte de las diferentes teorías y desarrollos cognitivos y didácticos que se ocupan de la definición (ver capítulo 2) así como para ubicar el lugar del estudio que llevamos adelante en esta tesis.

Este análisis nos conduce a destacar las siguientes características según las cuales los trabajos didácticos sobre la definición se pueden distinguir, teniendo en cuenta los requisitos planteados por un correcto funcionamiento en un dominio y nivel de educación determinados. Para cada categoría mencionamos en el siguiente cuadro los trabajos de Balacheff y de Dubinsky presentados en este capítulo, ubicados según corresponda[5].

[5] Para la aplicación de la grilla en el caso de Dubinsky hemos tenido en cuenta aquí el tratamiento de los enunciados complejos cuantificados con varias variables, exceptuando las *acciones* sobre los mismos. El caso especial de la *acción* de negación es analizado en el capítulo 2.

Requisitos planteados	Valores posibles	Autores citados
Necesidad de recurrir a una definición explícita	sí	Balacheff
	no	Dubinsky
Registro de descripción de la definición	lengua natural	Balacheff; Dubinsky
	expresiones simbólicas	Dubinsky
	lenguaje mixto	Dubinsky
Presencia de cuantificación en el enunciado	Simple	Balacheff
	Doble (existencial o universal)	Dubinsky
Registro de representación de contraejemplos privilegiado	Lengua natural	Dubinsky
	Figural	Balacheff
	Numérico	
	Expresiones simbólicas	Dubinsky
	Gráfico; retículo	
Campo de variaciones de casos posible	Amplio	Balacheff; Dubinsky
	Restringido	

1.2.4 La definición como proceso de pensamiento transversal a los contenidos

A partir del análisis anterior, sostenemos que *distintos contenidos* pueden ser comparables desde el punto de vista de las *exigencias* planteadas para un buen funcionamiento didáctico de las definiciones en juego. Dicho de otra manera, postulamos que los *procesos de definición* pueden diferenciarse unos de otros por las *exigencias* planteadas al pensamiento, las que pueden ser *compartidas* por distintos contenidos[6].

Esto sugiere que muchos aspectos de la enseñanza de la definición pueden ser tratados de manera *transversal* a los contenidos, en el sentido de abordar su complejidad desde el punto de vista de las exigencias compartidas: ¿cuáles son los aspectos propios de las operaciones de observación? ¿cuáles son los aspectos peculiares de discriminación de unidades significantes de un enunciado que subyacen a la comprensión del mismo y a su transformación en otro enunciado equivalente pero que contenga nueva información?; etc.

La transversalidad es entendida por nosotros como la identificación y tratamiento didáctico de aspectos comunes a diferentes contenidos, así como otros aspectos de la definición son específicos de cada contenido y deben ser estudiados de esa manera. Es por ello que una tal perspectiva puede ser pensada como un aporte en complementariedad con los trabajos didácticos sobre la definición de conceptos específicos, en particular con el desarrollo de Situaciones Fundamentales -en el sentido de Brousseau-.

1.2.5 Actividades de Definición/Procesos espontáneos de definición

Otro criterio de interés que conduce a ubicar y distinguir los trabajos didácticos sobre la definición es el de identificar el lugar que otorgan a los contextos de emergencia de los procesos de definición.

En ese sentido, es importante destacar que gran parte de las investigaciones sobre la definición se ubican en lo que Ouvrier-Buffet (2012) denomina *Actividad de Definición*

[6] Nos resulta interesante hacer saber que Ouvriet-Buffet en un trabajo muy posterior a su tesis doctoral sobre la definición –presentada en 2006- se pregunta si es posible concebir procesos de definición transversales a los contenidos, y busca indicios de ello en los procesos de definición de los matemáticos como investigadores (Ouvriet-Buffet, 2012)

-siguiendo a Rasmussen et al. (2005)- y conciernen a las *actividades* y *prácticas* que buscan *promover* los procesos de construcción de las definiciones matemáticas.

Una parte importante de nuestro trabajo puede inscribirse dentro de esta línea, sobre todo porque pone el acento en los *procesos* más que en los *productos*[7], y en las *actividades* que favorecen dichos procesos. Más precisamente, en el Análisis Semiótico de Tareas Matemáticas (capítulo 5) buscamos identificar las *actividades* cognitivas requeridas por los *procesos* de definición -observación, identificación y descripción de rasgos relevantes, caracterización simbólica y denominación-, y establecer criterios sobre las actividades matemáticas que pueden favorecer su evolución.

Ahora bien, la denominación *Actividad de Definición* según la acepción establecida por estos autores no contempla un aspecto importante de los procesos de definición, relacionado con el hecho de que los alumnos «*definen*» espontáneamente, aunque la actividad no lo demande. En el siguiente apartado (1.3) discutiremos esta afirmación, sostenida por los antecedentes de esta tesis. Como veremos, los alumnos *espontáneamente* despliegan descripciones que pretenden caracterizar los objetos observados y que en consecuencia tienen para ellos valor de definiciones. Gran parte de esta tesis está destinada a estudiar estos procesos de «*definición espontánea*» y sus consecuencias sobre otros procesos de pensamiento (ver Estudio Empírico, capítulo 4).

Las *actividades de definición* -destinadas al propósito de promover los procesos de definición- dejan afuera esos procesos espontáneos de definición. Desde nuestra perspectiva, una entrada en la *definición matemática* requiere entre otras cosas reconocer ese fenómeno y hacer progresar a los alumnos, en el sentido de que sus *descripciones* mediante propiedades se adecuen a los objetos que buscan caracterizar y de que dispongan de mecanismos de control sobre esas adecuaciones. Esta capacidad concierne directamente a la correspondencia entre la *comprensión* y la *extensión* de un enunciado, en particular de una definición.

---

[7] Rasmussen et al. enfatizan el aspecto proceso al hablar del Advan*cing* Mathematical Thinking por oposición a la Advan*ced* Mathematical Thinking -caracterización realizada por Tall (1994) para dar cuenta del salto entre el pensamiento matemático de la escuela secundaria y el universitario-

1.3 La problemática de investigación y su relación con los antecedentes de esta tesis

En una investigación anterior a esta tesis (Panizza (2001, 2005, 2006), nos propusimos producir conocimiento sobre las condiciones de nacimiento y desarrollo de las estrategias propias del razonamiento matemático en álgebra. El estudio nos condujo a distinguir las generalizaciones que hacen los alumnos cuando la tarea lo demanda explícitamente, de las generalizaciones que hacen aunque la tarea no lo demande, a las que llamamos «generalizaciones espontáneas». Los alumnos no generalizan solamente frente a « tareas » de generalización, sino que muchas de las generalizaciones que realizan se producen en otros contextos. Encaramos entonces un estudio a fin de identificar los contextos de emergencia de estas «generalizaciones espontáneas» y establecer criterios para analizarlos, y establecimos una **tipología**[8]. Consideramos también que era particularmente importante tratar de precisar cómo *se produce* el proceso mismo de generalización espontánea y cómo y por qué los alumnos *no encuentran necesario* justificar los enunciados obtenidos mediante esos procesos.

Los resultados nos llevaron a reducir o matizar lo que se considera habitualmente como « problemas de razonamiento », y a hacer hipótesis sobre otros fenómenos que interfieren en la capacidad de razonar de los alumnos y que están ligados principalmente a: a) su (débil) experiencia con el campo de objetos de referencia de los enunciados; y b) las características de sus procesos descriptivos.

En relación con el primer punto, en la medida en que los objetos que son familiares para los alumnos son generalmente muy pocos, no suelen ser representativos del campo de instanciaciones posibles del dominio de referencia de los enunciados. A menudo, en consecuencia, las instanciaciones que analizan (de los enunciados) poseen un carácter "típico" o bien del objeto individual o bien de su representación; el mecanismo de generalización los conduce a darle carácter general a los rasgos expresados por la

[8] De acuerdo con su origen (para un sujeto particular en una situación particular), una «generalización espontánea» puede ser de naturaleza conceptual, lógica, o semiótica (ver 4.3.1).

particularidad de los *objetos* analizados y/o la particularidad de sus *representaciones*. Este fenómeno general se acentúa en la medida en que los ejemplos provistos por la enseñanza es limitada.

En relación con el segundo punto -los *procesos descriptivos* de los alumnos-, encontramos que: a) los mismos se apoyan en asociaciones lingüísticas *locales* de sus observaciones; y b) las descripciones simbólicas o en lenguaje natural de las propiedades de los objetos observados en general no se adecuan –por exceso o por defecto – a los objetos que intentan describir (caracterizar).

Estos procesos de observación y descripción modulan las « definiciones espontáneas por *comprensión*» que realizan los alumnos a partir de sus observaciones, las que consisten en *agrupar* los objetos observados bajo una misma *denominación* y mediante *propiedades* que *no* caracterizan el objeto matemático que se intenta definir, en tanto no capturan los rasgos necesarios y suficientes.

Estas « definiciones» adoptan las características de las definiciones *naturales*, muy especialmente la *definición característica* (Duval, 1995; Panizza 2001, 2006, 2008) -definición basada en rasgos prototípicos ("*un pájaro es un animal que vuela*")- que sirve para adaptarse al mundo natural porque permite un reconocimiento rápido de los objetos[9]. Las categorías así organizadas poseen un elemento central y una periferia, y la posibilidad de reconocer un individuo como perteneciente a una *categoría* se realiza en función del grado de similitud con el prototipo **(**Tversky & Kahneman, 1974; Rosch, 1978; Kleiber, 1990).

Ahora bien, la categorización y la definición en matemática requieren la consideración analítica de propiedades, y suponen la identificación de rasgos *característicos* (y no sólo *prototípicos*). Suponen también la capacidad de concebir virtualmente los *posibles* objetos individuales de referencia de los enunciados. En la medida en que los objetos matemáticos son accesibles sólo a través de sus representaciones (Duval, ibid.) la identificación de los rasgos característicos de un

[9] En el Estudio Empírico (Capítulo 4) analizamos diversos efectos de estas "definiciones" sobre los razonamientos de los alumnos en matemática

objeto requiere que se pueda acceder, interpretar y poner en relación el contenido informativo de las *diferentes representaciones.* Este acceso es posible a su vez si las observaciones de estas representaciones no son basadas en *asociaciones locales* sino en la identificación de *categorías semánticas,* y si es posible identificar el objeto en sus *distintas representaciones* a pesar de las diferencias aparentes. Finalmente, la definición en matemática requiere no sólo la capacidad de *identificación* sino también la de *formulación* de propiedades necesarias y suficientes mediante un enunciado (el *definiens*); dicho de otro modo, requiere la capacidad de adecuación de las descripciones a los objetos que se intenta caracterizar.

El desfasaje entre los procesos «espontáneos» de definición de los alumnos y las modalidades de definición pertinentes desde el punto de vista matemático, nos condujo a interesarnos en el problema de la definición, **objeto de esta tesis**. Sostenemos que los modos de definir *espontáneos* deben ser tenidos en cuenta desde el punto de vista didáctico, para integrarlos o para provocar una ruptura -según corresponda[10]- para una entrada en la definición pertinente desde el punto de vista matemático. Esto significa identificar condiciones que permitan superar el estadio de las « generalizaciones espontáneas», e identificar variables didácticas que favorezcan la puesta en juego de las operaciones constitutivas de la definición de objetos.

El proceso en su totalidad nos hizo tomar conciencia de la importancia de la semosis tanto en cuanto al rol que cumple en los procesos «espontáneos» de definición, como en la posibilidad de un tratamiento didáctico para una entrada en la definición matemática.

En relación con los procesos «espontáneos», destacamos que el proceso nos condujo especialmente a estudiar el rol de la tipicidad de las *representaciones* en la constitución de clases de objetos y en la determinación de la propiedad característica, así como de los problemas que se originan en las definiciones basadas en caracteres típicos al ser utilizadas en otros procesos de pensamiento (ver capítulo 4).

---

[10] Por ejemplo, en el capítulo 2 analizamos hipótesis de diversos autores (incluidos nosotros) sobre el valor constitutivo o no de las figuras y escrituras numéricas y algebraicas prototípicas en la definición de los objetos

En relación con la posibilidad de un tratamiento didáctico para una entrada en la definición matemática, esta investigación anterior nos condujo a interesarnos especialmente en el trabajo que debe conducir a la formulación de un enunciado que pueda ser considerado como definición y al desarrollo de elementos de control sobre la pertinencia de los enunciados producidos. En este contexto, jerarquizamos la necesidad de identificar variables didácticas que favorezcan la puesta en juego de las operaciones de reconocimiento de objetos, observación, descripción verbal y simbólica, y denominación (ver capítulo 5).

Todos estos aspectos ligados a la semiosis serán reformulados en el apartado siguiente (ver 1.4.3) una vez establecidos los conceptos básicos de la teoría de Duval que justifican la elección de esta teoría para el desarrollo de la tesis. Avanzamos aquí que, como principio general, nos propusimos considerar los problemas semióticos *solamente* desde el punto de vista de su capacidad para poner a la luz aspectos del funcionamiento cognitivo requeridos por el aprendizaje.

Adoptamos una **perspectiva transversal** tanto en cuanto al análisis de procesos espontáneos como al diseño de actividades, y según los criterios establecidos en 1.2.4. En relación con los procesos espontáneos de definición, esto significa buscar cómo se manifiestan las particularidades de las operaciones de reconocimiento, observación, descripción verbal y simbólica, y denominación (definición) de objetos en *diferentes* áreas de conocimiento. En relación con el tratamiento didáctico, significa que buscamos identificar las tareas que promueven la puesta en juego de las operaciones que subtienden los procesos de definición cuya complejidad es compartida por diferentes contenidos matemáticos.

1.4 La problemática de investigación en relación con el sustento teórico y conceptual

La teoría de los Registros Semióticos de Raymond Duval será presentada y analizada en profundidad en el capítulo 3. Presentamos aquí, solamente y a grandes rasgos, los conceptos y presupuestos que justifican la elección de esta teoría como marco de referencia principal de esta tesis[11] y a los efectos de dar un nivel mayor de especificación al problema de investigación y a los aspectos metodológicos a la luz de la teoría (ver 1.4.3).

1.4.1 Primera aproximación a la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval

Duval postula en primer lugar la importancia de las relaciones entre semiosis y noesis. Entendiendo por semiosis «la aprehensión o la producción de una representación semiótica» y por noesis «los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia», establece que « la noesis es inseparable de la semiosis». En lo que concierne al aspecto « no hay noesis sin semiosis» postula que la semiosis determina las condiciones de posibilidad y ejercicio de la noesis.

En primer lugar, en el área de la matemática, la hipótesis de que « no hay noesis sin semiosis» es fundamental en la medida en que no hay acceso directo a los objetos matemáticos, y la experiencia con los mismos es siempre mediada por actividades semióticas. Esta teoría aborda específicamente el problema de la *representación* en relación con la adquisición del conocimiento, definiendo el objeto matemático como el « invariante de todas sus representaciones » (Duval, 1995, 2009): las diferentes representaciones expresan *diferentes propiedades* de un objeto y de esta manera proveen distintas *descripciones* del mismo, las que en su totalidad hacen posible *identificarlo* (Ducrot & Todorov, 1972).

En segundo lugar, la teoría provee de elementos para profundizar en la identificación de *unidades significantes* de una representación, de manera de poder acceder al contenido (informativo) expresado en la misma.

Finalmente, provee de elementos conceptuales y metodológicos para comprender y favorecer la actividad cognitiva propia del razonamiento y el cálculo –es decir el

[11] Otros marcos teóricos tenidos en cuenta son presentados en el Capítulo 4- Estudio Empírico

progreso en el conocimiento-. Son las *transformaciones semióticas*[12] las que favorecen que sea posible acceder a un objeto matemático como “invariante de todas sus representaciones” y que los enunciados –en lengua natural o simbólica- se transformen unos en otros ofreciendo diferentes significados.

1.4.2 Nuestro análisis de la teoría de Duval en relación con la definición matemática

La naturaleza de los procesos de definición es diferente según se comience por actividades que se supone deben conducir al descubrimiento de lo que se quiere definir, o bien a partir de definiciones enunciadas explícitamente. Sin embargo, en ambos casos se necesita -por razones diferentes- la observación de objetos «individuales». En el primer caso con el fin de identificar los rasgos representativos del objeto a definir y para controlar la adecuación de las descripciones producidas como caracterizaciones (Lakatos, 1976; Balacheff, 1987; 2000); en el segundo, con el fin de decidir si una instancia dada es un ejemplo o contraejemplo del objeto definido.

Dado que los objetos matemáticos son accesibles sólo a través de sus representaciones, todos esos procesos requieren que se *reconozca* el objeto en cada una de sus representaciones y que se distingan dos objetos similares. Es sobre esta base que se podrá someter a juicio si una instancia dada es o no ejemplo de una definición formulada explícitamente. Es sobre esta base también que las operaciones de observación y de identificación de rasgos característicos realizados sobre datos significativos puede conducir a una definición a partir de ejemplos particulares. En ese sentido, es de importancia capital el aporte de esta teoría en relación con el estudio del funcionamiento cognitivo involucrado en el uso de representaciones que expresan *diferentes propiedades* de un mismo objeto; muy especialmente, al ofrecer elementos para identificar *unidades significantes* de una representación, la teoría da elementos para provocar una ruptura con las *observaciones* y *asociaciones locales* que modulan los *procedimientos espontáneos* identificados en esta tesis y en los trabajos que la preceden.

---

[12] Transformaciones de representaciones en otras representaciones -dentro del sistema o en otro sistema- que conservan todo el contenido de la representación inicial o bien sólo una parte del mismo

Ahora bien, estos procesos no son puros procesos mentales sino que intrínsecamente están ligados a procesos discursivos de *descripción* y *denominación*. El *reconocimiento* de un objeto representado en un cierto sistema supone la capacidad de *describirlo* en otro sistema, lo que se realiza mediante una *transformación semiótica* (entre los ejemplos más comunes, la descripción *verbal* de un objeto o propiedad: "ah! Se trata de un círculo!" – al observar su ecuación-).

Este juego de *transformaciones* es lo que hace posible superar las limitaciones de una representación particular e identificar las propiedades del objeto expresadas por las diferentes representaciones requerida por la definición matemática.

En términos más generales, las *transformaciones semióticas* hacen posible la exploración y observación de ejemplos representativos, en sus diferentes representaciones.

Cuando la definición es dada explícitamente mediante un enunciado que expresa la propiedad característica, las *transformaciones semióticas* (intra e inter sistemas) de las expresiones que componen el *definiens* permiten según nuestro análisis abordar otros problemas importantes. Esto se debe a que tanto el análisis del *contenido* del *definiens* como su *utilización* en otros procesos de pensamiento, requieren su transformación en otras expresiones tales que, conservando el objeto, modifiquen el *sentido*[13] (en el sentido de Frege) de la expresión. En esta tesis, este aspecto es tomado por nosotros para abordar los problemas de comprensión y funcionalidad de una definición (ver capítulo 5).

1.4.3 Problemática y aspectos metodológicos de la tesis a la luz de esta teoría

El análisis anterior muestra la pertinencia del marco teórico elegido para esta tesis, a la vez que nos conduce a formular la hipótesis de que las *representaciones semióticas* y sus *transformaciones* cumplen un rol esencial en los procesos de definición de objetos

[13] La noción de *sentido* de una expresión debida a Frege será definida en el capítulo 3

matemáticos. Esta hipótesis nos permite centrar nuestro problema de investigación en el estudio de ese rol, delimitando así un objeto tan complejo.

Es importante precisar que bajo las hipótesis, conceptos y métodos de esta teoría, nos ubicamos en una perspectiva semiótico/cognitiva, en el sentido de que nos interesa el aspecto semiótico en tanto y en cuanto el funcionamiento cognitivo requiere movilizar un registro semiótico o una articulación entre registros[14].

En relación con los procesos «espontáneos», esto se traduce en la búsqueda de relaciones entre las «definiciones» de los alumnos y sus operaciones de *observación* y *reconocimiento* de objetos, y sus operaciones *discursivas* de *descripción* y *denominación*. Más precisamente, buscamos identificar en esas operaciones la pertinencia o no de las *sustituciones* que realizan en los enunciados al hacer redescripciones de objetos «individuales», y la adecuación o no de sus descripciones a los objetos que intentan describir-. Buscamos también identificar algunos *efectos* de dichos *procesos* sobre la capacidad para encontrar ejemplos y contraejemplos –capacidad que subyace a la posibilidad de control de las definiciones producidas- (ver capítulo 4).

En el plano didáctico, mediante algunos análisis semióticos, identificamos actividades cognitivas intrínsecamente ligadas a la semiosis según dos dimensiones: la comprensión y operatividad de una definición enunciada explícitamente; y la observación de objetos matemáticos en registros semióticos particulares, y su descripción, concebida según este marco teórico como la conversión de una representación a otro registro semiótico. Analizamos también las características de los registros gráfico y de las escrituras algebraicas y la complejidad cognitiva de su articulación. Buscamos proveer fuentes de variación sistemática que favorezcan la puesta en juego de las operaciones de reconocimiento de objetos, observación, descripción verbal y simbólica, y denominación (ver capítulo 5).

---

[14] La noción de registro de representación semiótica será definida en el capítulo 3.

Ambos estudios se articulan en la tesis de diferentes maneras. Muy especialmente, destacamos que el primero mostró la necesidad de realizar el segundo, a fin de identificar *condiciones de ruptura* con las definiciones espontáneas de los alumnos.

2 Trabajos didácticos sobre los procesos de definición de objetos matemáticos

2.1 Introducción

En este capítulo presentamos diversos trabajos sobre la enseñanza de la definición, y los ponemos en relación con la problemática de nuestra tesis.

El criterio de selección ha sido el de privilegiar las investigaciones cognitivas y didácticas que abordan específicamente el problema de la definición matemática en el *nivel educativo* de pertinencia de nuestra tesis –ciclo superior de la escuela secundaria y primer año de la universidad- especialmente aquellas que directa o indirectamente estudian el rol de la tipicidad en los procesos de *reconocimiento* y *denominación* (*definición*) de objetos matemáticos. Nos hemos interesado en este punto especialmente en virtud de que en el Estudio Empírico encontramos gran evidencia de la tipicidad gobernando los procesos espontáneos de definición de objetos matemáticos de diferentes contenidos matemáticos y áreas de conocimiento. Creemos que de esta manera, abordando distintos aspectos de la complejidad del tema de investigación, es posible ubicar el lugar de nuestra tesis en el contexto de la literatura científica.

Al tratar de organizar los trabajos para una presentación adecuada que no significara una simple enumeración, establecimos un principio de inteligibilidad, de interpretación de los trabajos sobre la definición, que hemos presentado en el Capítulo 1. Muy especialmente, nos referimos a la posibilidad de analizar el aporte y comparar los distintos trabajos teniendo en cuenta las exigencias planteadas por el dominio de conocimiento y el nivel de escolaridad a los cuales se refieren las teorías o desarrollos. Para ello, más allá de presentar las ideas y conceptos generales de dichos trabajos, presentamos en cada caso alguna de las actividades propuestas por los autores, discutimos cómo es presentado y analizado por ellos en términos de su teoría, el tipo de actividad (situación fundamental, ejemplo/modelo), el contenido matemático en juego, y cómo se ubica la actividad en cada categoría de la grilla de análisis presentada en el capítulo 1.

A continuación presentamos y analizamos los diferentes trabajos. Avanzamos que en general, los autores:

- se centran principalmente en la relación entre las *definiciones* matemáticas y los *conceptos* que ellas definen, y en menor medida en la relación con los *objetos* que la definición determina (la *extensión*);

- muestran que la tipicidad juega un papel primero en el reconocimiento de objetos (geométricos); y

- no consideran las representaciones semióticas explícitamente como *elemento de análisis* de las observaciones y descripción de los fenómenos, aunque las mismas juegan un rol importante en las actividades suministradas a los sujetos en sus investigaciones

2.2 Exposición y análisis de los trabajos

2.2.1 Shlomo Vinner: Nociones de Imagen de un Concepto y Definición de un Concepto en Matemática. 1980

Los términos "*Imagen de un concepto* " y "*Definición de un concepto* " fueron concebidos por Vinner en 1980, definidos en una primera versión en Vinner & Hershkowitz (1980) y reformulados en Tall & Vinner (1981); comentarios teóricos posteriores pueden verse en Tall (1988). Estas nociones teóricas fueron concebidas a fin de dar cuenta de la complejidad cognoscitiva de la adquisición de conceptos y su articulación con la complejidad de comprensión de la *definición formal* de los mismos. La evidencia empírica mostraba respuestas aparentemente contradictorias o incoherentes al comparar la aplicación de una definición formal y/o de una noción intuitiva en diferentes contextos. Las nociones *Imagen de un concepto* y *Definición de un concepto* permitieron explicar muchas de estas contradicciones aparentes introduciendo otra noción, la de *Imagen Evocada* de un concepto. En términos muy generales, los autores explican que las producciones de los alumnos se basan en diferentes maneras de focalizar la atención sobre la *Imagen de un concepto* y sobre la *Definición* del mismo al resolver un problema, lo que hace que se activen diferentes aspectos del concepto (*Imagen Evocada*) ante diferentes tareas o ante una misma tarea en momentos diferentes.

En Tall & Vinner (1981) la *Imagen de un Concepto* es presentada como la estructura cognoscitiva total que se asocia al concepto, lo que incluye todas las imágenes mentales y características y procesos asociados. La *Definición de un concepto* es la **definición formal** del mismo, a la que consideran como una *puesta en palabras* [15] (dichas o escritas).

Según los autores, cuando se da la definición formal de un concepto, la *imagen de la definición* [16] suele ser muy débil (especialmente por el uso de cuantificadores) a la vez que la *imagen del concepto* puede ser muy fuerte. La coexistencia de una fuerte imagen del concepto con una débil imagen de la definición del concepto, especialmente cuando hay factores potenciales de conflicto entre ambas, permite también prever otros fenómenos. Muy especialmente, Vinner y Tall postulan que cuando ciertos *factores potenciales* de conflicto en la imagen del concepto están en conflicto con la *definición formal* del concepto, pueden impedir el aprendizaje de la teoría formal en caso de no llegar a convertirse en conflictos cognitivos *actuales.*

Finalmente, en los trabajos de Vinner encontramos también aspectos de interés en relación con la tipicidad como heurística para el *reconocimiento* de objetos matemáticos. Así por ejemplo en Vinner y Herskowitz (1983) los autores muestran que la *imagen de un concepto* en el área de geometría incluye en principio sólo figuras prototípicas y que el criterio de aceptación o rechazo de una figura es basado en la comparación con la figura prototípica. El aprendizaje consiste según los autores en el enriquecimiento progresivo de conjuntos de ejemplos representativos del concepto, los que favorecen un progresivo alejamiento de la figura prototípica.

En *The Role of definitions in the teaching and learning of mathematics* (Vinner, 1991) el autor aborda el rol de las definiciones en el aprendizaje y la enseñanza en el

---

15 El subrayado es nuestro

16 Nótese que se habla aquí de la imagen de la definición, y no de la imagen del concepto

nivel educativo de final del secundario y comienzo de la universidad desde tres puntos de vista: un punto de vista pedagógico, que se refiere al rol que la enseñanza le otorga a las definiciones; un punto de vista teórico, según el cual desarrolla un modelo de la formación de conceptos explicitando el rol que las definiciones deberían tener; y un punto de vista práctico, en el que desarrolla lo que según sus investigaciones los alumnos efectivamente hacen con la comprensión y el uso de las definiciones. En varios puntos de su análisis se apoya en la comparación con el uso de las definiciones en la construcción de conceptos de la vida diaria.

Desde un punto de vista pedagógico, observa que los modelos de enseñanza de la matemática en general la presentan como una teoría deductiva en la que a partir de las definiciones y axiomas y mediante reglas de inferencia se establecen los resultados. A partir del análisis de libros de texto y organizaciones de enseñanza afirma que las definiciones tienen un rol protagónico en la presentación de los temas. Señala que esto no refleja el proceso por el cual las matemáticas son creadas y tampoco el proceso por el cual los alumnos aprenden, pero sí el proceso por el cual *se supone* que lo hacen. Se propone entonces analizar cómo los alumnos realmente adquieren conceptos y contrastarlos con estas posturas que tienen en cuenta cómo se espera que los alumnos aprendan.

Al analizar lo que efectivamente ocurre con los alumnos, afirma en primer lugar que cuando ellos intentan *comprender* una definición, no analizan el significado de los términos técnicos *contenidos* en la misma, cuando la mayoría de las veces aun para definiciones muy elementales esa conducta es indispensable. En segundo lugar, establece que las definiciones en sí mismas no son consultadas o evocadas en el contexto de la resolución de una tarea (como la tradición pedagógica según el mismo Vinner parece suponer), sino que parecen prevalecer los hábitos de la vida diaria, según los cuales uno no necesita consultar las definiciones.

De esta manera, Vinner parece desmitificar la ilusión de la tradición pedagógica sobre el uso de las definiciones al a*cercar* el rol que las definiciones matemáticas efectivamente tienen para los alumnos al rol de las mismas en la vida diaria. Apoya sus afirmaciones sobre tres trabajos empíricos, en los que muestra y analiza "solamente la parte del sistema cognitivo que fue activado al trabajar en una tarea cognitiva dada", enfatizando que esto no significa una evaluación del sistema cognitivo en su totalidad (sino solamente la *parte activada* por la tarea). Metodológicamente hablando esta aclaración es importante porque según su teoría ante otra tarea o contexto la "imagen evocada" podría ser diferente.

Vinner presenta también un modelo de la adquisición de conceptos y el rol que las definiciones matemáticas deberían tener en esos procesos para un funcionamiento adecuado según los requerimientos de la matemática. Según este modelo, comprender es tener una *Imagen del Concepto* (y no simplemente conocer la definición y poder repetirla), lo que incluye entre otras cosas alguna memoria de procesos de construcción de los objetos de referencia del concepto. Asimismo, la definición no sólo debería tener un rol primero en la formación de conceptos sino también continuar teniendo un rol una vez que el concepto está formado. En particular, como elemento de control en la resolución de tareas.

Apunta a la necesidad de cambiar los hábitos de pensamiento pero sin avanzar sobre la posibilidad de lograrlo. Afirma que en general las tareas provistas por la enseñanza no alientan a los alumnos a dejar esos hábitos, en la medida en que la referencia a la sola *Imagen del Concepto* suele ser exitosa. Solamente problemas no rutinarios favorecerían esta actitud, pero en ese caso los alumnos lo consideran injusto, o improcedente[17]. En este punto el autor se muestra pesimista, porque "así, no hay aparentemente fuerza alguna que pueda cambiar los hábitos de pensamiento que son, en principio, inapropiados para contextos técnicos".

Las actividades que analiza en este trabajo para ilustrar estas ideas portan sobre la noción de función, la noción de tangente a una curva y la noción de límite de una sucesión. Tomaremos para nuestro análisis el trabajo sobre la noción de tangente a una curva.

---

17 "unfair" en el original

2.2.1.1 Actividad analizada por el autor: noción de tangente a una curva

A propósito de esta noción, Vinner presenta un conjunto de preguntas a alumnos que se supone que disponen de una cierta definición "semi-formal" de la noción de tangente a una curva por haber cursado una primera materia de cálculo. Sin embargo, la evidencia empírica muestra que la Imagen del Concepto contiene implícitamente y de manera no verbal ideas e imágenes compatibles con que "la tangente debe tocar la curva en un sólo punto y no debe atravesar la curva en ese punto". Ante el pedido de trazado de tangentes a diferentes tipos de curva, estos aspectos de la Imagen del Concepto se manifiestan por dibujos que *fuerzan* a la tangente a poseer esas características en casos en que no corresponde. Este ejemplo mostraría en particular responder al modelo de Vinner sobre el rol de las definiciones en la resolución de problemas: los alumnos no las consultarían sino que actuarían en términos de la Imagen (Evocada) del Concepto[18].

2.2.1.1.1 Aplicación de la grilla de análisis

Requisitos planteados	Valores posibles	Noción de tangente a una curva
Necesidad de recurrir a una definición explícita	sí	x
	no	
Registro de descripción de la definición	lengua natural	
	expresiones simbólicas	
	lenguaje mixto	x
Presencia de cuantificación en el enunciado	Simple	x
	Doble (existencial o universal)	
Registro de representación de contraejemplos privilegiado	Lengua natural	
	Figural	x
	Numérico	
	Expresiones simbólicas	
	Gráfico; retículo	
Campo de variaciones de casos posible	Amplio	x
	Restringido	

18 Observamos que como las formas funcionales de las curvas presentadas no son administradas a los alumnos, no cabría preguntarse por la utilización de la definición formal en términos de derivada. Sin embargo, sí cabría el análisis en términos de la tangente como límite de las rectas secantes que pasan por el punto de tangencia

2.2.1.2 Comentarios sobre la teoría de Vinner

Esta teoría es sumamente fructífera para interpretar muchas de las producciones de los alumnos aparentemente contradictorias cuando son consideradas desde el punto de vista estrictamente formal. Ofrece también elementos para comprender situaciones en las que los alumnos no entran en contradicción, en la medida en que postula que a fin de que los aspectos contradictorios sean percibidos, es necesario –aunque no suficiente- que sean evocados *simultáneamente.*

De gran interés para nuestra tesis son los resultados de Vinner acerca del funcionamiento *espontáneo* de los alumnos en relación con el uso de las definiciones, con muchos indicios de permanecer en un modo de definir propio de la vida cotidiana. En diferentes puntos de nuestra tesis mencionamos este fenómeno que hemos identificado a través de indicios diferentes de los presentados por Vinner, y hablamos de la necesidad de provocar una ruptura con estos modos de definir, para una entrada en la definición matemática. A diferencia de Vinner, que como él mismo dice no parece encontrar salida para abordar este fenómeno, en la tesis proponemos fuentes de variación relevantes para el trabajo didáctico orientado a tal fin.

Entre los límites de esta teoría, encontramos el carácter menor asignado a las representaciones semióticas en cuanto al análisis de las producciones. Las características de la *Imagen del concepto* que los investigadores atribuyen al objeto en juego a menudo no son características del mismo sino de alguna de sus representaciones (sería entonces pertinente llamarla *Imagen de una* ***representación semiótica*** *del concepto*).

Una segunda debilidad en el mismo sentido es la de presentar la Definición Formal de un concepto como una "puesta en palabras". Nuevamente, esta formulación parece ignorar que –como analizamos en el capítulo 1- la definición matemática se aleja progresivamente de la posibilidad de ser formulada en lenguaje natural para requerir para objetos complejos la utilización de lenguaje simbólico y cuantificación simple y doble y explícita, lo que plantea una exigencia mayor para las nociones abordadas por Vinner y Tall en el nivel. Cabe destacar que –como estos autores reconocen- la *Imagen de la definición* de un concepto suele ser muy débil especialmente por el uso de cuantificadores, aspecto que no queda cubierto con la definición formal concebida como una “puesta en palabras”.

Valoramos el aporte de Vinner y Herskowitz (1983) sobre la tipicidad y su rol en el aprendizaje. Sin embargo en esta tesis sostenemos que es necesario provocar una ruptura con lo prototípico y no una continuidad (como sugiere la expresión “alejamiento progresivo” utilizada por dichos autores)[19].

2.2.2 Ed Dubinsky: The Student’s Construction of Quantification. 1988

Como ya se esbozó en el capítulo 1, Dubinsky presenta en este trabajo un modelo constructivista del aprendizaje de la *cuantificación* como proceso de *abstracción reflexiva* en el sentido de Piaget. Para Dubinsky, el aprendizaje se produce por *interiorización* de acciones que se convierten en procesos, los que se *encapsulan* en objetos que pueden a su vez ser sometidos a nuevas acciones.

Los *objetos* y *procesos* del *esquema de la cuantificación* según Dubinsky son:

> (…) los objetos son proposiciones y una clase de procesos son interiorizaciones de operaciones lógicas sobre conjuntos de proposiciones. Los procesos son encapsulados para obtener proposiciones más complejas y de esta manera, el esquema es generalizado. Niveles mayores de cuantificación son construidos coordinando dos o más proposiciones cuantificadas (…)

La descripción de la construcción del esquema de la cuantificación –denominada por el autor *descripción genética de la cuantificación*- es dividida en tres estadios:

> (…) el esquema preliminar que concierne al conjunto de esquemas que el estudiante debe poseer de manera de comenzar a entender y trabajar con la cuantificación; segundo, el nivel simple de cuantificación en el cual un cuantificador existencial o universal es aplicado a un conjunto de proposiciones; y finalmente el esquema completo de la cuantificación en el

[19] (Fregona, 1995) abre una discusión similar en relación con las figuras planas como medio didáctico para la geometría elemental; para ello, contrasta la postura de distintos autores sobre la figuras típicas

cual dos o más cuantificaciones son coordinadas para formar los enunciados lógicos complejos de la matemática avanzada

El *esquema preliminar* comienza con proposiciones en sentido lógico, es decir enunciados que toman valor de verdad verdadero o falso, que se complejizan en dos dimensiones: por un lado con el uso de conectores lógicos que requieren la *coordinación* de las diferentes proposiciones; y por otro lado con el uso de variables que requieren la evaluación de la verdad o falsedad de la proposición en todo el dominio de definición. El alumno *interioriza* el proceso de iteración de la variable. La coordinación de estas dos extensiones marca el comienzo del estadio del *nivel simple de la cuantificación* (segundo estadio de la descripción genética de la cuantificación).

El *nivel simple de la cuantificación* concierne a enunciados en los cuales un cuantificador existencial o universal se aplica a un conjunto de funciones proposicionales. Para cada valor de la variable se obtienen proposiciones que se ligan mediante conectores lógicos produciendo una nueva proposición; la cuantificación (existencial o universal) aplicada a la iteración de la variable es *encapsulada* en un enunciado. Esto marca la transición al *segundo nivel.*

El *segundo nivel de la cuantificación* comienza con enunciados con doble cuantificación y dos variables, que se separan en dos enunciados cuantificados (uno interno, otro externo). La *coordinación* de estos dos objetos se produce fijando un valor de la variable externa, aplicando el nivel simple del esquema de la cuantificación a la cuantificación interna y *encapsulando* el resultado para obtener una proposición. Esta última es en realidad una función proposicional que depende de la variable externa fijada; en consecuencia, el proceso anterior se repite aplicando nuevamente el nivel simple del esquema de la cuantificación a la cuantificación externa, produciendo un nuevo enunciado como resultado de la *encapsulación.*

Evidentemente, este proceso puede ser iterado de manera de tratar enunciados con múltiples cuantificadores. Según Dubinsky, el alumno en este estadio "ha construido un *esquema* que puede manipular cuantificaciones anidadas hasta cualquier nivel".

2.2.2.1 Actividad analizada por el autor: la negación de enunciados

En el artículo, Dubinsky se centra en el estudio de dos clases de *acciones* sobre los *objetos* (proposiciones): la *negación* de una proposición y el *razonamiento* acerca de una proposición. Analizaremos aquí su aporte sobre la acción de *negación*, por su importancia con la definición en matemática identificada por el mismo autor y sostenida por nosotros: para el autor, la *negación de* enunciados es fundamental en relación con la *definición de conceptos*, en tanto la comprensión del significado de un concepto supone entender lo que *es* y lo que *no es*.

La complejidad de la acción de negación es analizada por Dubinsky en los diversos momentos de la génesis de la cuantificación, mostrando evidencia empírica de las dificultades de los alumnos en la negación de un enunciado formulado en *lengua natural*.

En términos generales, encuentra que los alumnos acuden o bien a un análisis en términos del *significado* del enunciado, o bien a una *aplicación de reglas* de negación de las diferentes partes del mismo.

En su mayoría, los alumnos que realizan un análisis del significado no llegan a dar una respuesta, se pierden en el análisis.

Entre los que acuden a la aplicación de reglas, los errores se ubican en los siguientes niveles del proceso:

- el de la negación de las proposiciones ligadas mediante conectores
- el de la iteración de las distintas variables subordinadas (externa e interna)
- el de la aplicación de la cuantificación a las distintas variables
- el de la posibilidad de encontrar ejemplos y contraejemplos

Nos parece interesante destacar especialmente que si todos estos aspectos son importantes a la hora de entender los problemas de los alumnos en el tratamiento de enunciados complejos, el último apunta directamente al problema de la *extensión* de una definición. Es de imaginar que cuanto más compleja sea la *estructura formal* del enunciado, la posibilidad de concebir ejemplos y contraejemplos será más difícil para los alumnos y en consecuencia la comprensión del concepto asociado, en términos de entender lo que *es* y lo que *no es*, aspecto central según el mismo Dubinsky para el aprendizaje de la definición de un concepto.

2.2.2.1.1 Aplicación de la grilla de análisis[20]

Requisitos planteados	Valores posibles	La negación de enunciados
Necesidad de recurrir a una definición explícita	sí	
	no	x
Registro de descripción de la definición	lengua natural	No corresponde
	expresiones simbólicas	
	lenguaje mixto	
Presencia de cuantificación en el enunciado	Simple	
	Doble (existencial o universal)	x
Registro de representación de contraejemplos privilegiado	Lengua natural	x
	Figural	
	Numérico	
	Expresiones simbólicas	
	Gráfico; retículo	
Campo de variaciones de casos posible	Amplio	
	Restringido	x

2.2.3 Greisy Winicki-Landman y Roza Leikin: On equivalent and Non equivalent Definitions: Part I. 2000

Este trabajo aborda directamente, desde un punto de vista didáctico, la relación entre las *definiciones* y los *objetos matemáticos* que las mismas determinan.

A fin de encuadrar el análisis, las autoras explicitan en primer lugar los principios lógicos encontrados en la literatura acerca de las condiciones que debe cumplir un enunciado para *definir* un concepto. Analizan también el significado de las *condiciones necesarias* y de las *condiciones suficientes* en la definición de un concepto. Finalmente,

---

[20] Habrá de notarse que el ejemplo de la *acción* de negación considerado aquí por Dubinsky difiere del caso general de la cuantificación de enunciados complejos analizado en el capítulo 1, en cuanto al resultado de aplicar las distintas categorías de análisis de la grilla.

utilizan la noción de clase de equivalencia para enfatizar que desde un punto de vista matemático todas las *definiciones equivalentes* sirven de la misma manera a la definición de un concepto.

Todas las consideraciones lógico/matemáticas establecidas orientan el análisis posterior sobre las consideraciones didácticas para la enseñanza de una definición. Compartiendo la idea de que no es suficiente con comprender un enunciado para comprender el concepto que el mismo define -idea que reconocen, como muchos otros autores, especialmente concebida por Poincaré-, parten de la idea de que según sean las concepciones de la *matemática* y del *aprendizaje* que se tengan, se tendrá mayor o menor éxito al enseñar una definición.

En ese contexto, presentan algunas preguntas didácticas *orientadoras* para la enseñanza de una definición: i) ¿cuál sería el enunciado más apropiado para definir un concepto -entre todas las definiciones equivalentes posibles-?; ii) ¿sobre qué bases o criterios realizar una tal elección?; y iii) ¿cuáles son las mutuas influencias entre la enseñanza y las elecciones posibles? Destacamos que estas preguntas orientadoras guían el análisis posterior realizado específicamente sobre las posibles definiciones de la noción de tangente a una curva y su evolución a lo largo de la escolaridad.

Explicitan que el análisis presentado en el artículo se basa en concepciones constructivistas del aprendizaje y de la enseñanza: i) la construcción de nuevo conocimiento se realiza sobre el conocimiento de conceptos conocidos con anterioridad y estableciendo conexiones entre ellos; ii) para ayudar a los alumnos el docente debe establecer relaciones dentro de la ZDP de los alumnos (Vygotsky, 1997); c) el enunciado seleccionado como definición debe ser basado en la intuición (Fischbein, 1987); y d) es deseable que una definición sea elegante (Vinner, 1991).

Consideran diferentes formas de enseñanza, sobre la base de la relación entre las *definiciones* y los *objetos matemáticos* que las mismas determinan. El análisis tiene en cuenta especialmente una de las reglas establecidas por la lógica formal según la cual en la definición de conceptos la *extensión* sigue una relación inversa a la complejidad de rasgos expresados por la *comprensión*. Las autoras consideran que esta relación inversa de los conjuntos de objetos y las condiciones definitorias de un concepto pueden causar problemas al aprendizaje, especialmente en cuanto a la conexión entre los conceptos relacionados.

Sobre esta base y el análisis de relaciones mutuas posibles entre las *definiciones* -basadas en *propiedades* del concepto- y los *objetos* que determinan, las autoras analizan dos formas de enseñanza principales:

- una primera forma consiste en conducir la enseñanza partiendo de la definición de conceptos con pocas propiedades –y definiendo en consecuencia un amplio dominio de objetos- para continuar con conceptos cada vez más restrictivos definidos por mayor cantidad de propiedades –y determinando así progresivamente dominios menores de objetos-;

- la segunda forma seguiría el camino inverso, partiendo de definiciones más *fuertes* y continuando con definiciones cada vez más *débiles*.

2.2.3.1 Actividad analizada por las autoras: definición de tangente a una curva

Analizan a continuación las dos perspectivas mencionadas en relación con la noción de tangente a una curva, noción que en el curriculum de escuela secundaria israelí es vista en diferentes contextos con diferentes connotaciones: en Geometría Euclideana como la tangente a un círculo; en Álgebra[21], como la tangente a una parábola; en Geometría Analítica, como la tangente a secciones cónicas y finalmente en Cálculo, como la tangente a gráficos de diferentes funciones. Según las autoras, por razones evolutivas de los alumnos es sólo viable la aproximación educativa que comienza definiendo el concepto de tangente a un círculo, porque los alumnos no estarían preparados para comenzar con la noción de tangente a una curva general. Analizan los problemas cognitivos que devienen de esta aproximación, en términos de las propiedades que deben incluirse progresivamente en la definición, a medida que se amplía el conjunto de

[21] Según la denominación utilizada en los países de tradición anglosajona

objetos matemáticos de referencia (de círculo a parábola, de parábola a curva general convexa y de curva general convexa a curva general).

Las autoras analizan un problema de origen didáctico. La mayoría de las curvas se presentan en la enseñanza en contextos restringidos y ciertas propiedades de las rectas tangentes valen o no según sea el tipo de curva.

La investigación conduce a las autoras a identificar las siguientes consecuencias:

- las propiedades observadas en los ejemplos pueden ser percibidas como condiciones *definitorias* de las tangentes a todas las curvas

- propiedades (esto es, condiciones necesarias de un concepto) pueden ser percibidas como condiciones suficientes

- la secuencia de aprendizaje puede inducir una transferencia incorrecta de las propiedades de una curva a otra. Esto puede resultar de la falta de atención al hecho de que *cambios en el conjunto de las propiedades* de un concepto implican cambios en el *conjunto de objetos* ejemplificando el concepto (relación entre la *comprensión* y la *extensión*).

2.2.3.1.1 Aplicación de la grilla de análisis

Requisitos planteados	Valores posibles	Definición de tangente a una curva
Necesidad de recurrir a una definición explícita	sí	x
	no	
Registro de descripción de la definición	lengua natural	
	expresiones simbólicas	
	lenguaje mixto	x
Presencia de cuantificación en el enunciado	Simple	x
	Doble (existencial o universal)	
Registro de representación de contraejemplos privilegiado	Lengua natural	
	Figural	x
	Numérico	
	Expresiones simbólicas	
	Gráfico; retículo	
Campo de variaciones de casos posible	Amplio	x
	Restringido	

2.2.3.2 Comentarios sobre el artículo de Winicki- Landman & Leikin.

Los principios lógicos y didácticos generales de este artículo establecen *características formales* de las definiciones y se refieren a las condiciones *necesarias* y *suficientes* que definen un *concepto.* Sin embargo, el análisis de las secuencias didácticas para el caso analizado (de tangente a una curva), se basa en la relación entre las posibles *definiciones* y los *objetos matemáticos* que ellas determinan.

Este aspecto es diferente de la mayoría de los trabajos sobre el tema, que establecen relaciones de las definiciones con los conceptos pero no con los objetos que las mismas determinan. Por ejemplo, como veremos a continuación, Cecile Ouvrier- Buffet estudia la "*construcción de una definición*" y la "*construcción de un concepto*" y la dialéctica de esta construcción, y su referencia a los objetos es sólo relativa a la consideración de ejemplos y contraejemplos.

El aspecto semiótico es sólo *implícitamente* tomado en cuenta en este artículo; sin embargo, es de notar que muchas de las propiedades mencionadas como utilizadas en la escuela son relativas a la *representación gráfica* de la curva, por ejemplo: las expresiones "*tocar en un solo punto*" y "*dejar a la curva de un mismo lado del plano respecto de la tangente*", entre otras.

2.2.4 Cecile Ouvrier-Buffet. Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. 2006

Los estudios epistemológicos y didácticos de Ouvrier-Buffet -realizados con carácter de análisis preliminares- se dirigen según la autora a identificar elementos reinvertibles en los análisis didácticos y realización de situaciones de construcción de una definición (SCD). Las hipótesis de trabajo de esta tesis son:

1. Es necesario un estudio epistemológico para establecer concepciones significativas sobre la definición y su construcción en matemática;

2. La construcción de una definición funciona de manera dialéctica con la construcción del concepto en juego.

En el Estudio epistemológico de la Definición, se plantea -entre otras preguntas-, ¿*Qué es una definición*? ¿*Qué es definir*? Su trabajo indaga el sentido de definir en una doble acepción (corriente y matemática) y se propone encontrar los medios para explicita**r** los *procesos de definición* propios de la actividad del investigador en matemática a fin de establecer relaciones entre estos procesos y los de la *construcción de una definición* y de la *construcción de un concepto* en el aprendizaje.

En relación con la acepción matemática, el análisis la lleva a identificar invariantes que ella sintetiza en tres tipos de concepciones principales sobre las definiciones (aristotélica, popperiana y lakatosiana). Estas concepciones son expuestas y analizadas utilizando el modelo cK¢ de Balacheff (1995), mediante el cual especifica también los *operadores* y *controles* asociados a cada una de dichas concepciones. Este modelo le facilita encontrar estadios en la construcción de definiciones y elementos centrales sobre la formación de conceptos y aun incluir concepciones previas de los estudiantes sobre la definición.

Entre los *operadores* y *controles* identificados (en el sentido de Balacheff) se encuentran:

1. los *operadores lingüísticos*, que conciernen a la *forma* de una definición y el uso de las condiciones de uso de las palabras y expresiones.

2. los *operadores lógicos,* que conciernen a la equivalencia entre el *definiendum* y el *definiens*, a evitar el círculo vicioso y a la condición de encontrar condiciones necesarias y suficientes. La autora identifica también el *operador* “generación de ejemplos y de contraejemplos”.

Las funciones de una definición encontradas por la autora son principalmente las de *comunicación* y de *prueba*. Afirma que estas diferentes funciones pueden también engendrar operadores de control de tipo lingüístico, hecho que, para ella, subraya la importancia del aspecto operatorio de una definición.

Una hipótesis importante que surge del estudio es que para que la construcción de un concepto sea posible es necesario movilizar una cierta "demarche cientifique": activación de diferentes puntos de vista, cuestionamientos sobre los conceptos que conciernen a la definición, puesta en cuestión de propiedades, etc.

Una organización de la enseñanza como la usual en la que una (sola) definición es puesta desde el inicio es incompatible con la negociación de una situación de construcción de esa definición.

Tres variables didácticas principales para una SDC son identificadas:

- las *funciones* de la definición: en relación con los objetos geométricos especialmente el *reconocimiento* y la *construcción*;
- el pedido de una definición (explícito o no);
- la organización de la clase (en grupos o no).

Con vistas a la construcción de otras Situaciones Fundamentales en el sentido de Brousseau (1997), la autora analiza las condiciones para el caso en el que el conocimiento al que se apunta es el de *saber construir definiciones* de un concepto; para ello, se plantea que es necesario reestudiar y enriquecer las características de las situaciones correspondientes a las variables identificadas en su tesis (Resolución de Problemas, Matematización o Modelización, Clasificación). En cuanto a las situaciones didácticas que conciernen a conceptos ya naturalizados o institucionalizados, sugiere que o bien los objetos matemáticos en juego no sean reconocidos o bien que la definición conocida de antemano resulte ineficaz. Por último, en relación con las situaciones (SDC) de matemática discreta desarrolladas en su tesis, Ouvrier-Buffet se plantea la pregunta de una posible proximidad entre este dominio y el de la geometría, "en lo que concierne a la accesibilidad de los objetos a través de sus representaciones".

2.2.4.1 Actividad analizada por la autora: desplazamientos sobre una grilla discreta

Las situaciones estudiadas en su tesis se refieren a matemática discreta y tareas de clasificación. Presentamos aquí su análisis de la situación didáctica "Estudio de los desplazamientos sobre una grilla discreta ($\mathbb{Z}^2$)" y su relación con la enseñanza del álgebra lineal.

Ouvrier analiza las combinaciones vectoriales con coeficientes enteros y sobre el plano discreto $\mathbb{Z}^2$, es decir con vectores a coordenadas enteras. El problema matemático concierne a la posibilidad de alcanzar todos los puntos de la grilla con combinaciones de vectores lo que da lugar a la noción de conjunto generador. A fin de caracterizar operatoriamente tal noción define los desplazamientos elementales *densos* (los que llegan a cualquier lugar de una zona) y los *un poco por todos lados*[22] (los que llegan tan cerca como uno quiera). Cuando ambas propiedades se cumplen es posible alcanzar todos los puntos de la grilla; es por ello que se pueden considerar como una definición *operatoria* de la noción de conjunto generador. Se plantea el problema de la minimalidad de un conjunto de desplazamientos en el sentido de si la supresión de un desplazamiento elemental modifica el conjunto de puntos alcanzado ("generado"), lo que denomina conjunto generador minimal. También se plantea la pregunta de si los conjuntos generadores del plano discreto tienen la misma cardinalidad, y estudia la relación entre la minimalidad y la unicidad de caminos (combinación lineal única e independencia lineal). A partir de un ejemplo -en la recta, la existencia de varios caminos no implica no minimalidad-, establece que conjuntos generadores minimales pueden tener cardinalidades diferentes. Da un criterio para construir conjuntos de desplazamientos elementales generadores y minimales de cardinalidad diferente que pueden ser construidos con cardinalidad arbitraria. Demuestra que para k mayor que 2 existen conjuntos de desplazamientos elementales sobre la grilla, generadores minimales de k elementos.

En relación con el álgebra lineal, Ouvrier señala la dificultad de comprensión de las propiedades "linealmente independiente maximal" y "generador minimal" para un conjunto de vectores por el hecho de ser equivalentes en ese dominio. El estudio de los desplazamientos sobre la grilla discreta le permite problematizar esos conceptos gracias a que ellos no se corresponden en el plano discreto como lo hacen en álgebra lineal. A

[22] "u.p-partout" en el original

través de la exploración de casos en un campo amplio de variaciones posible -tales como el análisis de las familias de generadores en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Z}_2$ de diferente cantidad de pasos-, el contexto de la grilla discreta le permite concebir desplazamientos elementales que no sean ni densos ni u.p-partout, u.p-partout y no densos, no u.p-partout ni densos, etc. La posibilidad de disociar dos propiedades -en el sentido de poder concebir que se dé A y no se dé B - está en la base de la posibilidad de comprensión de dichos conceptos según la autora. Más generalmente, la posibilidad de analizar ciertos conceptos en un contexto en el que algunos enunciados no son verdaderos, permite dar sentido a la apodicticidad de los enunciados verdaderos del álgebra lineal.

2.2.4.1.1 Aplicación de la grilla de análisis

Requisitos planteados	Valores posibles	Desplazamientos sobre una grilla discreta
Necesidad de recurrir a una definición explícita	sí	
	no	x (sólo definiciones en acto)
Registro de descripción de la definición	lengua natural	
	expresiones simbólicas	
	lenguaje mixto	x
Presencia de cuantificación en el enunciado	Simple	
	Doble (existencial o universal)	x
Registro de representación de contraejemplos privilegiado	Lengua natural	
	Figural	
	Numérico	
	Expresiones simbólicas	
	Gráfico; retículo	x
Campo de variaciones de casos posible	Amplio	x
	Restringido	

2.2.4.2 Comentarios sobre la tesis de Ouvrier-Buffet

Esta tesis aborda explícitamente la relación entre las *definiciones* y los *conceptos matemáticos*, bajo la hipótesis de una relación dialéctica en su construcción.

La otra relación, la de las *definiciones* con los *objetos matemáticos* que la definición determina (la *extensión*) es considerada solamente en el sentido de la identificación de ejemplos y contraejemplos y especialmente en relación con su rol dentro de la concepción lakatosniana establecida por la autora.

El aspecto representacional no es tomado explícitamente en su tesis pero Ouvrier-Buffet sugiere la importancia de su estudio, aspecto que relaciona con la percepción.

2.2.5 Éric Laguerre: Le concept de typicalité appliqué aux registres figuraux et numerico –algébriques : figures archétypes, prototypes pathologiques et pathogènes, typicalité dans la résolution de tâche. 2007

Este autor está interesado en la manera en que se constituyen las representaciones figurales típicas de los alumnos, y su rol en el marco de la resolución de tareas a partir de las propiedades de un teorema. Asimismo, busca identificar el rol de las *figuras clave* utilizadas en la enseñanza.

Distingue las figuras "arquetípicas" de las "prototípicas" afirmando que las primeras

> … son producidas por los estudiantes antes de la enseñanza y que son así productos culturales pregnantes anteriores a los objetos matemáticos en curso de estudio

Cabe aclarar que el sentido que da a la expresión "antes de la enseñanza" no es el de anterioridad a *toda* enseñanza sino a la de un contenido particular.

Las figuras *prototípicas* son las que producen espontáneamente los alumnos durante o después de la enseñanza de ese contenido; son figuras que expresan las premisas del teorema a la vez que:

> (…) contienen igualmente propiedades contextuales superfluas, reales o erróneas, agregadas o reconocidas como importantes por los alumnos fuera de toda descripción explícita hecha por el enseñante, que se encuentran mezcladas al momento del aprendizaje o de manera más natural

En relación con el rol de las *figuras clave,* comienza diciendo:

> La noción de figura clave es corrientemente empleada en la enseñanza francesa. Nosotros partimos, a priori, de la idea de que las figuras llamadas clave podían jugar un rol facilitador en la aplicación de un teorema pero también perturbador si variables figurales superfluas se adjuntan a las variables minimales que permiten definirlas

El trabajo de Laguerre se inscribe dentro del marco teórico general provisto por Duval. En términos generales, por el rol que le otorga tanto en la investigación cognitiva como en su propuesta didáctica a la articulación de registros de representación (en este caso el registro figural y los registros simbólico y numérico). En cuanto a la geometría, tiene en cuenta todos los desarrollos de Duval sobre las posibles entradas en este dominio, las diferentes maneras de ver una figura y sus relaciones con el reconocimiento de formas y la identificación de objetos (Duval, 1995, 2005).

En particular, reconoce que la constitución de las figuras prototípicas hace por un lado posible el reconocimiento de una subfigura en una figura compleja (visualización *icónica* según Duval), lo que facilita -por ejemplo- la aplicación de un teorema, pero por otro lado obstaculiza la posibilidad de *descomposición* y *transformación* de las unidades figurales en función del objetivo de la tarea (aspecto que sí es posible mediante una visualización *no-icónica*). Es por eso que otorga importancia a la capacidad de repertoriar los diseños típicos para una manera icónica de ver una figura, pero reconoce sus límites y postula que las variables figurales deberían ser representativas del enunciado del teorema a fin de no promover aplicaciones erróneas.

2.2.5.1 Actividad analizada por el autor: aplicación del Teorema de Thales

La elección del teorema de Thales para realizar el estudio se basa según el autor en la posibilidad que ofrece para poner en evidencia la existencia de figuras geométricas arquetípicas y prototípicas en geometría y, a través de la necesaria articulación con los registros numérico y simbólico requerida por su aplicación del teorema "estudiar la influencia de la visión de una figura sobre su operacionalización".

En su estudio, identifica en primer lugar las figuras "arquetípicas" y las "prototípicas" relacionadas con el teorema. También estudia el efecto que ciertos parámetros superfluos (variables figurales) que definen los prototipos podrían engendrar cuando se modifican valores de esas variables, especialmente sobre dos tipos de operación: el *reconocimiento* de una figura (lo que lo conduce a definir las figuras patológicas); y la *escritura* de relaciones literales entre medidas y la puesta en ecuación al aplicar el teorema (lo que lo lleva a definir las figuras patógenas). Finalmente, estudia la influencia de la enseñanza sobre estos procesos, especialmente el papel de la *figura clave* que acompaña en general a dichas propuestas.

Entre otros resultados, Laguerre muestra figuras arquetípicas y prototípicas relacionadas con el teorema en alumnos de 13 y 14 años y su interrelación e influencia sobre los procedimientos de *reconocimiento* de la figura (pertinencia del teorema) y los de su *aplicación*, lo que supone una escritura literal y posterior formulación de una ecuación y su resolución. La evidencia empírica lo conduce a identificar un conjunto de parámetros superfluos de los prototipos que al ser modificados generan dos tipos de figuras:

- figuras a las que denomina "patológicas": son figuras que expresan las relaciones del teorema pero que los alumnos no reconocen, por no poder identificar subfiguras o configuraciones visuales prototípicas

- figuras a las que denomina "patógenas": son figuras que expresan las relaciones del teorema y que los alumnos reconocen, pero que aplican erróneamente en virtud de las relaciones numéricas y simbólicas que establecen

Al analizar la evolución de los arquetipos y prototipos en los alumnos y las propuestas de enseñanza a las que son expuestos, concluye entre otras cosas que la enseñanza favorece que de las dos figuras *arquetípicas* identificadas en alumnos de 13 años una de ellas se transforme en *prototípica* para los alumnos a los 14 años. Lo más importante de esta conclusión en relación con el rol de la enseñanza es que *parece invertir* el orden en el sentido de que la figura que se transforma en prototípica es la que aparecía con menor frecuencia como arquetípica el año anterior, especialmente en virtud de la influencia de las representaciones prototípicas usadas por los profesores. Otro resultado de importancia es el de la relación entre la geometría y el álgebra identificado en su estudio de los manuales escolares: según Laguerre, las propuestas de enseñanza utilizan el teorema de Thales para *dar sentido* a nociones algebraicas y no por su significación geométrica intrínseca, a partir de problemas que favorecen la puesta en relación de los datos de un problema geométrico "*sin retorno a la figura*".

Las *figuras clave* propuestas por la enseñanza contienen intrínsecamente toda la fuerza y debilidad de las figuras prototípicas. Propone entonces que "es importante instaurar en la enseñanza una variabilidad tanto de prototipos como de tipos de cálculo". En particular, a fin de "*evitar que los arquetipos se transformen en prototipos*", debería considerarse una gran variedad de parámetros definitorios de los prototipos, "*caracterizados por variables figurales estrictamente en relación con el enunciado*". Esto ayudaría al *reconocimiento de los prototipos* en figuras complejas y a la identificación de *configuraciones visuales* que podrían mostrar la pertinencia o no del teorema de Thales para una figura dada pero abriría la puerta a una mirada *no icónica* favorable a otros objetivos.

En ese orden de ideas, propone la variable proporcionalidad (interna/externa): según el tipo de repartición de las medidas y el valor a calcular, la figura sugiere la versión del teorema de una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, o la versión de dos paralelas cortadas por dos transversales. Según el autor, esta variable permite evitar un procedimiento de visualización estrictamente icónico ligado a la lectura de los datos numéricos y posterior cálculo *sin retorno a la figura*. Postula que la puesta en juego de esta variable favorece que los alumnos analicen la figura buscando identificar relaciones geométricas, analicen luego los datos numéricos buscando la versión del teorema más apropiada, y luego vuelvan al registro figural para aplicar esa versión del teorema. En otras palabras, la variable *proporcionalidad* implícitamente favorecería que los alumnos volvieran espontáneamente a la figura para efectuar los cálculos o como elemento de control. Es decir evitaría "*la huída lo más pronto posible de lo geométrico*" identificada por Laguerre en sus experiencias.

2.2.5.1.1 Aplicación de la grilla de análisis

Requisitos planteados	Valores posibles	Aplicación del teorema de Thales
Necesidad de recurrir a una definición explícita	sí	No corresponde
	no	
Registro de descripción de la definición	lengua natural	No corresponde
	expresiones simbólicas	
	lenguaje mixto	
Presencia de cuantificación en el enunciado	Simple	x
	Doble (existencial o universal)	x
Registro de representación de contraejemplos privilegiado	Lengua natural	
	Figural	x
	Numérico	
	Expresiones simbólicas	
	Gráfico; retículo	
Campo de variaciones de casos posible	Amplio	x
	Restringido	

2.2.5.2 Comentarios sobre el artículo de Laguerre

El trabajo de este autor no se refiere a los *procesos de definición* de objetos matemáticos sino al uso de un teorema como herramienta para la resolución de un problema. El nivel educativo en el que realiza su estudio sobre el Teorema de Thales tampoco concierne al nivel educativo de interés de nuestra tesis. Sin embargo, es muy próximo a nuestro objeto de estudio en la medida en que:

1. En su estudio cognitivo:

- por un lado indaga el lugar que ocupan los caracteres típicos en el *reconocimiento* de propiedades de objetos matemáticos en un registro (el figural).

- por otro lado, tiene en cuenta las relaciones que los alumnos establecen con los *procedimientos algebraicos* para la resolución de una tarea a partir del teorema; es decir tiene en cuenta la articulación del registro figural con el numérico-algebraico como medio para la resolución de una tarea (si las relaciones establecidas son correctas, si se vuelve o no a la figura, etc). El papel de los prototipos es analizado aquí en lo que afecta o no al reconocimiento de una figura y sus consecuencias en los procedimientos numérico-algebraicos de aplicación del teorema

2. En su propuesta didáctica se distinguen los siguientes criterios:

- favorecer el reconocimiento de configuraciones visuales como herramienta para decidir la pertinencia o no de aplicación de un teorema (el de Thales en su estudio);

- favorecer la salida de un modo de visualización estrictamente icónica –para una entrada en una visualización matemática- en el registro figural; y finalmente

- favorecer una articulación entre registros - en su análisis, conversiones en doble sentido entre los registros figural y numérico- algebraico-, a fin de evitar el encapsulamiento en el registro numérico-algebraico “sin retorno a la figura” al resolver un problema.

2.3 Síntesis general de la literatura científica

Como anticipamos en la *Introducción* de este capítulo, la mayoría de los trabajos se centra principalmente en la relación entre las *definiciones* matemáticas y los *conceptos* que ellas definen, y en menor medida en la relación con los *objetos* que la definición determina. En caso de ser abordada, esta segunda dimensión se restringe a la capacidad de los alumnos de reconocimiento de ejemplos y contraejemplos por medio del análisis de diferentes instancias particulares.

En cuanto al procedimiento de reconocimiento utilizado, Vinner y Herskowitz (1983), Vinner (1992), y Laguerre (2007), coinciden en que es la figura prototípica la que juega como referente principal en el criterio de aceptación de una figura geométrica como adecuada a un concepto dado. Estos estudios cognitivos, entonces, desde diferentes marcos teóricos, coinciden en la explicación del hecho de que los alumnos acierten o no a reconocer los posibles objetos que forman parte de la *extensión* de un concepto.

Entre las investigaciones didácticas, Winicki-Landman & Leikin sí abordan explícitamente la relación entre las definiciones y los *objetos*, a través de la relación inversa entre (la cantidad de rasgos captados por) la *comprensión* y la *extensión* (conjunto de objetos definidos por el concepto en cuestión). Ouvrier-Buffet otorga importancia al reconocimiento de ejemplos y contraejemplos en los procesos de definición según la concepción sobre la definición identificada por ella a la que denomina concepción lakatosniana.

Los diferentes autores *implícitamente* dan cuenta de la importancia de las *representaciones* en la medida en que las actividades matemáticas destinadas a estudiar los procedimientos y concepciones de los alumnos son mediadas –como no podría ser de otra manera- por representaciones semióticas: escrituras numéricas, dibujos de figuras geométricas o de gráficos de funciones, y en general son formuladas mediante preguntas en lenguaje natural. Sin embargo, la influencia específica de este aspecto representacional no es tomada en cuenta en el análisis de los resultados.

Un ejemplo de ello es el análisis de Ouvrier-Buffet sobre la identificación de ejemplos y contraejemplos en la concepción lakatosniana definida por ella, en la que, según la autora, "no hay sistema de representación". Ouvrier-Buffet sugiere sin embargo que una posible vía didáctica a explorar sería la de tener en cuenta las definiciones en relación con las representaciones de los objetos.

Otro ejemplo es el Vinner sobre la noción de tangente a una curva, en el que la Imagen del Concepto contiene de manera no verbal imágenes compatibles con el registro –figural- de presentación de la tarea. Encontramos otro ejemplo interesante en otro lugar (Vinner y Tall, 1981) sobre la *Imagen Evocada* del concepto de límite de sucesiones según el modelo de Vinner: respuestas de los alumnos aparentemente contradictorias son interpretadas en términos de la parte de la *Imagen del concepto* que es *evocada* según el tipo de pregunta formulada: en un caso la pregunta activa nociones asociadas al concepto de límite y en otro caso activa procedimientos numéricos. El análisis es sumamente interesante, pero no tiene en cuenta el lugar que las representaciones periódicas y decimales juegan en esa evocación de *diferentes* partes del concepto. En términos más generales, Vinner y Tall no tienen en cuenta que las representaciones de un mismo objeto en diferentes registros hacen que *una misma tarea* desde el punto de vista matemático constituya un *problema diferente* desde el punto de vista cognitivo (y evocar en consecuencia diferentes partes de la *Imagen del Concepto* según el modelo de Vinner).

Por su parte, Winicki-Landman & Leikin *implícitamente* dan cuenta de la *representación* en la medida en que las definiciones encontradas sobre la noción de tangente expresan *verbalmente* relaciones que se refieren al *registro gráfico*, y atribuyen los resultados a las propiedades extraídas por los alumnos a partir de la observación de curvas particulares.

A diferencia de esos autores, Laguerre tiene en cuenta *explícitamente* las características de los objetos en juego en cuanto a *cómo son representados* en el registro de las figuras. Toma también en cuenta: la articulación con los procedimientos numéricos y algebraicos que pueden los alumnos realizar a partir del reconocimiento de la figura y de las relaciones que contiene; las variables didácticas (relacionadas con la figura) que pueden promover procedimientos de doble articulación entre registros; etc.

En relación con la función que la tipicalidad juega en la construcción del conocimiento, los diferentes estudios abordan este aspecto en el área de geometría, y ligado a los registros figural o cartesiano (para el caso de las funciones). Según el caso, el prototipo es tomado en un sentido positivo (como favorable a la construcción del conocimiento) o negativo (como obstáculo al reconocimiento de un objeto o para la resolución de tareas).

No hemos encontrado estudios cognitivos que indaguen el rol de la tipicidad en los dominios numérico o algebraico, aspecto en el que nos interesamos en esta tesis. Tampoco se identifican fenómenos ligados a la tipicidad comunes a diferentes áreas de conocimiento y a la representación en diferentes *registros semióticos*, en particular fenómenos ligados a un lenguaje (natural y simbólico del álgebra).

Los diferentes estudios manifiestan de una u otra manera la necesidad de conducir a los alumnos a poner en relación sus conocimientos basados en la experiencia con objetos “individuales” y los conocimientos basados en el análisis de una definición formalmente dada. En esta tesis abordamos esta complejidad considerando especialmente la *articulación* de registros de representación como fuente principal para guiar esa evolución.

Entre otros desarrollos –presentados en los capítulos 4 y 5-, destacamos los siguientes, que aportan de manera complementaria a las investigaciones analizadas en este capítulo:

1. mostramos que los sujetos a menudo no pueden encontrar contradicciones por comparación de distintas *representaciones semióticas* de un mismo objeto, debido a lo que se denomina el *encapsulamiento* de registros de representación, evitando así que un *conflicto potencial* se convierta en actual (aspecto central destacado por Vinner para el tratamiento conceptual de una definición) (ver capítulo 4);

2. mostramos las *transformaciones semióticas* requeridas por el reconocimiento y la descripción de un objeto individual y por la comprensión y operatividad de una definición (ver capítulo 5);

3. mediante un análisis semio/cognitivo de tareas matemáticas elaboramos fuentes de variación sistemáticas para el reconocimiento, observación, descripción y denominación (definición) de objetos matemáticos (ver capítulo 5).

3 Marco teórico/metodológico: Teoría de los Registros de Representación Semiótica

En este capítulo presentamos la Teoría de los Registros de Representación Semiótica –teoría de referencia principal de esta tesis-. Esta teoría, según sostenemos, tiene profundas raíces fregeanas, -especialmente en la distinción *sentido*[23]*/referencia*-. Hemos considerado importante identificar y mostrar aquí las principales relaciones entre ambas teorías, por el interés teórico del tema, y para facilitar la comprensión de los conceptos que utilizamos de estos autores.

El punto a desarrollar aquí de la vasta obra de Frege[24]-la distinción *sentido/referencia*- concierne a su pertinencia para explicar dos aspectos fundamentales de la actividad matemática:

- el progreso discursivo involucrado en el razonamiento matemático y el cálculo;
- la diferencia de valor cognoscitivo involucrado en diferentes maneras de presentación de un objeto y su relación con la identificación del objeto

Para nuestro análisis, jerarquizaremos la noción de *sentido* como portador de información para identificar un objeto matemático y la distinción *sentido/referencia* en relación con el análisis de los enunciados de identidad. Asimismo, analizaremos la importancia del sistema de escritura en la teoría de Frege y los alcances de esta teoría para el uso de los signos en matemática.

Estos aspectos se extienden y profundizan en la teoría de los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval -de una manera que precisaremos según nuestro análisis-, por razones intrínsecas a la actividad matemática y a las características

23 A partir de quí vamos a escribir « *sentido* » al utilizar la palabra con la significación dada por Frege, y « sentido » al utilizarla con una significación diferente

24 Desarrolló un sistema formal que sirvió como base para la lógica moderna. Precursor oficial de la lógica de predicados formalizada por Rusell y Whitehead en los Principia Mathematica.

del funcionamiento cognitivo en esta área. Las principales dimensiones según las cuales esta teoría constituye una extensión y una profundización conciernen a la distinción entre *contenido de una representación*/*objeto representado,* la noción de *transformación semiótica*, y el recurso a la identificación de *unidades significantes* para la identificación del *contenido* de una representación (o del *sentido* fregeano).

3.1 La distinción *sentido* / *referencia*

La distinción *sentido*/*referencia* (o *denotación*) (Frege, 1974) constituye uno de los principales aportes de Frege al análisis de los signos. La *referencia* (o *denotación*) de un signo es lo que el signo designa, y su *sentido* es la manera de presentación de la referencia.

En *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege lo precisa de esta manera:

> Digo además, que lo que un nombre *expresa* es su sentido, y lo que representa es su referencia

Las preocupaciones centrales que lo condujeron a realizar esta distinción eran la de encontrar el significado de los enunciados de identidad del tipo "*a =b*" y la posibilidad de substituir unas expresiones por otras conservando el valor de verdad.

A propósito, dicen Ducrot &Todorov (1972):

> El problema inicial de Frege es el siguiente: según la definición misma de identidad, si dos objetos son idénticos lo que es verdadero para uno es verdadero para el otro (…) Así, si es cierto que el lucero del alba es menos grande que la Tierra, debe ser también cierto que el lucero vespertino es menos grande que la Tierra, puesto que el lucero del alba y el lucero vespertino no son sino un mismo objeto, el planeta Venus. Pero hay ciertos contextos (llamados "oblicuos" u "opacos") en que no puede reemplazarse "lucero vespertino" por lucero del alba" sin modificar el valor de verdad de la proposición. Así, "Pedro sabe que Venus es el lucero del alba" puede ser verdadero, mientras "Pedro sabe que Venus es el lucero vespertino" puede ser falso. Para resolver esta paradoja, Frege distingue el referente de una expresión, o sea, el objeto que designa, de su sentido, o sea la manera en que la expresión designa ese objeto, las informaciones que da sobre él para permitir identificarlo. "Lucero del alba", "Lucero vespertino" y Venus tienen pues el mismo referente, pero sentidos distintos; esto permite definir los contextos oblicuos (u opacos): son aquellos en

que la substitución de dos términos de igual referente y sentido diferente puede ocasionar un cambio en el valor de verdad, porque en esos contextos lo que importa es el sentido de las expresiones y no su referente.

Esta descripción explica la importancia de la distinción s*entido/ referencia* cuando la substitución de un término por otro (siendo dos términos de igual *referente* y *sentido* diferente) en un discurso ocasiona un cambio en el valor de verdad. Esto es natural, en la medida en que –como expresan Ducrot y Todorov- la distinción entre el *referente* y el *sentido* de una expresión surgen en Frege para resolver la paradoja que planteaba que en ciertos contextos no se diera que "*si dos objetos son idénticos lo que es verdadero para uno es verdadero para el otro*".

Ahora bien, como veremos, la distinción s*entido/ referencia* se torna muy importante en los contextos *no* oblicuos, en los que la substitución de dos términos de igual referente y *sentido* diferente **conservan** el valor de verdad (salva veritate). La razón es que mediante ese mecanismo, las sustituciones de unos términos por otros presentan continuidad y novedad a la vez, lo que permite explicar el *progreso discursivo* propio del razonamiento matemático y el cálculo (ver 3.1.8).

Como veremos también, esto se explica por el hecho de que estas sustituciones realizadas mediante un cambio de *sentido* e invariancia *referencial* son basadas en enunciados de identidad del tipo "*a =b*" portadores de información. En otras palabras, son basadas en enunciados que tienen la propiedad de que a la diferencia entre los signos "*a" y "b*" corresponde un contenido informacional diferente sobre el objeto que designan.

3.1.1 La noción de objeto en Frege

Antes de analizar los distintos aspectos de estas nociones debidas a Frege, conviene precisar que este autor define como *objeto* a todo aquello a lo que lingüísticamente le corresponde una expresión *saturada* (o nombre)[25], por ejemplo: 4, 4>2, 2>4, lo verdadero, lo falso, etc.

De esta manera, Frege pone en un mismo plano a las expresiones nominales y los enunciados. Más precisamente, pone a la relación entre un *enunciado* y su *valor de verdad* en el mismo plano que la relación entre un *nombre* (común, o propio) y su *referencia*. El aspecto más revolucionario de esta noción de objeto es que incluye como tal a *lo verdadero* y *lo falso*.

Otro aspecto a destacar es que tanto las expresiones nominales como los enunciados tienen *sentido*, aunque no tengan *referencia*. Un ejemplo interesante de expresión que tiene *sentido* pero no *referencia*, en el área de la matemática -dado por el mismo Frege- es "*la serie que converge menos rápidamente*".

Cortés Morató & Martínes Riu (1996) lo expresan de esta manera:

> Frege da objetividad al sentido de los nombres sin referente puesto que mantiene que los objetos matemáticos y los lógicos son objetivos, aunque no reales

3.1.2 El *sentido* como portador de información para identificar la *referencia*

En este apartado y los siguientes nos interesamos por desarrollar la idea según la cual la teoría de Frege pone a la noción de *sentido* en el centro del problema del conocimiento. En términos muy generales se trata de que las diferentes maneras de *designar* un objeto corresponden a diferentes maneras de *presentarlo* (a través de diferentes *sentidos*) y que los diferentes *sentidos* expresan diferentes aspectos (conocimientos, propiedades) del objeto.

25 Esta caracterización la realiza en el contexto de presentar otra distinción relevante, entre objetos y funciones (a las que les corresponde expresiones lingüísticas no saturadas)

3.1.3 La distinción *sentido*/*referencia*: su relación con los signos y las representaciones semióticas

A fin de explorar la relación de la noción de *sentido* con el conocimiento, encontramos pertinente analizar el aporte de Frege según tres criterios de clasificación de los signos, basados en diferentes tipos de análisis (Ducrot & Schaeffer, 1995):

- los centrados en el **objeto** de reenvío de los signos o representaciones
- los centrados en la **manera** de reenviar a los objetos
- los centrados en « (…) *sus posibilidades [de los signos] de ser transformados en otras representaciones semióticas*» (Duval, 2006a)

Evidentemente, la distinción *sentido/referencia* es fructífera para pensar a los signos según dos relaciones semánticas fundamentales: la relación del signo *con su objeto* y la relación del signo *con su significado*. Según esta perspectiva, el modelo pertinente para analizar la teoría del *sentido* de Frege se inscribiría dentro de los dos primeros criterios de clasificación. Sin embargo, según nuestro análisis encontramos importante destacar dos cosas:

- por un lado, que, como veremos más adelante, la distinción *sentido/referencia* alcanza toda su potencia gracias a la posibilidad de las expresiones de ser sustituidas unas por otras, lo que remite al tercer criterio de clasificación (ver 3.2.8).

- por otro lado, que si bien las dos relaciones diádicas *signo/referencia* y *signo/sentido* son importantes para el análisis, no se trata de dos dimensiones *independientes* una de la otra. Todo lo contrario, se relacionan intrínsecamente en la teoría de Frege, de una manera satisfactoria al análisis de los enunciados de identidad y a la posibilidad de expresar *conocimiento* de la *referencia* (ver 3.1.5 y 3.1.9).

Efectivamente, según la relación del signo con su objeto (componente *signo/referencia*) el signo funcionaría como una *representación* de la *referencia*, en el sentido de “algo que está en *lugar* de la *referencia*”. Pero la componente *signo/sentido* agrega al aspecto *representacional* una propiedad del objeto, expresada a través del *sentido.*

Dicho de otra manera, el signo *representa* al objeto y a través del *sentido* expresa un conocimiento del objeto.

Es por esta razón que podemos afirmar que el modelo del signo de Frege es triádico: el *sentido* media entre el *signo* y el *objeto* expresando un conocimiento particular del objeto. Frege lo expresa así en *Sentido y Referencia*:

> Sean *a*, *b*, *c* las rectas que unen los ángulos de un triángulo con el punto medio de los opuestos. El punto de intersección de *a* y *b* es entonces el mismo que el punto de intersección de *b* y *c*. Tenemos, pues, designaciones distintas para el mismo punto, y estos nombres ("intersección de *a* y *b*" e "intersección de *b* y *c*") indican al mismo tiempo el modo de darse el punto; y de ahí resulta que en el enunciado esté contenido auténtico conocimiento.

Finalmente, es importante destacar que no hay que atribuir a la noción de signo utilizada por Frege, los significados que adquirió posteriormente con los desarrollos de la semiótica y de la lingüística.

3.1.4 El carácter objetivo y necesariamente parcial del *sentido* fregeano

Pensamos que es importante destacar dos aspectos fundamentales de la posibilidad de acceso a la *referencia*: el *sentido* es *objetivo* y necesariamente *parcial*.

En *Sentido* y *Referencia,* Frege lo explica a través de una analogía:

> Alguien observa la Luna a través de un telescopio. Comparo la Luna con la referencia; es el objeto de observación, que es proporcionado por la imagen real que queda dibujada sobre el cristal del objetivo del interior del telescopio, y por la imagen en la retina del observador. La primera imagen la comparo con el sentido; la segunda con la representación[26] o intuición. La imagen formada dentro del telescopio es, en verdad sólo parcial, depende del lugar de observación; pero con todo es objetiva, en la medida en que puede servir a varios observadores. Podría incluso disponerse de modo que pudieran utilizarla varios simultáneamente. Pero, de las imágenes retinianas, cada uno tendría la suya propia.

26 Frege utiliza la palabra representación de un modo totalmente diferente del que usamos en esta tesis: se trata de una representación subjetiva y no semiótica

Como veremos, el carácter necesariamente parcial del *sentido* fregeano está relacionado con la capacidad y los límites de expresión de la lengua utilizada (ver 3.1.6 y 3.1.7).

3.1.5 Los diferentes *sentidos* como información para identificar la referencia

En *Introducción a Frege*, Kenny dice:

> Si conociéramos todo lo que es posible conocer acerca de un objeto sabríamos qué sentidos servirían para identificarlo y cuáles no

Este criterio de *información* acerca del objeto designado es también utilizado por Ducrot y Todorov (1972) para presentar la teoría de Frege:

> [...] Frege distingue el referente de una expresión, o sea el objeto que designa, de su sentido, o sea la manera en que la expresión designa ese objeto, las informaciones que da sobre él para permitir identificarlo.

A través de estas expresiones, estos autores ponen el acento en que las informaciones provistas por los diferentes *sentidos* – las diferentes *maneras* de presentar al objeto designado- servirían para **identificar el referente.**

De esta manera, la noción de *sentido* se inscribe en el centro mismo de la Semántica, cuyo objeto es el de analizar los mecanismos por los cuales se puede llegar a identificar a los elementos denotados.

Esta idea es central en la Teoría de Duval, para quien un *objeto matemático* es el *invariante* de todas sus representaciones, como hemos visto en 1.4.1. El punto crucial de su teoría en relación con esta definición reside en la posibilidad de *presentar* un objeto a través de sus diferentes representaciones, las que son proveedoras de distintas informaciones, lo que subyace a la posibilidad de identificarlo como « invariante ».

3.1.6 La distinción *sentido*/*referencia* en comparación con la distinción *comprensión-extensión* de la lógica formal

Es importante comparar la distinción *sentido/referencia* con la distinción *comprensión-extensión* de la lógica formal por dos razones fundamentales. En primer lugar, porque esto nos conducirá a profundizar en la importancia del sistema de escritura en la teoría de Frege y, -como veremos posteriormente- en la teoría de Duval. En segundo lugar, por la importancia que tiene la distinción *comprensión-extensión* en la *definición* de objetos matemáticos por medio de propiedades.

A propósito, dicen Ducrot y Todorov (ibid.)

> La oposición sentido-referente no recubre la oposición comprensión-extensión de la lógica formal. La extensión de un término es el conjunto de los objetos que designa; su comprensión, el conjunto de los rasgos comunes a todos esos objetos. El sentido de Frege o el significado saussuriano sólo retienen de la comprensión los rasgos que, en la lengua utilizada, sirven convencionalmente para identificar el referente.

En general, el conjunto de rasgos comunes de la *extensión* de un término es considerable, y la *comprensión*, considerada como el conjunto de rasgos o caracteres esenciales que definen un objeto, supone un recorte entre todos esos rasgos pertinentes, limitado a su vez por las posibilidades de expresión de *la lengua utilizada*.

3.1.7 Importancia del sistema de escritura en la teoría de Frege

La frase de Ducrot y Todorov citada en el inciso anterior pone en evidencia la importancia del sistema en el cual los signos son expresados. Dicho de otra manera, pone en evidencia que el conocimiento expresado por el *sentido* fregeano[27] es un conocimiento en un *sistema particular* de signos, en tanto los rasgos retenidos por el *sentido* son rasgos que sirven para identificar el referente "*en la lengua utilizada*".

---

27 y el significado saussuriano, del que hablaremos posteriormente (ver 3.1.8 y 3.2.8)

Aún más, los autores dicen

> el conocimiento del sentido de una expresión forma parte del conocimiento de la lengua

Una de las preocupaciones de Frege fue la de formalizar la matemática en el sentido de formular un lenguaje que permitiera evitar las ambigüedades y precisar las relaciones lógicas de las formulaciones en lenguaje natural. Este proyecto culmina con la presentación de un sistema riguroso en *La Ideografía,* en 1879. Los desarrollos posteriores de la semiótica y la lingüística han hecho posible el avance de sus ideas, en particular en cuanto a la posibilidad de interpretar el *sentido* fregeano en términos del sistema de escritura en el que es expresado.

En relación con este punto, el aporte de la teoría de Duval se refiere especialmente a:

- la distinción *contenido de una representación/objeto representado* como extensión de la distinción *sentido/referencia,* en la medida en que utiliza la potencia de los diferentes sistemas semióticos y no sólo la potencia de las lenguas; y
- los desarrollos sobre el análisis de los signos en términos de la posibilidad de ser substituidos unos por otros

Parafraseando a Ducrot y Todorov podríamos decir que en tanto el sentido de Frege "sólo retiene de la comprensión los rasgos que, en la lengua utilizada, sirven convencionalmente para identificar el referente", el *contenido* de una representación semiótica de Duval –reconociendo los límites de cada sistema de representación- aspira a captar a través de los diferentes registros y su articulación la descripción de la mayor cantidad de rasgos relevantes para identificar al *referente* ("invariante de todas sus representaciones").

3.1.8 La dualidad *sentido* / *referencia*: nociones para comprender el progreso discursivo

A fin de comenzar con la discusión de este punto fundamental de la teoría de Frege, nos remitimos a una frase de Duval (2002), en la que analiza diferentes aportes para responder a la pregunta ¿*Qué es lo que constituye el sentido de los signos*?, estableciendo que según Frege:

> (...) el "sentido" de un signo tiene dos componentes:
>
> La referencia al objeto designado
>
> La manera en la que el objeto es designado
>
> Esta distinción es esencial. Explica la posibilidad del progreso discursivo y de los cálculos. Es porque los objetos pueden ser designados de diferentes maneras que, de una frase a otra o de una equivalencia a otra, los discursos y los cálculos no se encierran en puras tautologías (Duval, 1998, p. 153-159).

Esta frase de Duval contiene tres aspectos fundamentales de la distinción de Frege:

- En primer lugar, el hecho de que la noción de *sentido* puede ser introducida gracias a la posibilidad de designar un objeto de diferentes maneras, lo que hemos discutido ya en el inciso anterior.

- En segundo lugar, que en esa posibilidad residen el razonamiento y el cálculo, los que se realizan a partir de las substituciones de unas expresiones por otras con diferentes *sentidos* e invariancia *referencial*

- Finalmente, que si dichos razonamientos y cálculos constituyen un progreso discursivo ("no se encierran en puras tautologías") es porque las expresiones resultantes de dichas substituciones contienen una información nueva del objeto designado.

Nos interesa puntualizar que Frege no utilizó la expresión "*salva denotata*" sino solamente "*salva veritate*", a pesar de que la dualidad *sentido/denotación* (misma *denotación* con cambio de *sentido*) se aplica tanto a la *denotación* como "valor de verdad” como a la denotación de objetos matemáticos (números, conjuntos, funciones, etc.) u objetos cualesquiera como “la estrella de la mañana”. Entendemos que esta restricción en el lenguaje para una noción que el mismo Frege concibió más extensamente se debe a que en tanto lógico le interesaba la conservación de la verdad, expresión por otra parte familiar para los lógicos. Cabe destacar también que si bien Frege fundó la lógica matemática, algunas formalizaciones actualmente conocidas no fueron realizadas por el mismo Frege sino muy posteriormente. Por ejemplo Drouhard (1992) introdujo una versión moderna para la denotación de un enunciado por medio de la función booleana.

En relación con este punto, Duval (ibid.) profundiza la noción de Frege introduciendo una de las contribuciones fundamentales de Saussure (1973) al análisis de los signos, según la cual el *significado* de un signo se define por *oposición* a otros signos dentro del mismo *sistema* y a partir de la cual la noción de *signo* ha de substituirse por la de *sistema semiótico* (ver 3.2.8). Como veremos, según este enfoque la potencia de los signos no reside en su capacidad de *evocar* otra cosa, sino en la posibilidad de ser substituidos unos por otros respetando ciertas reglas (ver diferentes criterios de clasificación de los signos expuestos en 3.1.3). Con este aporte teórico, Duval da a la distinción *sentido/referencia* toda su potencia para explicar la posibilidad del razonamiento y el cálculo mediante substitución de unos signos por otros.

3.1.9 El *sentido* como portador de información en los enunciados de identidad

En “*Sentido* y *referencia*”, Frege analiza los enunciados de identidad en términos de informatividad, utilizando la noción de *sentido*. De esta manera, precisa las condiciones para que las sustituciones de unos signos por otros en un cálculo o razonamiento “no se encierren en puras tautologías”. La respuesta que da en este artículo es que un enunciado del tipo “*a =b*” es portador de información (los enunciados de tipo “*a =b*” son informativos) cuando la diferencia entre los signos “*a” y “b*” corresponde a una diferencia en la *manera* de presentar lo que ellos designan (misma denotación, diferentes sentidos).

Diferentes respuestas marcaron la evolución de la teoría de Frege sobre los enunciados de identidad. Uxía Rivas (1996) realiza una excelente síntesis de esta evolución:

> La distinción entre sentido y referencia aparece mencionada por primera vez en "Funktion und Begriff" (1891), pero es tratada ampliamente en "Über Sinn und Bedeutung" (1892). El reconocimiento de estas dos relaciones semánticas aparece estrechamente ligado al problema de la identidad. En la Begriffsschrift (1879), en un parágrafo titulado "Igualdad de contenido" presenta Frege su primera teoría de la identidad, donde la concibe como una relación entre signos. Más tarde, esta perspectiva no le satisface debido especialmente a la conexión arbitraria que se puede establecer entre los signos, como cuando decidimos que una expresión larga puede sustituirse por una abreviatura cualquiera estipulada por nosotros; por ejemplo, «la razón de la circunferencia al diámetro» se abrevia empleando la letra griega p. Por lo tanto, en muchas ocasiones la identidad así entendida no permite explicar cómo es posible que los signos transmitan auténtico conocimiento acerca de las cosas —como resulta propio de los enunciados de identidad sintéticos—, y no simplemente acuerdos arbitrarios referentes a los propios signos.
>
> Frege rechaza, pues, la teoría de la identidad que mantuvo en la Conceptografía. La teoría más simple y básica de la identidad, que Frege toma entonces como punto de partida para el examen de la relación de identidad en "Über Sinn und Bedeutung", considera la identidad como una relación entre objetos, en concreto, entre un objeto y él mismo, pero ésta tampoco resulta una explicación convincente porque conduce a la siguiente paradoja de la identidad: oraciones de identidad del tipo «a=a» no se diferenciarían, en principio, de oraciones de identidad del tipo «a=b», es decir, no existiría diferencia alguna de valor cognoscitivo entre los dos tipos de oraciones, ya que en ambas se asegura la identidad del objeto consigo mismo. Es decir, la única relación semántica interesante que destaca esta teoría es la referencial, la relación que se establece entre el signo y su referente. No se tiene en cuenta la relación entre el signo y su sentido (o en términos más generales y no fregeanos, su significado). Por lo tanto, esta teoría tampoco tiene suficiente capacidad explicativa para poder indicar en qué radica la diferencia entre los enunciados de identidad analíticos y sintéticos.
>
> Finalmente, la teoría de la identidad mantenida por Frege en "Über Sinn und Bedeutung" ofrece una interpretación más adecuada de los enunciados de identidad de

tipo sintético. La identidad es entendida, entonces, como la relación de un objeto consigo mismo mediada por el sentido, que contiene la manera de darse lo denotado por el signo. Por un lado, es el sentido la noción que explica la diferencia de valor cognoscitivo entre los enunciados de identidad analíticos y sintéticos, por contener «die Art des Gegebenseins», esto es, el modo de presentación de los objetos, el cual ya no depende de convenciones o estipulaciones arbitrarias, sino de cómo de hecho son los objetos. Por otro lado, la referencia garantiza que se trate en los dos casos de enunciados de identidad, pues la referencia de las expresiones de los enunciados «a=a» y «a=b» se mantiene idéntica, en caso de ser los enunciados verdaderos.

3.1.10 Acerca de los nombres y las expresiones nominales para la designación de objetos

Como dijimos, para Frege un *objeto* es un tipo de entidad que se describe mediante expresiones saturadas (a diferencia de las entidades de tipo función que se describen por expresiones no saturadas). Por ejemplo, el planeta Venus, el número 5, pero también lo Verdadero, y lo Falso.

La designación de estos diferentes objetos se realiza mediante expresiones saturadas de diferente tipo que corresponden a dos niveles discursivos diferentes:

- los objetos como lo Verdadero o lo Falso son designados mediante *enunciados;* en tanto

- los objetos tales como el planeta Venus, el número “5”, son designados mediante *expresiones denominativas* o *descriptivas*

Por ejemplo, las siguientes expresiones:

- Jorge Luis Borges;
- El autor de *El Aleph;*
- El Director de la Biblioteca Nacional Argentina de 1955 a 1973

sirven para designar la misma persona. La primera de estas expresiones, *denominativa*, funciona como *nombre propio*[28].

Las otras dos -*descriptivas*- « el autor de *El Aleph* » y « el Director de la Biblioteca Nacional Argentina de 1955 a 1973» son *combinaciones sintagmáticas* de nombres comunes (o *descripciones definidas* según la terminología de Russell).

Frege engloba ambos tipos de expresiones, los *nombres propios* y las *descripciones definidas* bajo la expresión *nombre.*

En el área de matemática, a menudo la designación de objetos se realiza mediante la utilización de distintos sistemas semióticos –a diferencia de los objetos del mundo real para los cuales las distintas descripciones se realizan mediante el recurso de la lengua natural-.

Por ejemplo:

el número "5" puede ser designado mediante:

- el nombre propio, es decir *cinco;* o bien
- V, 5, IIIII (variando el *sistema de escritura* del número); y aún
- la solución de la ecuación $2x\text{-}9 = x\text{-}4$ (es decir mediante un tipo de sistema diferente, el de las escrituras algebraicas)
- etc.

Asimismo, es importante la distinción de expresiones que sirven para designar dos tipos de objetos, los *individuos* y las *relaciones entre individuos*[29]:

- las expresiones puramente sintagmáticas (combinación sintagmática de signos o palabras) que equivalen a un signo más simple en un sistema de escritura (como por ejemplo $2x\text{-}9$ y $x\text{-}4$), y
- las expresiones que dan relaciones entre otras expresiones ($2x\text{-}9 = x\text{-}4$)

[28] Utilizamos aquí la expresión "nombre propio" para referirnos a lo que se entiende habitualmente como asociación entre una palabra y un objeto

29 Duval (2002) analiza la diversidad de procedimientos de designación de estos dos tipos de objetos en función del nivel de expresión y el registro de representación semiótica utilizado.

Frege analiza también la *relación* entre los términos singulares y los objetos denotados, postulando que la misma se establece de *manera indirecta* por medio del *sentido*.

Por esta razón, Frege es considerado -dentro de la filósofía del lenguaje- como uno de los referentes de las *teorías descriptivas de la referencia*.

La posición de Russell al respecto parece controvertida. Según Valdés Villanueva (1995):

> Las teorías de Frege y Rusell tienen- a pesar de sus diferencias substanciales- una amplia zona de confluencia, en particular por lo que respecta al tratamiento de los nombres propios ordinarios. Ambos afirman que éstos tienen un respaldo descriptivo consistente en un conjunto de descripciones sucesivamente analizables cuando aparecen en ellas nombres propios ordinarios.

En tanto Rivas (1996) afirma:

> En relación a los nombres propios, Russell (1905) estableció que el significado de los nombres propios consiste en su referencia. En términos de la teoría fregeana esto se traduce diciendo que el sentido de un nombre propio se reduce a su denotación, al objeto que designa.

A nuestro entender, esta contradicción es sólo aparente, y se debería al significado que los autores otorgan a la expresión “nombre propio”.

Valdés Villanueva (ibid.), aclara este punto:

> (...) Bertrand Russell coincide con Frege en lo que concierne a los nombres propios ordinarios y las descripciones definidas, considerando que la relación con la referencia se da de manera indirecta a través de las descripciones. Se aparta de Frege en lo que concierne a lo que él llama nombres propios genuinos tales como los deícticos “esto” o “yo” cuya relación con la referencia es directa.

La relación referencial de los nombres propios ha sido estudiada por diferentes autores. Para muchos, el significado del nombre propio se reduce a lo que designa, es decir que un nombre propio tiene una denotación pero no tiene *sentido*.

Autores posteriores partidarios de esta postura -por ejemplo Kripke (1995), y Putnam (1995)- dieron lugar a la teoría de la *referencia directa*. Para estos autores, « Venus » se distingue de las otras designaciones (descriptivas) utilizadas para designar al planeta Venus en tanto, como nombre propio, remite **directamente** al objeto.

Valdés Villanueva (ibid.), aporta una aclaración importante:

> No obstante, debe precisarse un poco este rótulo que, en algunos aspectos, resulta desorientador. Pues la teoría de la referencia directa no afirma que la relación entre nombre y nominata no pueda estar mediada de modo alguno, sino que se limita a la afirmación más cauta de que no es el sentido de una expresión, su modo de presentación en términos fregeanos, lo que lleva a su referente (...)

En relación con este punto, Duval aclara su postura en el contexto de analizar la diversidad de las prácticas de designación de objetos en contextos discursivos y las operaciones sobre las que ellas reposan. La más elemental, la que funciona como *nombre propio*, consiste en "*la simple asociación local entre un signo y un objeto*", lo que significa para este autor:

- el signo "nombre propio" tiene un sentido independientemente de los otros signos
- es la referencia al objeto arbitrariamente designado por un signo "nombre propio" lo que constituye su sentido

Creemos conveniente señalar que a menudo el nombre propio tal como es utilizado en matemática constituye la expresión más « condensada » para designar un objeto, la que proviene de aglutinar sintagmas nominales descriptivos. Es el caso de los nombres de algunos números como « 17 » (notar que en la formulación oral « diecisiete » da cuenta del *sentido* del nombre). Otros nombres de números (once, doce, trece, catorce, quince) ocultan su *sentido* original pero aun así lo condensan (on-ce). Cabe agregar que este tipo de nombre como « diecisiete » se apoya en la numeración decimal de un numeral, en este caso « 17 », que tiene un *sentido* que depende de la *base* (Duval, 2002).

Por esta razón, estos nombres de números no deberían tomarse como nombres propios: el "nombre propio", en tanto asignación arbitraria entre un signo y un objeto singular, por su propia naturaleza designativa carece de significado lingüísticamente construido.

Pocos nombres de números merecen considerarse como nombres propios: *e*, *i* y π. Estas escrituras no pertenecen a ningún sistema: su *sentido* no se constituye por *oposición* a otros signos, sino que se reduce a la *referencia*.

Finalmente, es de destacar que también la *referencia d*epende de la base. El hecho habitual de trabajar en base diez hace olvidar este hecho: se consideran los nombres de números como *nombres propios* justamente por eso, por considerar que el objeto singular está *determinado* (Duval, ibid.).

3.1.11 Límites de la teoría de Frege

Hemos discutido aquí profundamente el interés de la noción de *sentido* desarrollada por Frege para explicar el progreso del conocimiento.

Ahora bien, la captación del *sentido* de una expresión en su teoría se realiza según nuestro análisis de manera diferencial, por comparación con otra expresión con la misma denotación. Efectivamente, cuando es posible identificar la misma denotación en dos escrituras (como “la estrella de la mañana” o “la estrella de la noche”), se dice que las mismas tienen diferente *sentido* (por definición).

Si se intenta captar el *sentido* sin recurrir a un procedimiento diferencial, se requiere un trabajo sobre aspectos lingüísticos que suponen desarrollos posteriores a Frege, como el de Duval de identificación de unidades significantes (ver 3.2.6) o el de Drouhard (1992) quien presenta el programa de cálculo como modo de capturar el sentido.

Por otra parte, la actividad matemática no se restringe al uso de escrituras simbólicas, sino que requiere de muchos otros sistemas semióticos.

La teoría de los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval aborda ambos aspectos no desarrollados por Frege.

3.2 Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Como hemos destacado, la distinción *sentido/referencia* fue desarrollada para las escrituras simbólicas y da cuenta del progreso discursivo característico del cálculo y el razonamiento matemático. Para expresar la dualidad *sentido/referencia* Frege utiliza ejemplos expresados en lenguaje natural -lo que constituye de alguna manera una extensión de su teoría- pero sólo con fines comunicativos.

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica está inspirada fuertemente en la teoría de Frege y aborda la complejidad de las representaciones no sólo dentro de las escrituras simbólicas, sino las que se realizan en lenguaje natural, las figuras geométricas, los esquemas, los gráficos, etc.

Un Registro de Representación Semiótica es un sistema simbólico que permite las tres actividades fundamentales ligadas a la representación:

- Constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado (*formulación*)

- Transformar las representaciones de acuerdo con las reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones dentro del mismo (*tratamiento*)

- Convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en representaciones en otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado (*conversión*)

En esta teoría, el objeto matemático es el "*invariante de todas sus representaciones semióticas*". El acceso a un objeto matemático supone una diversidad de sistemas semióticos para describirlo y la aprehensión conceptual del objeto depende del acceso y articulación de dichos sistemas. En términos más generales, estas ideas se plasman en la hipótesis de Duval de que *no hay noesis sin semiosis*, y de que la semiosis determina las condiciones de posibilidad y ejercicio de la noesis.

Desde el punto de vista cognitivo, esta hipótesis compromete a la noción misma de representación. Duval (1993) precisa las condiciones para que una representación *funcione como tal.*

Allí se pregunta bajo qué condiciones un numeral, o un dibujo, por ejemplo, funcionan como representaciones de los objetos matemáticos correspondientes (número, y figura respectivamente), y afirma:

> (...) es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de ellas. Es bajo esas dos condiciones que una representación funciona verdaderamente como representación, es decir que ella proporciona el acceso al objeto representado

Bajo estas condiciones, y en virtud de que un objeto puede ser representado de diferentes maneras expresando diferentes propiedades del objeto, es posible acceder al objeto como "*invariante de todas sus representaciones*" y se pueden garantizar las diferentes operaciones de sustitución ligadas al razonamiento y el cálculo por medio de las *transformaciones semióticas* que conservan la *denotación* (ver 3.2.4).

3.2.1 Diferencia entre *lengua* y *registro* de representación semiótica

Los lenguajes son sistemas de representación semiótica *particulares*, cuya definición puede ser de tipo *estructural* o de tipo *funcional*. La definición más conocida en el ámbito de la matemática es la definición *estructural* adoptada por los lógicos, según la cual un lenguaje es un conjunto (infinito) de fórmulas bien formadas.

Duval (1995) adopta una definición *funcional*, basada en un análisis de las *funciones discursivas* necesarias para que un discurso sea posible. Establece que un sistema semiótico es una lengua cuando permite cumplir las siguientes *funciones discursivas*:

- Designar los objetos

- Decir algo de los objetos que se designan bajo forma de una proposición enunciada

- Ligar la proposición enunciada a otras proposiciones en un todo coherente (descripción, inferencia)

- Señalar el valor, el modo o el status acordado a una expresión por quien la enuncia (esta condición es a veces omitida)

Cabe peguntarse si los distintos sistemas de representación son lenguas o no. Según la definición de Duval el sistema de numeración es un registro semiótico pero no es una lengua, a diferencia de las escrituras simbólicas del álgebra elemental que sí son una lengua, si se omite la última condición (Drouhard &Panizza, 2012).

3.2.2 Noción de *contenido* de una representación semiótica

Una noción fundamental es la de *contenido* de una representación semiótica, que se refiere a *la* o *las* propiedades del objeto que la representación *explicita*.

Toda representación tiene un *contenido* que explicita ciertas propiedades del objeto y no otras. La posibilidad de acceder al objeto –invariante de todas sus representaciones- reside en primer lugar en la potencia de los diferentes sistemas de representación para expresar las *diferentes* propiedades y características de un objeto. Esto es especialmente importante en el área de matemática, en la que el acceso a los objetos se realiza *exclusivamente* a través de las representaciones.

De la misma manera que el *sentido* de Frege, el *contenido* de una representación está siempre ligado a las posibilidades y limitaciones del sistema de signos en el que es expresado. Los diferentes registros semióticos poseen características muy diferentes en cuanto a las posibilidades de expresión. Por estas razones y porque toda representación es necesariamente parcial, la posibilidad de describir las diferentes propiedades está basada en las posibilidades de los diferentes registros semióticos para expresar *contenidos.*

Desde el punto de vista cognitivo, la necesidad de los diferentes registros no es debida *solamente* a la posibilidad de expresión de los diferentes contenidos, sino a la necesidad de distinguir un objeto de su representación. Si se dispusiera o se utilizara solamente un registro de representación podríamos anticipar las siguientes limitaciones ligadas a la cognición:

- una tendencia natural a identificar o confundir el objeto con la representación, es decir que ésta no funcionaría como tal ("La inclinación bastante extendida actualmente de no reconocer como objeto lo que no puede ser perceptible con los sentidos induce a tomar los signos numéricos por los números (...)" (Frege; 1974, cap. I);

- de manera vinculada a lo anterior, sería posible acceder solamente a las propiedades del objeto expresadas por dicha representación;

- las posibilidades de objetivación y tratamiento de la información estarían limitadas a las de ese registro; y finalmente

- los razonamientos se "encerrarían en puras tautologías" (ver 3.1.8).

Muy por el contrario, el acceso al "*invariante de todas sus representaciones*", o -en otras palabras, la *identificación del referente*- y la posibilidad de razonar suponen la capacidad de reconocimiento del objeto en cada una de sus representaciones.

Ahora bien, si la diversidad de representaciones es necesaria, también presenta sus propios problemas a la cognición.

En relación con el reconocimiento de un objeto, Duval (2007) se pregunta:

> ¿Cómo se puede saber que dos representaciones diferentes representan o no el mismo objeto?

especialmente en el área de matemática, donde los objetos no son accesibles directamente a través de los sentidos sino solamente a través de *representaciones semióticas* del mismo. Para poner en evidencia la dificultad cognoscitiva que supone este reconocimiento, lo compara con el caso de disponer de un *acceso directo* al objeto o bien de una representación *no semiótica* del mismo (como una foto, o un dibujo, por ejemplo) (ver también Duval, 2009). Su análisis lo lleva también a la necesidad de distinguir distintos tipos de representaciones.

3.2.3 Distintos tipos de representaciones semióticas según Duval

Para responder la pregunta anterior, Duval realiza un análisis en base a dos criterios: el de "l*a manera en que las unidades de sentido, constitutivas de las representaciones semióticas, se organizan entre ellas*", y el *"relativo a la naturaleza de los tratamientos posibles, es decir las transformaciones de una representación semiótica en otra del mismo tipo...*".

Distingue así:

- según el primer criterio las *representaciones discursivas* producidas por los lenguajes, de las representaciones *no- discursivas*; y

- según el segundo criterio las representaciones que pueden ser transformadas algorítmicamente dentro de un registro (como las expresiones algebraicas) de aquellas que no lo permiten (como los enunciados en lengua natural).

El cruce de estos dos criterios produce cuatro categorías relevantes ligadas a la posibilidad de *transformación* de una representación en otra, y al *reconocimiento* de un objeto matemático en sus diferentes representaciones semióticas (ver también Duval, 2006b).

3.2.4 Las transformaciones semióticas: *tratamientos* y *conversiones*

Las *transformaciones semióticas* son operaciones entre diferentes representaciones de un objeto matemático, cada una expresando un *contenido informativo particular*. Dicho de otra manera, una *transformación semiótica* opera sobre una representación obteniendo otra representación que respeta la invariancia de lo que es representado (es decir conservando la *denotación*) que explicita otras propiedades del objeto. Según Duval (2007) la noción central no sería la de *representación* sino la de *transformación semiótica*:

> (...) el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones semióticas sino la capacidad de pasar de un registro de representación semiótica a otro registro

Así, con las *transformaciones semióticas* adquiere importancia fundamental el criterio de "*la posibilidad de los signos de ser transformados en otras representaciones*" (presentado en 3.1.3). Esta posibilidad es la que ha de permitir el razonamiento mediante sustituciones de tipo *transformación semiótica*, independizándose durante ese proceso de los objetos de referencia de los enunciados.

Las *transformaciones semióticas* de esta teoría son los *tratamientos* y las *conversiones*. Se trata de una distinción fundamental para el análisis didáctico. Como mostraremos en el capítulo 5 el **tipo de *transformación*** es una primera variable didáctica de naturaleza semiótica a considerar en los análisis de tareas matemáticas.

Por su naturaleza, estas *transformaciones* suponen dos tipos diferentes de procesos cognitivos. Los *tratamientos – transformaciones semióticas* dentro de un mismo registro- obedecen a *reglas internas* del registro y *son reversibles* a la manera de un cálculo. Las *conversiones* movilizan dos registros de representación y en general *no hay* reglas para realizarlas; tanto la *conversión directa* como su *reversibilidad* requieren de la identificación de *unidades significantes* en ambos registros.

Algunas actividades matemáticas son reconocidas fácilmente como *conversiones.* Es el caso por ejemplo de la representación gráfica de una ecuación. La misma expresión "representación gráfica" da cuenta explícitamente del carácter semiótico de la actividad y del tipo y sentido de la transformación operada (*conversión*) entre el registro de las escrituras algebraicas en el que se escribe la ecuación, y el sistema de coordenadas cartesianas.

Otras actividades tales como la modelización algebraica de problemas o el análisis de la definición de un objeto matemático -entre otras- pueden ser vistas como o requieren de *tratamientos* o *conversiones,* pero este carácter semiótico no es reconocido con tanta facilidad como en el caso de la representación gráfica:

- **la modelización algebraica de un problema**. Duval (1995) lo explica de esta manera:

> El planteo en ecuación de los datos de un problema es la conversión de diferentes expresiones lingüísticas de relaciones en otras expresiones de esas relaciones en el registro de una escritura simbólica

- **la definición de un objeto matemático** por medio de una proposición se formula utilizando « representaciones compuestas » por escrituras simbólicas y lenguaje natural (Laborde, 1992). La utilización y la comprensión de la misma demandan –en general de manera implícita- el *tratamiento* del *definiens* y/o su *conversión* a diferentes registros de representación, discursivos y no-discursivos.[30]

En otros términos, diferentes tipos de problemas matemáticos suponen o requieren *conversiones semióticas,* lo que no es en general evidente. Los *tratamientos,* en cambio, son más reconocidos como *transformaciones semióticas,* en la medida en que las reglas que los legitiman son reglas *propias de un sistema* que garantizan la invariancia referencial, aunque esto se expresa con otra terminología en el ámbito matemático. Es el caso por ejemplo de la resolución de ecuaciones por medio de transformaciones algebraicas, que se expresa diciendo que "las reglas algebraicas conservan el conjunto solución".

Duval (2007) expone las razones *negativas* que lo conducen a elegir la palabra *conversión* para este tipo de *transformación,* fundamentalmente por *oposición* a las actividades de *codificación* y de *traducción*:

> La noción de conversión se opone a la de codificación porque las operaciones que permiten convertir en un sentido no son suficientes para encontrar la representación de

[30] Esto es estudiado especialmente en nuestra tesis. En el capítulo 5 estudiamos en profundidad este aspecto de la definición, junto con otras actividades que requieren implícitamente *transformaciones semióticas*, tales como el reconocimiento de objetos

> partida. Se opone también a la de traducción porque el pasaje se hace entre sistemas de representación que son heterogéneos

Dicho de otra manera, la elección de la palabra se impone "*en razón de la no reversibilidad de este pasaje y el hecho de que no puede haber reglas para efectuarlo*". Las *conversiones* y su *reversibilidad* suponen la discriminación de correspondencias, de categorías semánticas.

Es importante profundizar en estas ideas desde el punto de vista teórico, precisando las características de las *conversiones* semióticas, las que, a nuestro entender, se confunden en las prácticas de enseñanza con las actividades de *codificación* y de *traducción.*

Finalmente, Duval problematiza la elección de la palabra "conversión" para designar el tipo de transformación particular que consiste en cambiar la representación de un objeto en un sistema por otra representación en otro sistema, y dice:

> La elección de una palabra para designar la transformación que consiste en cambiar la representación de un objeto pasando de un sistema de representación a otro no es neutra. Esta elección compromete, implícita o explícitamente, una hipótesis sobre la naturaleza de los procesos cognitivos que hacen a un sujeto capaz de efectuar un tal cambio y también sobre el lugar de los mismos en el conjunto del funcionamiento del pensamiento. Dicho de otra manera, la elección de una palabra no reenvía solamente a la manera de calificar una clase particular de proceso, sino que la manera en que uno la califica es también una elección sobre la manera de situarla entre los otros tipos de procesos cognitivos permitiendo el ejercicio del pensamiento y el desarrollo del conocimiento: proceso periférico o proceso central, condición o consecuencia, etc. Aquí uno no va solamente de la palabra al concepto sino de una palabra a un modelo o una teoría.

No presentaremos aquí el análisis que realiza el autor sobre los distintos modelos de funcionamiento cognitivo, basado en la distinción del papel que estos modelos otorgan a la *conciencia* en los procesos de producción del conocimiento. Para nuestro propósito, deseamos destacar que el análisis del funcionamiento cognitivo conduce a este autor a proponer un tercer modelo y que en este modelo la expresión "conversión" de representaciones es significativa tanto de la elección de la palabra como de la necesidad de superar los modelos vigentes.

3.2.5 *Transformaciones semióticas* y aprendizaje

Las *transformaciones semióticas* favorecen la adquisición del objeto como *invariante de todas sus representaciones*, en la medida en que permiten la observación de las distintas representaciones del mismo objeto en diferentes registros.

Ahora bien, la realización de *transformaciones semióticas* requiere una coordinación de registros al punto tal de ser capaz de realizarlas de manera que *escapan* a la conciencia. Esto es lo que ocurre con el experto en matemática: realiza *tratamientos* y *conversiones* de manera espontánea y aún que escapan a su conciencia, a diferencia de los alumnos, que no disponen en principio de la capacidad para articular diferentes registros.

Duval (1993), señala:

> La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión

La enseñanza toma a su cargo explícitamente la enseñanza de las reglas de *transformación* propias de diferentes registros de representación, muy especialmente las reglas de los distintos sistemas numéricos y las de las escrituras algebraicas, y las pone en juego a través de los cálculos y la resolución de ecuaciones. Sin quitar importancia a la dificultad propia de estos aprendizajes, hacemos notar que el hecho de que se trate de reglas de *un* sistema hace posible la concepción de una génesis artificial de las mismas de manera ordenada y exhaustiva.

No es el caso del desarrollo de la capacidad para realizar *transformaciones semióticas* de tipo *conversión*, en la medida en que generalmente las mismas no son gobernadas por reglas, y requieren la necesidad de identificación de unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada. Por esta razón, la concepción de un programa de enseñanza que tenga en cuenta la complejidad de la *conversión* de representaciones requiere la identificación de variables cognitivas y didácticas de diferentes naturaleza -problema que abordamos especialmente en esta tesis- (ver capítulos 4, 5 y 6).

3.2.6 La identificación de *unidades significantes*.

Duval (1995) describe así las dificultades para la discriminación de unidades significantes en un contexto de conversión:

> (...) La dificultad propia de la actividad de conversión reside esencialmente en esta discriminación: en efecto, de un registro a otro la naturaleza de las unidades significantes y el modo de discriminación cambia. Hay registros:
>
> - con unidades discretas como las lenguas formales;
> - con unidades no separables como las figuras y los gráficos cartesianos;
> - presentando varios niveles posibles de determinación funcional de las unidades como las lenguas naturales.

Según el tipo de registro, Duval habla de unidades *figurales* o de unidades *discursivas*.

Estas unidades *dependen* del sistema de representación, pero *no son* determinadas de antemano por el mismo, *ni* constituyen elementos de partida con los que se construyen las representaciones. Es a partir de una representación y en *función* de las *transformaciones semióticas* a realizar en una tarea que se distinguen y discriminan las unidades significantes. Otro nivel de determinación está dado por el conocimiento de quien lo realiza.

En Duval (ibid.), afirma:

> Aun en los registros con unidades discretas, como las lenguas, las unidades significantes que componen una representación, es decir un enunciado, una fórmula o un texto, no aparecen separada e independientemente unas de otras. Simplemente porque la segmentación de estas representaciones en unidades significantes es esencialmente funcional y porque estas unidades pueden ser tanto palabras o símbolos, como reagrupamientos de palabras o símbolos. Y para los registros con unidades no

> separables como las figuras o los gráficos cartesianos, una identificación previa e individual de unidades significantes resulta totalmente inoperante y ambigua.

Según nuestro análisis, este método de discriminación no está ligado solamente a la necesidad de realizar tareas de *conversión* de representaciones, sino al interés de captar el *contenido mismo* de una representación. Para ello, Duval propone un análisis del *contenido* de una representación en base a la identificación de *unidades significantes* y su composición sucesiva en *unidades significantes* de nivel superior.

3.2.7 Relaciones entre *sentido* de una expresión y *contenido* de una representación semiótica

Como ya hemos analizado a lo largo de este capítulo, la distinción *sentido/referencia* muestra su importancia para explicar los progresos discursivos de tipo razonamiento y de tipo cálculo. La misma permite comprender el funcionamiento de ambos tipos de procesos en una dimensión que comparten: las substituciones de una expresión por otra en un razonamiento o en un cálculo significan continuidad y novedad a la vez, los que se dan mediante un cambio de *sentido* e *invariancia referencial*.

La Teoría de Registros de Representación Remiótica de Duval amplia la noción de *sentido* de Frege a través de la noción de *contenido* de una representación.

Como ya hemos dicho, la noción de *sentido* de Frege es pertinente para los lenguajes simbólicos (por ejemplo las escrituras algebraicas) y por extensión, al lenguaje natural. El progreso discursivo propio de los razonamientos ligados a un lenguaje se da a través de un cambio de *sentido* e *invariancia referencial* dentro de una lengua particular (lenguaje simbólico o lengua natural).

La noción de *contenido* de una representación es apropiada para todos los registros semióticos (no sólo las lenguas), y para las transformaciones dentro de un mismo sistema (*tratamientos* según Duval) o por *conversión* a otro sistema. La noción de *contenido* es pertinente para explicar el progreso de un razonamiento realizado mediante sustituciones progresivas de representaciones dentro de un registro o entre distintos registros (no necesariamente discursivos) que expresan diferentes *contenidos* del mismo objeto.

3.2.8 Posibilidades de los signos de ser transformados en otras representaciones semióticas

Como ya hemos anticipado, para Duval la noción central no sería la de *representación* sino la de *transformación semiótica*. Su análisis de la exigencia matemática concerniente a los signos está especialmente ligado al criterio centrado en « (…) *sus posibilidades [de los signos] de ser transformados en otras representaciones semióticas*» (Duval, 2006a).

Encontramos –entre otros análisis más o menos específicos del uso de los signos en la actividad matemática- especialmente significativo el análisis que realiza en Duval (2002), en tanto es posible ver la evolución de sus ideas a la luz de sucesivos aportes posteriores a Frege.

En dicho artículo, bajo la pregunta ¿*qué es lo que constituye el « sentido » de los signos*? presenta en primer lugar el aporte de Frege dado por las dos componentes del signo (la *referencia*, y el *sentido*) según hemos presentado y analizado ya en este capítulo.

A continuación, analiza el significado de los signos según pertenezcan o no a un sistema semiótico.

Para el primer caso, utiliza el criterio de Saussure (1973) según el cual el significado de los signos dentro de un sistema se define por *oposición* a otros signos:

> La manera en la que un signo permite designar o aun representar depende del sistema semiótico utilizado; los signos no significan por sí solos sino por oposición a otros signos en lugar de los cuales pueden ser elegidos. Dentro de un sistema semiótico, el sentido de un signo es definido como el conjunto de elecciones posibles al cual él corresponde para designar alguna cosa. El modelo más elemental de elecciones posibles es el lenguaje booleano que se reduce a dos signos, determinando solamente dos elecciones posibles en cada lugar de la expresión formada. Los sistemas de numeración

> son sistemas más complejos en la medida en que la posición de los signos es también tomada en cuenta como un valor de elección, es decir como un signo: cada posición tiene un valor por oposición a las otras posiciones. Así el carácter “1” no es el mismo signo en un sistema binario que en un sistema decimal. Finalmente el sistema más complejo, aquel quizás del cual los otros derivaron, por lo menos de aquellos sistemas que permiten una expansión discursiva, el cálculo siendo una de las formas de expansión discursiva, es la lengua natural (Benveniste, 1974 p.60-61).

En relación con los signos que no pertenecen a un sistema semiótico, afirma:

> Sin embargo, en matemática, hay signos que no dependen de ningún sistema semiótico. Es el caso particular de la mayoría de las notaciones matemáticas de función, de operadores... El sentido de estos signos no comporta ningún valor de oposición a otros signos. Históricamente, su aparición se hizo por otra parte de manera independiente y puramente contingente (Freudenthal, 1981). Los llamaremos “signos libres”. Ahora bien, el punto importante para nuestro propósito es que estos signos no tienen más que una componente de sentido y no dos como los signos de sistemas de numeración o las palabras de la lengua. Su sentido se reduce a una designación pura, un poco como para los nombres propios. Naturalmente la tentación es grande, cuando se trata de describir la actividad matemática, de no considerar como signo o como representativo del rol de los signos en el funcionamiento cognitivo, más que los signos libres que podremos llamar igualmente signos “degenerados”. Esto conduce por ejemplo a ocultar completamente la diversidad de las prácticas semióticas para designar objetos, encontrándose éstas reducidas a la sola práctica de la designación directa por pura asociación exclusiva y convencional como en un etiquetaje. Y esto contribuye a tornar incomprensible la designación directa por un sistema semiótico y, a fortiori, la designación funcional.

En ese mismo artículo, los aportes de Frege y de Saussure para responder a la pregunta inicial se completan con conceptos inherentes a la noción de sintaxis:

> (...)Un signo no funciona verdaderamente como signo más que en la medida en la que él puede ser combinado con otros signos en operaciones de composición o de substitución. Es esto lo que hace posible todas las operaciones de tratamiento de las cuales el cálculo y el razonamiento son las formas más típicas. Dicho de otra manera el interés de un signo no es solamente, o no lo es desde el vamos, de evocar alguna otra cosa sino, a través del juego de su composición con otros signos, de permitir las transformaciones de

representación. Así los índices, vestigios o trazas, no pueden ser puestos en el mismo plano que los signos, como las diferentes triparticiones de Pierce tienden a hacerlo creer. Porque no solamente la producción de los índices no es intencional, sino que los índices no se componen entre ellos para permitir una actividad intencional de expresión o de tratamiento. Para nuestro propósito, este tercer dato reenvía a la posibilidad de los signos de designar objetos no solamente por la asociación de un signo a un objeto al cual uno tendría acceso independientemente de toda actividad semiótica, sino por composición de varios signos como en las designaciones funcionales o las expresiones definidas.

3.3 Reflexión final sobre la relación de este marco teórico con los procesos de definición de objetos matemáticos

Para una reflexión final, tomaremos en préstamo una vez más una idea de Duval, esta vez acerca de su noción de *objeto matemático* como « *invariante de todas sus representaciones*». En Duval (2009), justifica esta elección de la noción de objeto, analizando la *exigencia epistemológica* que plantea la necesidad de un modo indirecto de acceso a los objetos matemáticos a través de sus representaciones.

A manera de conclusión reflexiona sobre la relación entre esta *exigencia epistemológica* y la *exigencia propiamente científica* que plantea la necesidad de la demostración en matemática. Según la exigencia científica, «no hay objeto matemático sino al término de lo que se ha establecido por demostración». Sin embargo, la experiencia con los objetos a través de sus representaciones es necesaria, y sin esa experiencia « los procesos de prueba no serían ni siquiera concebibles (…) ».

En analogía con el análisis de Duval, nosotros comparamos esa *exigencia epistemológica* con la *exigencia propiamente científica* que plantea la necesidad de *definición* en matemática: *tampoco* hay objeto matemático sino al término de lo que se ha establecido por definición.

Sin embargo, los procesos de definición no serían siquiera concebibles sin la experiencia con los objetos a través de sus representaciones. Cuando el contexto teórico de presentación de un objeto matemático es implícito como en la enseñanza elemental, las diferentes representaciones de instancias particulares del objeto, la observación y el análisis del *contenido* de las distintas representaciones y su *articulación*, son la *condición de posibilidad* de definición de dichos objetos. Es por ello que sostenemos que las *representaciones semióticas* y sus *transformaciones* forman parte de los *procesos de definición* de los objetos matemáticos. Es por eso también que nuestro objeto de investigación es el del *rol* de las *transformaciones semióticas* en los *procesos de definición* y no el de *la definición* de objetos matemáticos en sí misma.

4 Estudio empírico

4.1 Introducción

Los trabajos que componen el Estudio Empírico están orientados a observar en los procedimientos de los alumnos, cómo se manifiestan las *operaciones constitutivas* de los *procesos de definición* de objetos matemáticos. Entre las más importantes, las operaciones de *reconocimiento*, *observación*, *descripción* y *denominación*. Según el marco teórico de Duval, estas operaciones requieren la articulación de diferentes registros de representación. En primer lugar, porque el *reconocimiento* de objetos matemáticos en un registro determinado presupone implícitamente *tratamientos* y *conversiones* a otros registros ("Ah! Se trata de un círculo!" -al observar una ecuación del mismo- por ejemplo). La operación de *descripción*, a su vez -de un objeto o de una relación matemática- desde el punto de vista semiótico puede ser pensada como una *conversión*: se trata de expresar el *contenido* de una representación o parte del mismo, en otro registro. Ahora bien, como mencionamos en el Capítulo 1, los alumnos no realizan en general los tratamientos semióticos adecuados requeridos por esas operaciones, lo que tiene consecuencias sobre las definiciones y razonamientos matemáticos. En este Estudio Empírico buscamos identificar fenómenos asociados a tales operaciones a través del estudio tanto de los procedimientos espontáneos como de aquellos que mediante tareas diseñadas solicitan explícitamente una articulación de registros.

Para ello, a través de diferentes tipos de estudio, observamos los procedimientos de los alumnos ante tareas de muy diferente naturaleza y en contextos matemáticos diversos (análisis de enunciados algebraicos, descripción de propiedades numéricas, descripción de una curva funcional, definición de un objeto geométrico). Establecemos luego relaciones entre los diferentes estudios, encontrando puntos en común entre los fenómenos identificados en las diferentes áreas de conocimiento.

A grandes rasgos, avanzamos que los resultados se ubican en torno a tres cuestiones:

- los procedimientos ligados al análisis de *enunciados generales* (en lenguaje simbólico y/o natural);
- las generalizaciones que realizan los estudiantes a partir de la observación e identificación de rasgos de objetos;
- las descripciones verbales y simbólicas que hacen de sus observaciones y los efectos de estas descripciones sobre las definiciones de los objetos y los razonamientos matemáticos.

4.2 Aportes teóricos incorporados en este capítulo

En este parágrafo vamos a comentar brevemente los diversos aportes teóricos que hemos incorporado en este capítulo por su interés para la interpretación de las producciones de los alumnos.

Dentro del marco teórico general provisto por la Teoría de los Registros Semióticos de Raymond Duval hemos utilizado la noción de *lengua* (ya presentada en 3.2.1) y el *Esquema de Niveles de articulación Discursiva del Sentido en Lengua Natural* (Duval, 1999). Otros desarrollos específicos relativos al uso de una lengua han resultado también pertinentes, especialmente la noción de *tematización lingüística*. Estos aportes han resultado de interés para la interpretación de los procesos discursivos de los alumnos.

Otros aportes teóricos han sido tenidos en cuenta por su pertinencia para interpretar los procedimientos de *observación*, *reconocimiento* y *descripción* de objetos matemáticos y los procesos de *categorización* y *definición espontáneos* de los alumnos:

- la concepción de categoría y categorización por prototipos (Rosch, 1973, 1976; Kleiber, 1990)
- la noción de *definición típica* (o *característica*) de Duval (1995);
- la noción de heurístico de representatividad de Tversky and Kahneman (1974)

- La teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997)

A continuación hacemos una breve síntesis de los aspectos de estas teorías especialmente tenidos en cuenta en nuestro análisis.

4.2.1 Esquema de Niveles de articulación Discursiva del Sentido en Lengua Natural

En el *Esquema de niveles de articulación discursiva*, Duval (1999) detalla las focalizaciones posibles de la actividad de expresión de un sujeto y sus desplazamientos. Destaca que el punto fundamental a retener es que *un discurso depende de aquello sobre lo que la actividad de expresión de un sujeto puede encontrarse focalizada.* Dos factores cognitivamente independientes que explican la diversidad de focalizaciones posibles deben ser tenidos en cuenta:

1. los *dos lados* posibles de todo discurso (*de re/de dicto*), esto es, el lado de los *objetos* y el lado de la *formulación*; y

2. los *distintos niveles* posibles de articulación discursiva en lengua natural.

El diagrama siguiente es una versión simplificada del Esquema; en particular omitimos lo que corresponde a los posibles *desplazamientos* de la focalización de la atención:

	***DE RE* (del lado de los objetos)**	***DE DICTO* (del lado de la formulación)**
Nivel III	Un mundo	Unidad: discurso
Nivel II	Valores instaurando o modificando un estado local de conocimiento	Unidad: frase o proposición
Nivel I	Un objeto, una propiedad, una fase de acción	Unidad: sintagma

Esquema de Niveles de articulación Discursiva del Sentido en Lengua Natural

Muy a grandes rasgos, este Esquema nos ha resultado de utilidad para comprender fenómenos de razonamiento ligados al uso de la lengua natural en procesos discursivos en el ámbito matemático. Más precisamente, encontramos que en ocasiones los razonamientos analizados no tendrían las características esperadas desde el punto de vista matemático en virtud de que los alumnos no llegan a situarse en los dos lados (*de re/de dicto*) de todo discurso y/o en los tres niveles de *articulación discursiva* requeridos por el razonamiento matemático.

4.2.2 La noción de tematización lingüística

La tematización es un concepto que se refiere al conjunto de procedimientos que tienen por función sugerir, guiar, orientar, enfatizar los temas del discurso (Ducrot y Todorov, 1972).

En este Estudio, hemos utilizado esta noción en tanto y en cuanto nos ha resultado fructífera para el análisis cognitivo: ciertas construcciones gramaticales utilizadas como procedimientos de tematización de los alumnos nos han dado indicios sobre los aspectos del discurso sobre los que focalizan su atención en el marco de una tarea.

4.2.3 Concepción de categoría y categorización por prototipos

Hemos encontrado especialmente pertinentes los puntos siguientes de la concepción de la categoría y la categorización por prototipos de Rosch (Rosch, 1973, 1976; Kleiber, 1990):

- La noción de prototipo considerada como « el mejor representante» o « la instancia central » de una categoría. Este representante no es un ejemplar sino una subcategoría (como « gorrión » para la categoría de « pájaro » o « raíz cuadrada» para la de « número irracional »)

- La pertenencia a una categoría se basa en un principio de coincidencia: los ejemplares son comparados con el prototipo

Kleiber[31]**,** en relación con la teoría de Rosch, afirma:

> Los miembros de una categoría no presentan propiedades comunes a todos (como en el modelo de condiciones necesarias y suficientes, entre otros). Lo que permite reunirlos es más bien un "parecido de familia" (Wittgenstein, 1953):
>
> …Lo que los reúne son similitudes, parecidos de familia que se entrecruzan, se recubren parcialmente…

Rosch muestra que según la categorización por prototipos, no todos los ejemplares que un sujeto agrupa en una misma categoría resultan «buenos ejemplares» de esa categoría; dicho de otra manera, en las categorías existen miembros «más prototípicos» que otros[32].

Esta teoría se opone a la teoría clásica aristotélica de la categorización según la cual los elementos de una clase se definen por propiedades comunes y compartidas por todos los miembros de esa clase. En consecuencia, se opone al modo de categorizar y definir en matemática.

En nuestro estudio encontramos evidencia en el ámbito matemático del modo de categorizar identificado por Rosch y característico del razonamiento natural. Más precisamente, evidencia de pensamiento en términos de *instancias* típicas así como del *reconocimiento* y *agrupamiento* en base a rasgos prototípicos.

4.2.4 La noción de definición típica (o característica)

Esta noción es definida así por Duval (1995)

> Las definiciones características son las definiciones que entre las propiedades que entran en la definición de un objeto, seleccionan la que permite identificarlo de manera más

31 En esta obra el autor estudia la importancia de la teoría del prototipo como alternativa a las teorías clásicas del sentido en el ámbito lingüístico

32 El hecho de que algunos individuos puedan ser más representativos que otros de una categoría condujo a Kleiber (ibid.) a formular una alternativa a la teoría standard de Rosch, según la cual las categorizaciones por tipicidad se realizarían sobre la base de grados de pertenencia. No discutimos aquí este modelo ya que el de Rosch ha resultado suficiente para interpretar las producciones analizadas en este Estudio

económica. Las definiciones características deben entonces responder o bien a un criterio de contraste con los objetos semejantes o bien a un criterio de alta frecuencia de distribución de la propiedad seleccionada. Su prueba de aceptabilidad es la rapidez de tratamiento en las situaciones en las que este objeto debe ser reconocido.

Duval (ibid.) inscribe a los "prototipos" identificados por Rosch dentro de las definiciones características, por el hecho de que en esta teoría una categoría o una clase de objetos se identifica por un objeto particular que toma valor de representante de todos los objetos de esa clase por una propiedad *perceptiva* destacable.

Este autor también identifica una característica de la definición típica -el Fenómeno de Herencia- que puede ser formulada así:

Lo que es válido para ***el ejemplar típico*** *es válido para todos los elementos de la clase*

Ahora bien, según Kleiber, los procesos de *categorización* y los procesos de *denominación* son distinguidos teóricamente al punto de que sus desarrollos corresponden a disciplinas tan diferentes como la psicología y la lingüística. Sin embargo, desde nuestro marco teórico, estos procesos se vinculan estrechamente y no se otorga una preexistencia a uno respecto del otro. En nuestras observaciones -como se verá-, la lengua natural no interviene en la constitución de los objetos (recién) en el momento de *denominarlos*, sino desde el momento en que se analizan objetos individuales, observándolos, encontrando sus características y describiéndolas. La *definición característica* debida a Duval implícitamente da cuenta de la relación entre la *categorización* y la *denominación* como partes de un mismo proceso.

4.2.5 La noción de heurístico de representatividad de Tversky and Kahneman

Otro elemento teórico de interés es el de « heurístico de representatividad » de Tversky y Kahneman (1974), según el cual

> Una persona, una cosa o un evento será considerado miembro de una clase a cuyos miembros estereotipados se parece, sin considerar ninguna otra información

Este heurístico es identificado por los autores como una de las estrategias según las cuales los seres humanos juzgan la pertenencia o no de cosas o eventos a una categoría de manera más bien intuitiva y sin tener en cuenta ninguna otra información relevante. Según los autores, las personas utilizamos este heurístico como un recurso de economía del pensamiento, en lugar de usar reglas formales y rigurosas que podrían demandar tiempo y esfuerzo.

De gran utilidad en la vida diaria, esta estrategia de clasificación conlleva naturalmente sesgos importantes y la posibilidad de llegar a conclusiones erróneas.

Su aplicación para interpretar actividades de clasificación y categorización en matemática nos ha resultado de interés junto con la categorización por prototipos de Rosch y la definición característica de Duval.

4.2.6 La teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau

Esta teoría ha sido utilizada en primer lugar para diseñar una actividad de *conversión* de registros en un contexto de comunicación (Estudio II). Los recursos provistos por la teoría han servido para interpretar los procedimientos de los alumnos especialmente en la etapa de validación. En términos más generales, hemos comparado este contexto de comunicación con otro tipo de actividades que demandan una articulación entre registros para describir un objeto observado, desde el punto de vista de las posibilidades de control por *conversión* de representaciones.

Presentamos a continuación los diferentes estudios, e identificamos fenómenos destacando que los mismos se manifestaron ante tareas de diferente naturaleza y en relación con objetos matemáticos de diferentes áreas (aritmética, álgebra, geometría). En la última parte del Estudio sintetizamos los puntos en común encontrados.

4.3 Estudio sobre el razonamiento en álgebra

4.3.1 Presentación

A través de un estudio anterior nos propusimos producir conocimiento sobre las condiciones de nacimiento y desarrollo de las estrategias propias del razonamiento matemático en álgebra.

Los análisis epistemológicos y cognitivos nos llevaron a comenzar por los problemas ligados a la generalización en el dominio del álgebra, por las siguientes razones:

- la importancia que tiene la generalización en álgebra, y los modos de razonamiento que se le asocian;
- la importancia de la generalización como mecanismo de aprendizaje y los problemas de control asociados.

Como comentamos en el Capítulo 1, el estudio nos condujo a distinguir las generalizaciones que hacen los alumnos cuando la tarea lo demanda explícitamente, de las generalizaciones que hacen aunque la tarea no lo demande, a las que llamamos «generalizaciones espontáneas». Los alumnos no generalizan solamente frente a « tareas » de generalización, sino que muchas de las generalizaciones que realizan se producen en otros contextos (Panizza, 2005, 2010).

Encaramos entonces un estudio a fin de identificar los contextos de emergencia de estas «generalizaciones espontáneas» y de establecer criterios para analizarlos. El estudio nos condujo a establecer una tipología de «generalizaciones espontáneas», según la cual, -para un sujeto particular en un momento particular-, una generalización espontánea puede ser de naturaleza:

- Conceptual (basada en el contenido conceptual de un enunciado)
- Lógica (basada en una incomprensión de los conectores lógicos o de las reglas de razonamiento)

- Semiótica (basada en un análisis del *contenido* de la representación semiótica)

Una de las características encontradas es que las «generalizaciones espontáneas» son realizadas en el dominio del álgebra sin que los alumnos encuentren *necesidad de validación* de las mismas, ya sean éstas de naturaleza conceptual, lógica o semiótica.

Una particularidad de las escrituras algebraicas es que no dan el tipo de información (retroacción) característico de otros registros; por ejemplo en el marco de las escrituras aritméticas (cuando se llega a una igualdad tal como 2=3) o en el marco de la reproducción de figuras geométricas (cuando es posible la superposición de las mismas). Esto hace que la validación en álgebra sea más compleja (en 5.6 analizamos algunas particularidades del registro algebraico).

Sin embargo, esta dificultad específica, ligada a –la falta de- retroacción de las escrituras algebraicas no explica todos los aspectos ligados a la *no-justificación* de las «generalizaciones espontáneas» en el dominio del álgebra.

Es por eso que, en una segunda instancia, buscamos precisar cómo *se producen las* «generalizaciones espontáneas» en este dominio, y cómo y por qué los alumnos *no encuentran necesario* justificarlas.

En este marco encontramos algunos fenómenos que explican esos procesos y formulamos hipótesis sobre su influencia en los razonamientos realizados por los alumnos de la población estudiada (primer ciclo universitario). Según nuestro análisis, las «generalizaciones espontáneas» en el dominio del álgebra captan propiedades típicas de representaciones semióticas de pocos ejemplos y las caracterizan y describen mediante asociaciones mentales producidas en lenguaje *natural*.

4.3.2 Primer análisis: necesidad de una reformulación del problema inicial

Estos resultados nos llevaron a *reducir o matizar* lo que se considera habitualmente como « problemas de razonamiento », los que se explican a menudo en términos de capacidades lógicas o nivel de racionalidad. Más precisamente, como describimos ya sintéticamente en el capítulo 1, nos llevaron a precisar los problemas de razonamiento en términos de *capacidades discursivas* y *familiaridad* con los objetos de referencia de los enunciados. Esto nos condujo a delimitar nuestro objeto de estudio inicial. Efectivamente, encontramos necesidad de hacer sobrepasar el nivel de las «generalizaciones espontáneas» por los efectos que ellas tienen sobre la definición de objetos y el razonamiento en matemática.

A continuación mostramos esta evolución a través del análisis de un ejemplo, el caso de Brenda, que nos pareció significativo para este propósito.

4.3.3 El caso de Brenda- Relación entre procesos de categorización y denominación (definición) de objetos (Estudio I)

El problema

> "Decidir si la siguiente implicación es verdadera o falsa:
>
> $\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 > x(x+1) \Rightarrow x > 1$"

fue dado en clase para analizar la competencia algebraica para decidir la relación entre los conjuntos solución de dos inecuaciones -en un contexto de implicación-.

Al resolverlo, Brenda considera diversos ejemplos: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$ y analiza el valor de verdad del antecedente y el consecuente en cada caso.

Luego concluye, correctamente, que el enunciado es falso, porque

> «se pueden encontrar valores de x menores que 1 que cumplan $2x^2 > x(x + 1)$"

El profesor le pide que explique cómo lo pensó.

Brenda dice que

> «–2 , –3, -4 *son contraejemplos, porque para ellos el antecedente es verdadero y el consecuente es falso* ».

De acuerdo con la tarea, Brenda podría haberse detenido allí, pero ella agrega inmediatamente:

> «*ah, es* $|x|$ *lo que habría que haber puesto*! Es "$\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 > x(x+1) \Rightarrow |x| > 1$" *lo que es verdadero*! »

Después de pasado un tiempo, el profesor interviene:

> « *Mira, es verdad para* - 0,5*?* »

Brenda responde rápidamente:

> « *ah no, usted tiene razón, ¡¡¡es falso para los racionales*!!! »

El cuadro siguiente sintetiza la situación e incluye los elementos principales de nuestra interpretación

Elementos de diálogo	Interpretación
« –2, –3, -4 *son contraejemplos, porque para ellos el antecedente es verdadero y el consecuente es falso*»	1) cuando Brenda argumenta, junta todos los contraejemplos y los identifica como siendo de un cierto tipo (los números reales menores que -1) (*heurístico de representatividad*, *categorización por tipicidad*) 2) los caracteres identificados van a quedar como definición del *tipo* (*definición característica*). 3) el carácter representativo al nivel del individuo va a ser representativo de toda la población (*fenómeno de herencia*): en este caso, ser contraejemplo del enunciado 4) la expresión descriptiva utilizada (x < -1) denota un conjunto de objetos mayor que el que Brenda tuvo en cuenta en su análisis (números **enteros** menores que -1)

«*Ah, ¡Es /x/ lo que habría que haber puesto!…* …! Es "$\forall x \varepsilon R$: $2x^2 > x\ (x+1) \Rightarrow /\ x/ >1$" *lo que es verdadero*»	5) la expresión "lo que habría que haber puesto" da indicios de que está centrada en los objetos y su descripción (*tematización linguística*): en este caso $\|x\| >1$, es decir $x < -1 \vee x > 1$ 6) a continuación, Brenda sustituye la escritura « x » por la escritura «$\|x\|$» y considera que el nuevo enunciado es verdadero
« *Mira, es verdad para - 0,5?* » Brenda responde rápidamente: « *ah no, usted tiene razón, ¡¡¡es falso para los racionales*!!! »	7) hace nuevamente una « generalización espontánea», al reconocer a « -0,5 » como representativo de los números racionales (*heurístico de representatividad, categorización por tipicidad*) 8) atribuye a *todos* los racionales la falsedad de la conjetura (*fenómeno de herencia:* en este caso, todos los números racionales heredan la propiedad de ser contraejemplo del *primer* enunciado formulado por Brenda «*Ah, ¡Es $\|x\|$ lo que habría que haber puesto!…* (…)») 9) tampoco considera necesario analizar el valor de verdad del *segundo* enunciado formulado por ella: «*…¡¡¡es falso para los racionales*!!! »

4.3.3.1 Interpretación del episodio

Nos parece interesante analizar esta producción según dos puntos de vista:

- El de la generalización hecha
- El de la (no) justificación de la nueva conjetura

Para ello, nos apoyaremos en el cuadro anterior con sus elementos de interpretación

4.3.3.1.1 Análisis desde el punto de vista de la generalización hecha

Según nuestra interpretación, Brenda hace una generalización espontánea del conjunto de contra-ejemplos empleados por ella **para argumentar** ($x = -4$, $x = -3$, $x = -2$), y corrige el enunciado proponiendo una conjetura que considera verdadera.

Este tipo de generalización (de contra-ejemplos) fue estudiado por Balacheff (1987) en el marco de la refutación de una conjetura. A diferencia del problema tratado por Balacheff, en nuestro caso la tarea no demandaba encontrar una regularidad. Es por eso que decimos que Brenda realiza una «generalización espontánea».

Lo interesante en este punto es notar que Brenda *no* somete a consideración el análisis del valor de verdad de la nueva conjetura. La sustitución de « $x> 1$ » por « $|x| > 1$ » parece garantizar para ella que la conjetura es verdadera. La dificultar lógica no parece ser un obstáculo, en la medida en que desde ese punto de vista la tarea original ofrecía el mismo nivel de dificultad: Brenda hubiese podido analizar el valor de verdad de la conjetura, ya que la tarea original -que era equivalente- había sido correctamente resuelta.

4.3.3.1.2 Análisis desde el punto de vista de la (no) justificación

Presentamos aquí el análisis realizado para explicar esta conducta de Brenda:

- En primer lugar, presentamos dos interpretaciones que conciernen al proceso mismo de re(formulación) de la conjetura, que permitirían explicar que Brenda no considere necesario analizar el valor de verdad de su conjetura.

- En segundo lugar, formulamos una hipótesis sobre la (in)capacidad de Brenda para concebir otras instanciaciones del enunciado, en caso de que hubiera *reconocido* la necesidad de validación

a) Dos interpretaciones

Desde el punto de vista *matemático* o *lógico* interpretamos que para Brenda, la sustitución de « x » por «$|x|$» produce un enunciado verdadero porque **corrige** el enunciado original al sacarle la “clase” de sus contra-ejemplos (identificados y caracterizados erróneamente por ella con la expresión descriptiva “$x < -1$”). Habrá de notarse que si el conjunto de contraejemplos encontrado fuera correcto, su enunciado sería verdadero y no requeriría ser analizado desde el punto de vista del valor de verdad. Esta explicación va en el sentido de que muchos problemas que *parecen* ser de "razonamiento" se pueden atribuir a otros factores. En este caso, el de la categorización incorrecta y el proceso discursivo que condujeron a Brenda a una descripción inadecuada del conjunto de contraejemplos.

El punto de vista *lingüístico* aporta otra interpretación que puede ser complementaria de la anterior. La sustitución de « x » por «$|x|$» (o bien de « x>1» por « $|x| > 1$») se puede interpretar como un cambio de palabra, o de sintagma nominal. Esta sustitución de una expresión por otra indicaría una focalización en los objetos y sus descripciones, lo que es sostenido además por la tematización de la expresión "*Ah, ¡Es $|x|$ lo que habría que haber puesto!…*".

Esto tendría por consecuencia que Brenda no se ocupe de la compatibilidad entre las diferentes partes del enunciado -lo que sería propio en caso del análisis del valor de verdad-, por dos razones que identificamos en base al *Esquema de articulación discursiva* de Duval presentado en 4.2.1.

En primer lugar, por adoptar posiblemente un punto de vista *de re* y no *de dicto.* Según la teoría, es el punto de vista *de dicto* el que exigiría un análisis del estatuto de la expresión en términos del valor de verdad e independientemente de su contenido (en este caso los números designados).

Por otra parte, según Duval, una focalización en los objetos y su descripción ayuda a la comprensión, a la vez que puede bloquear el acceso al segundo y tercer nivel de articulación en lengua natural (ver 4.2.1). Esto explicaría que aunque Brenda *formule* un enunciado, ella no encuentre necesidad de considerarlo desde el punto de vista de su valor de verdad (como había hecho correctamente con el primero), porque su atención quedaría en el *nivel descriptivo* de los objetos (nivel inferior del Esquema) y no en el de la nueva *relación establecida* (segundo nivel).

El razonamiento matemático exige la focalización en los tres niveles, y en general la formulación de enunciados supone el acceso al segundo nivel (nivel de las proposiciones). A propósito, dice Duval (1999):

> (...) la toma de conciencia de la organización discursiva propia de todo razonamiento válido, así como el acceso al nivel de un corpus teórico de las proposiciones (definiciones, teoremas...) implican que se hayan diferenciado bien las operaciones propias de este tercer nivel de articulación discursiva (...)

b) Una Hipótesis

Aunque Brenda hubiera *reconocido* la necesidad de validación, podría no haber encontrado instanciaciones del enunciado con carácter de contraejemplo.

Esta hipótesis se basa en la idea de que la posibilidad de producir un contraejemplo está ligada al campo de los *objetos familiares* del sujeto. Los llamados por Duval (1995) *objetos familiares*, son objetos *inmediatamente disponibles* a la conciencia, y en ese sentido son candidatos a ser concebidos espontáneamente por el sujeto y sometidos a prueba para decidir si son ejemplos o contraejemplos de un enunciado.

Si Brenda hubiese visto la necesidad de justificar la nueva conjetura, no hubiese encontrado la manera de hacerlo, porque el conjunto de los contraejemplos no está constituido por *objetos familiares* para ella. Habrá de notarse que –a diferencia del enunciado original-, el enunciado propuesto por ella tiene contraejemplos –todo el intervalo [-1, 0)- que son, en general, poco disponibles para los alumnos de la población estudiada.

Otros números pueden ser conocidos pero no *familiares*, en el sentido de que pueden ser reconocidos *cuando un interlocutor* lo propone, pero no ser concebidos *espontáneamente* por el sujeto.

Es el caso de Brenda: cuando el profesor le propone el número -0,5:

« Mira, es verdad para - 0,5 ?»

ella responde rápidamente:

« ah no, usted tiene razón, ¡es falso para los racionales! »

Según este episodio podemos observar que:

- Brenda rápidamente se da cuenta de que - 0,5 es un contraejemplo de su nueva conjetura, *una vez que se lo propone el profesor*

- Realiza n**uevamente** una «generalización espontánea», al reconocer a -0,5 como representante de la clase de los números racionales (definición por prototipos)

- Atribuye a **toda esta clase** de números la propiedad de ser contra-ejemplos de la nueva conjetura (fenómeno de «herencia »)

Vale la pena notar que el enunciado por ella formulado «*es falso para los racionales*» es también falso, y que nuevamente, ella no considera necesario analizar su valor de verdad. El proceso *recomienza* tal cual, y continúa con las mismas pautas que el primer episodio analizado.

En síntesis, esta nueva «generalización espontánea» bloquea *nuevamente* la posibilidad de Brenda de quedarse con la respuesta (correcta) solicitada por el profesor, y la lleva a producir *nuevamente* una conjetura falsa a la que no somete a prueba.

Esto muestra la importancia de diferenciar los objetos que puede reconocer un sujeto cuando son propuestos por otra persona, de los que les son *familiares*, es decir que están inmediatamente disponibles a su conciencia. Esta capacidad subtiende a la posibilidad de validar enunciados y más generalmente a la capacidad de decidir los objetos *determinados* por una definición matemática.

4.3.4 Resumen del análisis

- Una generalización (implícita o explícita) implica la referencia a una formulación potencial o real; esta formulación se realiza ya sea por medio de una escritura en lengua natural ya sea por medio de una escritura simbólica.

- Para demostrar la falsedad de una formulación algebraica, la misma es sometida a análisis por medio de objetos «individuales ». Según el *Esquema* de Duval, se desciende al primer nivel, el «nivel de los individuos »; en el caso del álgebra, los números –principalmente los que nos son *familiares*-.

- Cuando se desciende al nivel de los individuos y su descripción, la corrección de la formulación algebraica se realiza con el recurso a una formulación en lengua natural.

- En lenguaje natural la generalización corre el riesgo de corresponder al procedimiento habitual fuera de la matemática, es decir de ser modulada por las características del razonamiento natural.

- Es allí donde la función de representatividad de Tversky et Kahneman, la categorización por tipicidad de Rosch y la definición característica de Duval explican que Brenda utilice el *valor absoluto* en la expresión descriptiva.

- La “corrección” de un enunciado basada en la “extracción” de los contraejemplos, puede producir enunciados falsos debido a las expresiones descriptivas *erróneas* del conjunto de contraejemplos.

- La sustitución de una expresión por otra (un sintagma nominal por otro) podría indicar una *focalización* en los *objetos* según los dos factores posibles de todo discurso:

a) Según los dos lados (de todo discurso), indicaría haber adoptado un punto de vista *DE RE* y no *DE DICTO*, ya que éste exige que el sentido de una expresión sea el de su status o de su valor de verdad independientemente de su contenido

b) Según los posibles *niveles de articulación discursiva*, indicaría una focalización en la designación descriptiva de los objetos de referencia (nivel I de organización del discurso) y *no* en la relación establecida entre ellos (nivel II).

Esto tendría por consecuencia el no ocuparse de la compatibilidad de las diferentes partes del enunciado desde el punto de vista del análisis de verdad o falsedad.

Es interesante comparar estos procesos con los de los matemáticos. Por un lado, evidentemente, porque buscamos hacer evolucionar a los alumnos hacia este tipo de racionalidad. Por otro lado, porque cuando miramos con la « mirada » de un matemático no podemos ver los mecanismos fundamentales de los estudiantes**.**

Dicho de otra manera, cuando nos situamos en la perspectiva « matemática », creemos que: cuando los estudiantes plantean una conjetura, saben que hay que validarla, y que disponen de los medios para hacerlo; cuando la conjetura es verdadera, creemos que la validaron; cuando corrigen una conjetura, creemos que han encontrado las condiciones para las cuales la conjetura es correcta.

Con el análisis que acabamos de hacer, creemos haber mostrado que los puntos de contacto del razonamiento de los alumnos con el razonamiento matemático son muchos a la vez que también son muchos y muy sutiles los factores que influyen en sus razonamientos y que es necesario explicar a fin de comprender sus procedimientos.

4.3.5 Acerca de la construcción de objetos

Por otra parte, en nuestro proyecto inicial, nos proponíamos estudiar la naturaleza de los objetos construidos a través de razonamientos no deductivos**.**

En lo que se refiere a las «generalizaciones espontáneas», pensábamos en ese momento que las relaciones establecidas a través de fórmulas, de proposiciones y de encadenamientos de proposiciones como las que acabamos analizar, pasarían a formar parte de las **propiedades** de los dominios numéricos involucrados -para aquellos sujetos que establecieran dichas relaciones y que, como Brenda, no dispusieran de mecanismos de control para validar los resultados-. Por ejemplo, para Brenda, el enunciado:

«$\forall x \in \mathbb{R}$: $2x^2 > x(x + 1) \Rightarrow x > 1$»

pasaría a ser una propiedad de los números reales; y a partir de la intervención del profesor, dejaría de ser una propiedad de los números racionales*:*

« *ah no, usted tiene razón, ¡¡¡es falso para los racionales*!!! »

y quedaría entonces como propiedad del *complemento* de los números racionales dentro de los números reales.

Dicho de otra manera, pensábamos que las conjeturas establecidas por los alumnos vendrían a **dotar a los conjuntos** (de números reales, racionales, etc.) de propiedades, la mayoría de ellas falsas, en virtud de los procesos de «generalización espontánea », generalmente establecidas sin control. Es decir, pensábamos que estas «generalizaciones espontáneas» funcionarían como la generalización en matemática, que permite concebir nuevos objetos y dotarlos de propiedades.

Ahora bien, en tanto el campo de los números reales *familiares* sean el 1, el 2, el –1, 0, - 2, -3, -4, etc. habrá de pensarse que las proposiciones establecidas son, para los alumnos, propiedades de **esos** números concebidos por ellos -en el caso de Brenda los números **enteros** menores que -1**-,** y no de **todos** los números reales, **aunque sus formulaciones** den cuenta de infinitos otros números - en el caso de Brenda "x < -1"-.

En términos más generales, en la medida en que las descripciones realizadas por los alumnos *denoten* conjuntos mayores que los que buscaron caracterizar, habrá de pensarse que las propiedades no serán atribuidas al conjunto denotado por dichas descripciones, sino *solamente* al conjunto de objetos individuales que pretendieron caracterizar.

Por otra parte, como hemos visto en el caso de Brenda, en la medida en que los sujetos queden atrapados en el primer nivel de articulación discursiva, es decir en el de los objetos y su descripción, los enunciados establecidos por ellos no han de tener el valor de *propiedades*, ya que esto exigiría focalizar la atención en el segundo nivel, el de las frases y las proposiciones.

Por estas razones, según nuestro análisis, hacemos la hipótesis de que mediante procesos de generalización espontánea con características similares a los de Brenda, no se transforma ni enriquece el dominio de los objetos**,** aunque el « discurso » se refiera a los números reales, racionales, etc.

4.3.6 Conclusiones de este estudio

Este trabajo nos condujo a delimitar nuestro objeto de estudio inicial, en la medida en que nos permitió precisar algunos aspectos del funcionamiento cognitivo del razonamiento matemático en dos dimensiones: la de los razonamientos ligados fundamentalmente a un lenguaje; y la de los razonamientos producidos sobre la base de los objetos de experiencia del sujeto (Duval, 1995).

Ambas dimensiones se ven reflejadas en los fenómenos que sintetizamos ahora del análisis realizado hasta aquí, y que concierne a las operaciones cognitivas de los alumnos frente a tareas de análisis del valor de verdad de proposiciones hechas en el registro de las escrituras algebraicas:

- Los objetos que analizan forman parte del campo de los *objetos familiares* para ellos (inmediatamente disponibles a su conciencia) y no son representativos de las instanciaciones *posibles* del campo de los números a los cuales los enunciados hacen referencia;

- Las descripciones de sus observaciones son formuladas en lenguaje natural y en este sentido son moduladas por mecanismos ligados al razonamiento natural;

- Dichas descripciones son utilizadas para hacer correcciones en los enunciados de partida a través de sustituciones de palabras;

- La focalización de su atención se hace puntualmente sobre estas sustituciones, es decir permanece centrada en los objetos (o la manera de describirlos). Dicho de otra manera, aunque los sujetos puedan hacer proposiciones o encadenamientos de proposiciones, no logran situarse en el punto de vista DE DICTO ni en los diferentes niveles de articulación discursiva requeridos por el razonamiento matemático.

Considerar los errores de los alumnos como problemas de razonamiento o conceptuales no ayuda a identificar estos fenómenos, ligados principalmente a los **procesos descriptivos** y a la **disponibilidad inmediata** de un campo de objetos. Los riesgos de esta reducción en la interpretación de las producciones de los alumnos son muchos.

La comprensión de una formulación en lenguaje algebraico se basa en parte en el hecho de que ella es descriptiva de un campo de objetos; entonces, mientras los alumnos tengan apenas un acceso parcial a dichos objetos, sólo lograrán una comprensión parcial o falsa de dichas formulaciones. En consecuencia, los procesos de razonamiento, de explicaciones y de pruebas asociadas van a estar condicionados por estas incomprensiones.

En particular, para los alumnos, mientras el campo de los objetos que les son *familiares* sea restringido, y mientras sus procesos descriptivos tengan las características presentadas en este estudio, cabe esperar los procesos «espontáneos» de definición y todos los fenómenos asociados a la validación que acabamos de exponer. El desfasaje entre estos procesos «espontáneos» de los alumnos y las modalidades pertinentes desde el punto de vista matemático, nos condujo a interesarnos en el problema de la definición, en el sentido de *proceso de delimitación* de una clase de objetos y a buscar otros fenómenos implicados en el razonamiento que merecen no ser reducidos a problemas de capacidad lógica.

En este contexto, consideramos importante avanzar en dos direcciones:

- Encontrar situaciones de enseñanza para familiarizar a los alumnos con los objetos y con diferentes maneras de observarlos y describirlos. Muy especialmente, actividades que pongan en juego distintas maneras de designar los objetos y las relaciones entre objetos, y que requieran *conversiones* entre diferentes registros (escrituras algebraicas, escrituras numéricas, lenguaje natural, lenguaje simbólico).

- Observar los «*mecanismos de sustitución*» utilizados por los alumnos ante distintos tipos de tareas, tratando de identificar los que podrían ser considerados como fenómenos de *razonamiento propiamente dicho* y los que- tal como los *procesos descriptivos* y la *disponibilidad inmediata de un campo de objetos*- identificados en el dominio del álgebra, forman parte de otros procesos.

Los estudios empíricos que presentamos a continuación se sitúan en esta perspectiva.

En primer lugar, presentamos un dispositivo didáctico que pone en juego la descripción de un objeto matemático en diferentes registros semióticos (Duval, 1993, 2003) y que requiere de los alumnos *centraciones* y *focalizaciones* de la mirada en la observación y la exploración, así como descripciones que articulan diferentes *sentidos* (según Frege, 1974), y diferentes *contenido*s de las representaciones según Duval (1995) (Ver Capítulo 3). Es el objeto del estudio presentado en 4.4.

Acto seguido, presentamos un estudio destinado a identificar fenómenos de generalización y sustitución en un contexto de descripción de propiedades numéricas (ver 4.5).

Por último, presentamos un episodio extraído de un registro de clase ordinaria, en el que identificamos fenómenos ligados a la definición de objetos geométricos (ver 4.6).

4.4 Estudio sobre los fenómenos asociados a la descripción de una curva funcional en un contexto de comunicación (Estudio II)

4.4.1 Presentación

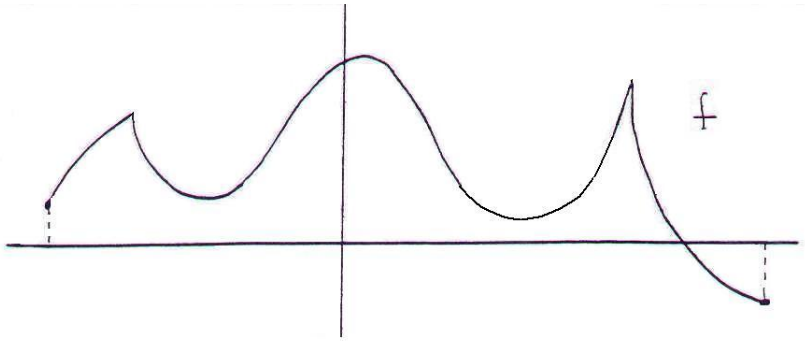
Presentamos aquí un dispositivo didáctico que consiste en la descripción del gráfico de una función en un contexto de comunicación (en el sentido de Brousseau, 1997).

Este tipo de situación es favorable para la observación rigurosa, porque las descripciones producidas están sometidas a la exigencia de reproducción del objeto descrito. El dispositivo demanda una descripción verbal del gráfico de una función a partir de su observación por parte de un grupo emisor, y su reproducción ulterior a partir del mensaje por parte del grupo receptor.

Desde el punto de vista semiótico, el dispositivo pone en juego una *doble conversión*: del registro gráfico (sistema de ejes cartesiano) al registro verbal -en la formulación del mensaje- y del registro verbal al gráfico en la reproducción del dibujo. La investigación llevada a cabo nos ha permitido identificar algunas variables didácticas de naturaleza semiótica (ver 4.4.4) no previstas en el análisis a priori.

Descripción del dispositivo: se muestra a un grupo (emisor) el gráfico de una función y el grupo debe producir un mensaje que contenga la información necesaria para que el otro grupo (receptor, que no tiene acceso al gráfico) pueda reproducirlo, respetando la forma y las posiciones con respecto a los ejes, sin exigencia de escala. No cabe aquí una validación por superposición de las figuras sino que la comparación se realiza por medio de criterios topológicos.

Efectuamos la experiencia en tres oportunidades, en un curso de la materia « Matemática » del Ciclo de Básico Común de la Universidad de Buenos Aires. La figura presentada en esta ocasión fue:



4.4.2 Categorías de análisis

En un primer análisis de las producciones, observamos que para producir el mensaje, los alumnos consideraban alternativamente el gráfico como *objeto* en sí mismo y como *modelo* de la función que representa (es decir, tomando la *función* como objeto). Esto nos condujo a analizar las informaciones incluidas en los mensajes distinguiendo su naturaleza matemática o perceptiva[33]. Consideramos también el tipo de contextualización de la información (en lo que se refiere a los ejes o a la forma de la curva) y el número de imágenes posibles que corresponden a una misma unidad de información.

---

[33] Encontramos afinidad con el trabajo de Mariotti & Fishbeim (1997) acerca de las interacciones entre los dos aspectos identificados por Fishbein en su teoría sobre la naturaleza de los conceptos geométricos (Fishbein, 1963, 1969): el figural (relativo al hecho de que los conceptos geométricos se refieren al espacio), y el conceptual, relativo a la naturaleza abstracta y teórica de los conceptos geométricos.

El análisis se llevó a cabo descomponiendo los mensajes en unidades de información[34] y considerando tres dimensiones:

Dimensión I): Naturaleza de la información

- Propiedad matemática (función continua, derivable, etc.)
- Propiedad cualitativa gestáltica (máximo, pico, cóncavo...)
- Propiedad cualitativa posicional (extremo del intervalo, primero, último, medio, eje *x*, eje *y*)

Dimensión II): Contextualización de la información

- respetando el orden (de izquierda a derecha)
  - con referencia a una propiedad cualitativa gestáltica
  - con referencia a una propiedad cualitativa posicional
- sin seguir un orden
  - con referencia a una propiedad cualitativa gestáltica
  - con referencia a una propiedad cualitativa posicional

Dimensión III): Iconicidad vs Poliiconicidad de Información

La poliiconicidad de una unidad de información significa que la unidad (tomada localmente) tiene más de una traducción visual posible (máximo, no derivable, etc.).

Los mensajes fueron comparados desde dos puntos de vista diferentes:

- Desde el punto de vista de la *suficiencia* para reproducir el gráfico de la función
- Desde el punto de vista de su *eficacia* para reproducir el gráfico de la función

---

[34] Ver Anexo I

A continuación mostramos los resultados del análisis realizado desde estos dos puntos de vista, y los fenómenos más importantes encontrados, los que podrían proporcionar diferentes hipótesis explicativas de las producciones de los alumnos.

4.4.3 Análisis y resultados

Presentamos en primer lugar una síntesis descriptiva del contenido de los mensajes de cada grupo emisor, de las características de las reproducciones realizadas por los receptores y de los aspectos salientes de la puesta en común. En el Anexo I presentamos todas las producciones y las descomposiciones en unidades de análisis.

4.4.3.1 Síntesis descriptiva de las producciones

Grupo A
El mensaje es fundamentalmente global. Se explicita la continuidad de la función; la derivabilidad es sólo implícitamente[35] considerada. Posee dos ambigüedades. Una de ellas (ver unidad A9) es advertida por los receptores quienes preguntan "cuáles dos máximos". La otra (el mensaje en su totalidad no permite identificar dos de los puntos en los que la concavidad cambia) es advertida en el momento de la confrontación de las figuras, al observar que en la figura producida los mínimos coinciden con los puntos de inflexión, lo que no era el caso en la figura de partida. El hecho de que la figura producida no refleja que la función es derivable en uno de los máximos, aunque el mensaje lo explicita (ver unidad A2) *no* es advertido. Los otros elementos del mensaje describen adecuadamente propiedades de la figura de partida, pero no la determinan: la figura producida por los receptores se ajusta a la descripción de los emisores pero no coincide con la original. Los alumnos

[35] El carácter de implícito identificado en estos mensajes en relación con algunas propiedades, sería a nuestro entender objeto de indagación a la luz de la teoría de la presuposición (Ducrot & Todorov, 1972). El punto de vista de las relaciones intersubjetivas especialmente, permitiría profundizar en el análisis de las producciones en estos contextos de *comunicación*. La evidencia empírica recogida aquí no es suficiente como para profundizar en ese sentido.

identifican estas diferencias al comparar las figuras. Durante la discusión colectiva descubren la necesidad de agregar información a los mensajes ("en los mínimos la función es derivable", "los mínimos no son puntos de inflexión", etc.) de manera que los mismos resulten suficientes para reproducir la figura.
Grupo B
El mensaje es fundamentalmente global aunque la numeración de los puntos (x_0, x_1, $x_{2\ldots}$) sugiere un orden de izquierda a derecha (que los receptores siguen al reproducir el gráfico). Se explicita la continuidad de la función pero no hay ninguna consideración de la derivabilidad. La descripción es adecuada en general, salvo que en el intervalo (x_1, x_3) definido por los emisores la información es contradictoria en relación con el crecimiento de la función (unidades B6 y B7) y el cambio de concavidad en el intervalo no es incluido en la descripción (unidad B 7); también se incluye una información no adecuada (unidad B4) que ubica la ordenada del máximo absoluto en el eje *y*. Todo esto se manifiesta en el gráfico, especialmente en el punto x_3, máximo absoluto que en la figura original es un punto donde la función es derivable y en la reconstrucción no es derivable ni continua. Esto no es advertido en el momento de la confrontación de los mensajes. Un punto de interés mayor surge cuando el grupo receptor observa que en el gráfico producido la función no es derivable en el punto x_6 definido por los emisores, tampoco era derivable en ese punto en la figura original, pero esto no figuraba en el mensaje de los emisores. Esto hace entrar en conflicto a los alumnos que lo advierten, lo que muestra su expectativa de que *ciertas* características figuren *explícitamente* en los mensajes; en caso contrario –según ellos- no deberían ser propiedades de la función. La discusión colectiva lleva a descubrir relaciones matemáticas no previstas por estar establecidas sólo implícitamente en el mensaje: la función resulta no derivable en x_6 como consecuencia de ser creciente y convexa entre x_5 y x_6 y decreciente y convexa entre x_6 a x_8 (Unidades B9 y B10). Esto condujo a

los alumnos al establecimiento de relaciones necesarias entre dichas propiedades (teoremas).
Grupo C
El mensaje omite toda descripción sobre la continuidad y la derivabilidad, salvo en los puntos x_1 y x_8 definidos por los emisores, en los que la función no es derivable (unidades C2 y C8), lo que se describe mediante una propiedad cualitativa gestáltica (“pico”). Sin embargo, los receptores dibujan una figura continua y derivable en el resto de los puntos. La contextualización de la información se realiza respetando el orden de izquierda a derecha, en general con referencia a una propiedad cualitativa gestáltica (pico, cóncavo, máximo). Si bien las unidades 1 a 15 son poliicónicas localmente, no lo son en el mensaje global, lo que permite que el gráfico producido revele todos los aspectos de la curva original que han sido incluidos en los mensajes. Los aspectos que resultan inadecuados se deben a no haber sido incluidos en el mensaje: concavidad en los intervalos extremos (x_0, x_1) y (x_8, x_9) y posición de la curva en relación al eje y en el intervalo (x_1, x_3).

4.4.3.2 Análisis desde el punto de vista de la suficiencia para reconstituir el gráfico de la función

Al analizar las producciones según este punto de vista, encontramos **dos tipos de insuficiencia** en los mensajes:

- mensajes insuficientes para *describir* el gráfico; y
- mensajes adecuados para *describir* propiedades del gráfico pero insuficientes para *reproducirlo*

Ciertas insuficiencias del **primer tipo** son relativas a la forma del gráfico, otras son relativas a la posición con respecto a los ejes. Esto se pone en evidencia en el momento de la comparación de las figuras. Por ejemplo, cuando la función es derivable en un punto en el gráfico original pero no lo es en el gráfico reproducido, o por la comparación de los ceros de cada gráfico.

Este tipo de insuficiencia es interesante, pero es el **segundo tipo** de insuficiencia el que es puesto en evidencia especialmente gracias a este dispositivo.

Efectivamente, los mensajes -aunque constituyan descripciones adecuadas del gráfico al tenerlo ante los ojos- , se presentan a veces insuficientes para *descartar otras imágenes posibles* para la misma descripción verbal. Por ejemplo, el mensaje del grupo A dio lugar a la posibilidad de que los mínimos coincidieran con los puntos de inflexión (lo que no es el caso en la figura original). Este fenómeno es descubierto por los mismos alumnos a través de la comparación de las imágenes.

4.4.3.3 Análisis desde el punto de vista de la eficacia para reconstituir el gráfico de la función

El análisis en términos de eficacia está en parte contenido en el análisis anterior. Sin embargo, encontramos otros fenómenos de interés gracias a este nuevo punto de vista. Entre éstos, el hecho de que los grupos receptores y emisores compartan un conjunto de creencias y de hipótesis implícitas que hacen que el gráfico reproduzca fielmente el dibujo original aunque el mensaje no sea adecuado. En el siguiente cuadro mostramos algunos ejemplos:

Característica del mensaje	Creencias compartidas por emisores y receptores
El mensaje no explicita que la función es continua (grupo C)	Los alumnos piensan: i. que *todas* las funciones son continuas ; o bien ii. que cuando una función es continua, no hay necesidad de decirlo explícitamente
El mensaje no explicita los puntos en los que la función es derivable (todos los grupos)	La función es derivable en todos los puntos salvo en los que explícitamente el mensaje indica la contrario

En estos casos, el gráfico reproducido es a menudo semejante al original (el mensaje es *eficaz*) pero se debe en realidad a las *concepciones erróneas* compartidas por los grupos emisores y receptores. Por esta razón- contrariamente a lo que está indicado precedentemente con respecto al carácter suficiente- *la validación no permite* a los alumnos que se den cuenta de sus errores u omisiones en el mensaje: la situación no permite la validación de los mensajes producidos. Esto nos permitió identificar variables didácticas.

4.4.4 Variables didácticas de la situación identificadas

Como anticipamos en la introducción, la investigación nos condujo a identificar un conjunto de variables didácticas no previstas en el análisis a priori de la situación. Estas variables son en su mayor parte de naturaleza semiótica. Si bien ellas se relacionan con variables de naturaleza matemática, ni se reducen ni pueden ser identificadas mediante un análisis en términos de propiedades matemáticas de la función. La *especificidad* del registro comprometido en las operaciones de observación y descripción juega un rol determinante de dichas variables y el estudio empírico ha sido importante para identificarlas.

Distinguimos las variables didácticas de la situación según modifican *especialmente* las estrategias ligadas a las operaciones de *observación,* o las estrategias ligadas a las operaciones de *descripción*[36]

- Los rasgos de la curva son **variables didácticas** que comprometen especialmente a las operaciones de *observación:*
    - la continuidad de lo curva (si/no): gráficos discontinuos darían lugar a desactivar las creencias compartidas sobre la continuidad que encontramos en la experiencia, al hacer que los mensajes resulten *ineficaces* si no se explicitan las propiedades de la curva relativas a esa noción;
    - si llamamos punto anguloso a todo punto de continuidad de la función en el que las derivadas laterales (finitas o infinitas) son diferentes, y “pico” a un punto

[36] Decimos especialmente, y no exclusivamente, ya que ambas operaciones interactúan permanentemente.

anguloso en el que alguna de las derivadas es infinita, el tipo de punto es una variable didáctica en la medida en que las operaciones visuales requeridas por el *reconocimiento* de un “pico” y de un punto anguloso no “pico” son diferentes;

- la amplitud del ángulo de un punto anguloso es también un variable: un ángulo pequeño hace perceptualmente evidente la calidad de punto anguloso, percepción que se hace más difícil progresivamente en función de la amplitud, hasta tornarse cualitativamente diferente para ángulos muy grandes.

Habrá de notarse que si bien todas estas propiedades de los gráficos se corresponden en el plano matemático con propiedades de la función, describir las variables (sólo) en términos matemáticos sería ignorar las particularidades del registro en que una propiedad es expresada. Por ejemplo, en *términos matemáticos*, todos los puntos angulosos son equivalentes, pero no lo son en el *registro gráfico* por las razones expuestas relativas a su reconocimiento en dicho registro. En la medida en que la observación se realiza en el registro gráfico es importante identificar las variables didácticas en términos de *cualidades visuales* y sus *configuraciones*, teniendo en cuenta las características de dicho registro.

Por otra parte, de la experiencia surge que los alumnos *identifican* el hecho de que haya un “pico” en un punto con que la función sea no derivable. Las variables antes mencionadas facilitarían la desidentificación al requerir la observación y descripción de puntos angulosos en general.

- Otro juego de variables concierne a las características exigidas a las *descripciones:*
  - el tipo de propiedad a utilizar (propiedad matemática del objeto o cualitativa gestáltica de su representación gráfica) es una variable;
  - el tipo de descripción (global o local): la prohibición de decir "no derivable", o "pico" en un punto obligaría a focalizar la mirada a izquierda y a derecha del punto y a identificar de esta manera otras unidades significantes

- el léxico permitido, por ejemplo el uso de verbos (si/no): el no uso de verbos pondría en la necesidad de construcción de sintagmas nominales (descripciones de un mismo aspecto usando diferentes *sentidos* (en el sentido de Frege)).

4.4.5 Conclusiones de este estudio

En términos generales, hemos observado que, para realizar la tarea, los sujetos consideran alternativamente el gráfico como un *objeto* en sí mismo, o como una *representación* de la función (la cual se convierte entonces en un *objeto*). Esto plantea el problema de la asociación entre una propiedad matemática y las cualidades visuales para discriminar en un gráfico. La centración alternada entre los dos tipos de objeto (gráfico y función) lleva a los alumnos a buscar diferentes maneras de discernir las cualidades visuales que permiten identificar en un gráfico la presencia o la ausencia de una noción matemática (Duval, 1993, 2002).

El análisis según el punto de vista del carácter suficiente nos llevó a interpretar y poner en evidencia un fenómeno ligado a la relación texto-imagen, según la cual al observar un gráfico es posible producir una descripción **adecuada** de propiedades del mismo pero **insuficiente** para descartar otras imágenes posibles para la misma descripción verbal (Duval, 1995, Kanizsa, 1998). Es decir, descripciones verbales que pueden corresponder a otras funciones matemáticas. La situación de comunicación elegida, al provocar artificialmente una disociación entre la imagen (de partida) y el texto (producido por los emisores), muestra el *valor informativo* del mismo cuando es utilizado por los receptores para reproducir la imagen ausente. Todo esto permite proponer un contexto en el cual los alumnos, al descubrir por ellos mismos este fenómeno (por comparación de las imágenes), desarrollan la capacidad de incluir las *informaciones necesarias* para que las descripciones verbales resulten autosuficientes.

Otro fenómeno interesante está ligado a la creencia de los alumnos según la cual *ciertas*[37] propiedades de la función deberían estar contenidas **explícitamente** en los

[37] Es interesante notar que esta creencia coexiste con otra de alguna manera complementaria: ciertas propiedades parecen haberse naturalizado como propiedades de las funciones, y sólo es necesario

mensajes para ser propiedades de la función representada. Dicho de otra manera, en ocasiones, el gráfico que producen revela ciertas propiedades matemáticas de la función *inesperadas,* en la medida en que no figuran explícitamente en el mensaje verbal. La situación favorece el hacer entrar en conflicto a los receptores en el momento de la comparación de las figuras, al observar propiedades inesperadas de la función (porque ellas no figuran explícitamente en los mensajes). La discusión que esto provoca favorece el **descubrimiento de teoremas**, es decir de propiedades que resultan necesariamente verdaderas a partir de otras (ver producción grupo B).

El análisis desde el punto de vista de la eficacia ha mostrado que un conjunto de concepciones erróneas hace que los mensajes resulten *eficaces* aunque sean inadecuados para describir el gráfico. Esto puede considerarse como un límite de la situación, en la medida en que no permite sacar a la luz estas concepciones erróneas. Sin embargo, este análisis ha permitido la identificación de **variables didácticas** de naturaleza semiótica (gráfica y verbal)**.** Por medio de un cambio en el valor de las variables se podría lograr que los mensajes resulten *ineficaces,* permitiendo así la revisión de las concepciones erróneas durante la validación de los mensajes.

El aporte a la didáctica de esta situación es hacer que los alumnos descubran por sí mismos por un lado las relaciones complejas entre distintas propiedades matemáticas y entre las propiedades matemáticas y las representaciones semióticas (gráficas y verbales), y por otro lado aprendan a discriminar las cualidades figurales relevantes de un gráfico.

---

explicitar cuando *no* se cumplen (ver por ejemplo la producción del grupo C en relación con la continuidad, y nuestro análisis sobre las creencias compartidas por emisores y receptores en 4.4.3.3)

4.5 Estudio empírico sobre descripciones de propiedades numéricas (Estudio III)

4.5.1 Presentación

La desigualdad $x^2 \geq x$ puede ser considerada como la descripción de una propiedad de un conjunto numérico, la que puede ser adecuada o no según el conjunto que se considere.

Por ejemplo, describe adecuadamente una propiedad de los conjuntos:

$\mathbb{R}$- (0;1)

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$

En este trabajo estudiamos los juicios de los estudiantes acerca del valor de verdad de enunciados descriptivos de una propiedad de diferentes conjuntos numéricos. La consigna presentada a los alumnos es la siguiente:

Determine si el enunciado "$\forall x,\ x^2 \geq x$" es verdadero o falso en los conjuntos siguientes:

$\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$

4.5.2 Análisis

En un curso de 60 estudiantes del primer año de la Universidad de Buenos Aires, 40% de los estudiantes dio una respuesta correcta.

Entre las respuestas incorrectas, dos tipos de respuesta son las más interesantes según nuestro análisis:

- las de los estudiantes que responden que, dado que el enunciado es verdadero en $\mathbb{R}$ (« *porque el cuadrado de todo número real es más grande que él»)*, entonces va a ser verdadero en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$.

- las de los estudiantes que responden que el enunciado:
    - es verdadero en $\mathbb{R}$ (« *porque el cuadrado de todo número real es más grande que el mismo* »), en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{N}$; y
    - es falso en $\mathbb{Q}$ (« *porque, por ejemplo,* $0{,}5^2 < 0{,}5$ »).

Las respuestas del **primer tipo** son muy habituales, y se inscriben dentro de lo que denominamos «generalizaciones espontáneas» de naturaleza *conceptual,* porque consisten en una extensión de un esquema de conocimiento (Vergnaud, 1990): una propiedad observada en los números naturales es extendida a los números reales. No nos interesa profundizar aquí en el análisis de este tipo de respuesta salvo para decir que desde nuestra perspectiva este tipo de extensión se produce y se perpetúa porque no hay un trabajo específico destinado a la *observación* y *descripción* de objetos, hipótesis que sostenemos en esta tesis para todo lo que concierne a la definición de objetos. Dicho de otra manera, si se produce una extensión sin control de un esquema de conocimiento construido en el marco de los números naturales, y se perpetúa, es porque no se ha dado lugar a una *construcción* y *deconstrucción* por observación de los nuevos números introducidos. Este tipo de trabajo es necesario para que las extensiones de esquemas de conocimiento se realicen con control.

Las respuestas del **segundo tipo** pueden analizarse desde diferentes puntos de vista, pero nos parece pertinente analizarlas en términos de los *efectos de la tipicidad.* Para ello, notemos que:

- Estos estudiantes pueden concebir *espontáneamente* el número 0,5 (se trata entonces de un "objeto familiar" para ellos en el sentido de Duval)
- Lo utilizan para analizar el enunciado en $\mathbb{Q}$, pero no en $\mathbb{R}$
- Puede decirse entonces que lo reconocen como número racional pero no como número real
- No perciben la contradicción que hay en afirmar que la propiedad (cuantificada universalmente) «$\forall x,\ x^2 \geq x$ » es verdadera en $\mathbb{R}$ y no en $\mathbb{Q}$

Interpretamos que para estos alumnos por un lado 0,5 es un «buen ejemplar» (en el sentido de Rosch) de $\mathbb{Q}$ pero no de $\mathbb{R}$, y que posiblemente –aunque no haya evidencia de ello en este estudio- los números expresados como raíces cuadradas (con el signo “√ ”) sean mejores ejemplares de número irracional que π y e.

Creemos que estos alumnos aceptarían a 0,5 como número real en caso de que se les hiciera la pregunta, pero no lo conciben espontáneamente como tal porque no responde al aspecto *protototípico* de los números reales.

Es importante notar que en el presente estudio, el carácter típico está asociado a la *representación semiótica* del número, más precisamente a su escritura decimal. Según nuestra interpretación, para estos alumnos 0,5 es un representante de los números racionales, en virtud del *aspecto* de la escritura (*representación semiótica* del número) y en *oposición* a los números reales que –exceptuando los números tales como π y e- se identificarían mediante escrituras tales como las raíces cuadradas (√) (¡aun $\sqrt{4}$, que según esta perspectiva y por las mismas razones sería un número real pero no racional!). En el caso de los números es difícil apreciar este aspecto de la tipicidad ligada a la representación, en virtud de que la propiedad con la que se define al objeto –la definición no axiomática- se realiza en base a una representación: “*Un número es racional si puede ser escrito como cociente de dos números enteros*”, “*Un número es racional si su escritura decimal es finita o periódica*”, “*Un número es irracional si su escritura decimal es infinita no periódica*”, etc. (Ver 5.3.2). Cuando la propiedad característica es una propiedad del objeto independiente de su representación, es más fácil discriminar si los rasgos típicos provienen o no de las representaciones habituales con las que se *presenta* el objeto.

En consecuencia, si nuestra hipótesis sobre el *reconocimiento* basado en un rasgo típico es adecuada, este estudio mostraría la predominancia en estos alumnos de este aspecto semiótico sobre aspectos conceptuales elementales. Los alumnos de este nivel de escolaridad “saben” que un sub-conjunto hereda las propiedades universales de un conjunto que lo contiene. Sin embargo, el pensamiento en términos de instancia típica compite con ese conocimiento al punto de que ellos pueden no detectar que su respuesta contradice esa propiedad elemental. Podría pensarse que como consecuencia del pensamiento por tipicidad, para estos alumnos los números racionales y los números reales se constituirían como clases disjuntas a pesar del "discurso" habitual que los presenta (y que ellos mismos repiten) mediante una relación de inclusión de conjuntos.

4.5.3 Conclusiones de este estudio

La capacidad de reconocer que un sub-conjunto hereda o no propiedades de un conjunto que lo contiene, está directamente ligada a la capacidad más general de caracterizar las propiedades de los conjuntos, por ejemplo, distinguir las propiedades universales -que son hereditarias- de las propiedades existenciales, que no lo son (Panizza & Álvarez 1990). Todo esto interviene en la capacidad de *descripción* y de *definición* de clases y de conjuntos de números y sus relaciones, incluso más generalmente de clases y de conjuntos de objetos matemáticos.

Vale la pena notar que esta propiedad es utilizada por los alumnos del primer grupo, para quienes la propiedad, al ser verdadera en $\mathbb{R}$ (« *porque el cuadrado de todo número real es más grande que el mismo* ») entonces va a ser verdadera en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$. Entendemos que este "entonces" se debe a que entienden que en tanto subconjuntos heredan la propiedad (¡falsa!) del conjunto $\mathbb{R}$.

Para el segundo grupo de alumnos -en cambio- $\mathbb{Q}$, como sub-conjunto de $\mathbb{R}$ no heredaría una propiedad universal de este conjunto, lo que se pone en evidencia porque estos alumnos no detectan la contradicción elemental.

Según nuestra interpretación, no se trata de algo atribuible a la racionalidad sino a problemas de razonamiento que se originan en la **experiencia** con los objetos matemáticos, la **falta de disponibilidad** inmediata de las instanciaciones posibles del enunciado para analizar su carácter de ejemplo o contraejemplo y los **procesos de categorización** por prototipos.

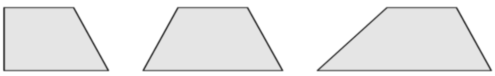
4.6 Observación de una clase ordinaria: el encapsulamiento de registros de representación (Estudio IV)

4.6.1 La lección del trapecio

Una maestra en formación (en Francia, « PE2 ») da a sus alumnos la siguiente definición de trapecio:

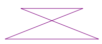
« un trapecio es un cuadrilátero con dos lados paralelos solamente»

La definición está expuesta en el pizarrón junto con los siguientes dibujos



A continuación les pide a los alumnos que dibujen un trapecio

Un alumno dibuja la siguiente figura[38]:



La maestra responde:

« *No, esto responde a la consigna pero no es un trapecio*»

[38] Destacamos que en Francia las figuras no convexas son objeto de enseñanza en la escuela primaria

4.6.2 Análisis

- La definición de la maestra (« un cuadrilátero con dos lados paralelos solamente ») es una definición « por tipicidad», en el sentido de que se trata de la descripción verbal de un dibujo típico de trapecio (cuadrilátero convexo con *solamente* dos lados paralelos, como los dibujos expuestos por ella en la presentación)

- La maestra parece reconocer que el ejemplo (dado por el alumno) responde a dicha formulación verbal (« *…esto responde a la consigna …* »)

- Sin embargo, para ella, el criterio de aceptación de un dibujo es su semejanza con el ejemplo típico (*«…pero no es un trapecio »*) y no su concordancia con la propiedad formulada verbalmente

- Al mismo tiempo, la maestra no parece percibir la contradicción.

Interpretamos este fenómeno como un "encapsulamiento de registros de representación" (Duval, 1995): efectivamente, la maestra no articula la *descripción* verbal que ella misma realiza para caracterizar a los trapecios con una instancia particular representada en el registro de las figuras geométricas, lo que se evidencia por el rechazo del dibujo propuesto por el alumno.

Hacemos notar que la definición dada por la maestra sirve para describir las figuras típicas de trapecio, pero permite **también** construir otras figuras no típicas (como la propuesta por el alumno).

4.6.3 Conclusiones de este estudio

Este aspecto ligado al alcance (imprevisto) de ciertas descripciones verbales y simbólicas –en particular las definiciones- es uno de los fenómenos importantes identificados en esta tesis a través del Estudio Empírico, y fundamental para interpretar los procesos semióticos constitutivos de los objetos matemáticos que construyen los alumnos. Como veremos (en 4.7.2) se trata de un fenómeno general que ponemos en evidencia a través de diferentes estudios, ante tareas de muy diferente naturaleza y contextos matemáticos diversos.

Sostenemos que la mayor parte del tiempo estas actitudes encuentran su origen en la ausencia de un trabajo de discriminación de las propiedades de las diferentes instancias representativas de los objetos a definir. Este problema es de origen didáctico en su mayor parte, por la poca representatividad de los objetos individuales provistos por la enseñanza, y la poca variación de representaciones semióticas ofrecidas para representar dichos objetos. Los ejemplos dados por la maestra de la clase observada son ilustrativos de esta actitud: no sólo no se muestra ningún trapecio no convexo, sino que tampoco se muestra un paralelogramo. Los ejemplos presentados responden a su definición por tipicidad.

4.7 Fenómenos comunes a los diferentes estudios

4.7.1 Efectos de la definición por tipicidad

En diferentes puntos de este Estudio Empírico, hemos encontrado algunas de las *generalizaciones* que los alumnos realizan basándose en rasgos típicos identificados en instancias particulares de objetos matemáticos, rasgos que la mayoría de las veces captan una propiedad de la *representación particular* del objeto individual analizado. Asimismo, hemos observado que estas generalizaciones son formuladas en escrituras simbólicas o lenguaje natural, las que tienen para los alumnos el valor de *definiciones*, en la medida en que pretenden caracterizar a los objetos observados.

Identificamos también manifestaciones de los *efectos* de estas definiciones por tipicidad. Entre las más importantes:

- el reconocimiento de un objeto basado *estrictamente* en el rasgo identificado, generalmente ligado a un registro de representación particular;

- el fenómeno de “herencia” según el cual “lo que es válido para un individuo es válido para todos”;

- influencia sobre los juicios acerca del valor de verdad de enunciados descriptivos de dominios de objetos; y
- una falta de articulación entre las definiciones producidas y otras definiciones del mismo objeto.

El siguiente cuadro muestra de manera sintética las manifestaciones principales de la definición por tipicidad identificadas en este Estudio Empírico, ante diferentes actividades cognitivas solicitadas o esperadas por actividades matemáticas en diferentes dominios: algebraico, numérico, y geométrico.

Dominio matemático de referencia del estudio	Álgebra: El caso de Brenda (Estudio I)	Propiedades numéricas: Estudio empírico sobre descripciones de propiedades numéricas (Estudio III)	Geometría: La lección del trapecio (Estudio IV)
Actividad esperada	Reconocimiento de la necesidad de validación de enunciados basados en generalizaciones espontáneas	Decisión sobre si un conjunto de números verifica una inecuación	Articulación entre dibujo y definición verbal
Fenómeno observado	Dificultad para acceder a los distintos niveles de articulación discursiva: focalización de la atención en los objetos y sus descripciones	Dificultad para identificar contradicciones en relación con el carácter hereditario de propiedades universales (de un conjunto sobre un subconjunto)	No reconocimiento de contradicción entre dos definiciones del mismo objeto, siendo una de ellas dada « por tipicidad»,

Cuadro I- Efectos de la definición por tipicidad en diferentes dominios matemáticos

4.7.2 Fenómenos ligados el *alcance* de las descripciones basadas en observaciones

La descripción de propiedades de objetos matemáticos ha mostrado en muy diversas oportunidades en este Estudio un fenómeno ligado a la *relación* entre la observación de objetos individuales y su descripción. El fenómeno que deseamos analizar aquí es el siguiente:

> A menudo las descripciones realizadas –en *lenguaje natural* o *simbólico*-son adecuadas a los objetos individuales observados, pero no son una **caracterización** de los mismos, en el sentido de que **otros objetos** (individuales) caen dentro del alcance de dicha descripción[39]

Como veremos aquí, este fenómeno se ha manifestado en el dominio algebraico (descripción de conjuntos numéricos), en el dominio geométrico (definición verbal) y en el dominio del análisis (descripción de una curva funcional).

Lo hemos observado en **primer lugar** en la descripción de un objeto obtenida mediante *conversión* de registros; y esto, tanto cuando esta descripción es explícitamente solicitada por la actividad, como cuando es solicitada implícitamente o no lo es ni explícita ni implícitamente (por ejemplo cuando un sujeto realiza una conversión como medio para el *reconocimiento* del objeto).

En **segundo lugar**, lo hemos observado en el contexto de la *descripción* -verbal o simbólica- de un conjunto de objetos. Habrá de notarse la importancia de este hecho en la medida en que la capacidad de adecuación entre una *descripción* -verbal o simbólica- a un conjunto de objetos concierne directamente a la capacidad de definición.

Los diferentes estudios en los que encontramos este fenómeno son:

---

[39] No nos ocupamos aquí del caso en el que la descripción no resulta una caracterización por la razón contraria, es decir por no llegar a describir a todos los objetos analizados. Cabe destacar sin embargo que ambos errores son posibles a la vez. Es el caso de Brenda (Estudio I), por ejemplo, cuando afirma: «ah no, usted tiene razón, ¡es falso para los racionales! » a partir del contraejemplo –0,5, siendo el conjunto de contraejemplos el intervalo [-1,0)

- En el dominio del **álgebra**, lo observamos en el ejemplo de Brenda (Estudio I). Mediante una -*escritura simbólica*- (“x<-1”) ella describe el “tipo” de los números analizados por ella (-2,-3,-4...) sin advertir que dicha escritura contiene infinitos números no enteros. Encontramos que esto tiene un alto grado de generalidad en las « generalizaciones espontáneas » en el dominio del álgebra, sean éstas de origen semiótico, lógico, o conceptual (ver 1.3).

- En el dominio del **análisis**, lo observamos en la tarea de descripción de una curva funcional (Estudio II). Allí se puso en evidencia que algunas formulaciones de los emisores eran adecuadas para describir la figura original, pero insuficientes para descartar otras imágenes adecuadas a la misma descripción verbal.

- Finalmente, en el dominio de la **geometría**, lo observamos en el ejemplo del trapecio (Estudio IV). Mediante una formulación en *lenguaje natural,* la maestra produce una descripción verbal (*su* definición de trapecio, por tipicidad), que *contiene* como posibilidad la figura no convexa ofrecida por el alumno. Es de destacar que la maestra acepta este ejemplo «*...esto responde a la consigna...*» a la vez que lo rechaza en acto «*...pero no es un trapecio*» porque su criterio de aceptación se basa en la figura típica y no en la formulación verbal.

En general este fenómeno se inscribe dentro de los problemas de (falta de) articulación de diferentes registros semióticos, en el sentido de tratarse de descripciones de objetos en diferentes registros.

Como hemos visto, en el ejemplo de Brenda y en el caso del trapecio se evidencia asimismo una falta de control y dificultades para detectar contradiciones.

Hemos encontrado que, a diferencia de los contextos en los que estas descripciones se realizan de manera espontánea, ciertos *contextos descriptivos* que requieren la conversión de registros de representación en *contextos de comunicación* (en el sentido de Brousseau) muestran su pertinencia didáctica. Concretamente, el dispositivo presentado en el Estudio II favorece que los alumnos entren en contradicción al advertir una diferencia entre anticiapciones y lo que observan, lo que da lugar al avance de sus capacidades de observación y descripción.

El siguiente cuadro muestra de manera sintética las manifestaciones principales de este fenómeno identificadas en nuestro Estudio Empírico:

Dominio matemático de referencia del estudio	Álgebra: El caso de Brenda (Estudio I)	Análisis: Estudio sobre descripciones de curvas funcionales (Estudio II)	Geometría: La lección del trapecio (Estudio IV)
Actividad esperada	Reconocimiento del alcance de las descripciones basadas en generalizaciones espontáneas en álgebra	Reconocimiento del alcance de las descripciones (adecuadas) de imágenes de curvas funcionales que se tienen ante los ojos	Aceptación de cualquier ejemplo de una definición de objetos geométricos
Fenómeno observado	La escritura *"x< -1"* **contiene una infinidad** de objetos además de los (típicos) en los cuales se basó la definición del tipo	Algunos mensajes son adecuados para describir propiedades del gráfico pero **insuficientes para descartar otras imágenes** que corresponden a la misma descripción verbal	No reconocimiento de que una definición de trapecio dada « por tipicidad» **contiene ejemplos** no prototípicos (el ejemplo dado por el alumno)

Cuadro II- Fenómenos ligados al *alcance* de las descripciones basadas en observaciones

Es importante notar que el fenómeno analizado en este parágrafo concerniente a la descripción de observaciones *es constitutivo* de los procesos de definición de objetos matemáticos, en la medida en que una definición matemática es un tipo particular de descripción que contiene en general lenguaje verbal y simbólico. Sostenemos que una dimensión importante en el estudio didáctico de la definición es la de la adecuación entre las *descripciones* -verbales o simbólicas- a un objeto o a conjuntos de objetos y la capacidad de control sobre dichas descripciones.

4.7.3 Problemas debidos a la (falta de) disponibilidad de objetos matemáticos

Como hemos visto, en los diferentes estudios presentados, la falta de disponibilidad de objetos matemáticos es a menudo la fuente principal de imposibilidad de resolución satisfactoria de una tarea. Hemos encontrado dificultades para encontrar ejemplos y contraejemplos de enunciados algebraicos, para el reconocimiento de un objeto (individual) como perteneciente a una clase de objetos, y para la aceptación de un objeto (individual) como contraejemplo de un enunciado verbal. El siguiente cuadro muestra de manera sintética las manifestaciones principales de este fenómeno identificadas en nuestro Estudio Empírico:

Dominio matemático de referencia del estudio	Álgebra: El caso de Brenda (Estudio I)	Propiedades numéricas: Estudio empírico sobre descripciones de propiedades numéricas (Estudio III)	Geometría: La lección del trapecio (Estudio IV)
Actividad esperada	Encontrar ejemplos y contraejemplos de enunciados algebraicos	Concebir un contraejemplo de un enunciado universal	Aceptación de ejemplos de una definición de objetos geométricos
Fenómeno observado	Dificultad para encontrar contraejemplos en el intervalo [-1,0), conjunto de objetos « no familiares»	Dificultad para concebir a 0,5 como número perteneciente a $\mathbb{R}$	(Im)posibilidad de aceptar un ejemplo como instanciación de una formulación verbal dada « por tipicidad» (encapsulamiento de registros de representación)

Cuadro III- Problemas debidos a la (falta de) disponibilidad de objetos matemáticos

4.8 Conclusiones del Estudio Empírico

En matemática las definiciones obedecen al criterio de *condiciones necesarias y suficientes.* Esto equivale al hecho de que las categorías de objetos matemáticos funcionen como conjuntos o clases (en particular para la inclusión y la intersección). Ellas hacen posible el *juego de sustituciones* en los enunciados, que es la clave de la progresión del discurso matemático (Frege, 1974) (Ver Capítulo 3).

Los procesos de *categorización* y de *definición* de objetos matemáticos requieren la consideración analítica de propiedades, y suponen la identificación de rasgos característicos (y no sólo prototípicos). Esta operación de identificación requiere la articulación de rasgos expresados en diferentes registros con propiedades de los objetos que son independientes de las representaciones.

Desde un punto de vista cognitivo, la entrada en la definición supone entonces la capacidad de concebir los objetos en su más grande generalidad (lo que está ligado a las sustituciones de *tipo instanciación*) y de someterlos al criterio de condiciones necesarias y suficientes.

Supone también un cierto dominio del juego de sustituciones de *tipo tratamiento* y de *tipo conversión*, tanto para la operación de *reconocimiento* como para la operación de *descripción* de objetos matemáticos.

Ahora bien, los fenómenos identificados en este Estudio Empírico muestran un desfasaje importante en relación con estos requerimientos de la definición en matemática.

Estos fenómenos conciernen fundamentalmente a la **disponibilidad de las distintas instancias** de un objeto y a los **procesos discursivos** de los alumnos.

Sintéticamente:

- los procedimientos ligados al análisis de *enunciados generales* (en lenguaje simbólico y/o natural) han mostrado especialmente dificultades producto de la débil *disponibilidad* (inmediata) por parte de los alumnos del dominio de objetos a los cuales hace referencia un enunciado general

- la observación y la descripción de rasgos de un objeto son realizados sobre representaciones semióticas particulares de instancias particulares ("individuos") a menudo poco representativos de todas las instancias de un objeto

- las operaciones discursivas de descripción son basadas en *asociaciones locales* en lenguaje natural

- los procesos de categorización asociados responden en gran medida al modelo de categorización por *prototipos*

- la estrecha vinculación entre los *procesos de categorización* y los *procesos descriptivos* conduce a que las definiciones de objetos matemáticos adopten las características de las *definiciones naturales*, muy especialmente las *definiciones características*

- las *categorizaciones* y *descripciones* de objetos observados producidos por medio de una «generalización espontánea» parecen favorecer en los procesos discursivos una *focalización* de la atención en el punto de vista de los *objetos* (DE RE) y en el *primer nivel de articulación discursiva*

- estas características de la *focalización* de la atención resultan un obstáculo a la entrada en procesos de validación y de control, en particular de control de las descripciones de propiedades

- las descripciones de propiedades de objetos matemáticos en escritura simbólica y/o lenguaje natural *denotan* a menudo un conjunto que supera el conjunto de objetos individuales a los que los alumnos intentan describir, pero los alumnos tratan estas escrituras como si fueran *caracterizaciones* del conjunto de objetos observados

- las características de todos estos procesos se asocian a menudo a una dificultad para encontrar contradicciones elementales, especialmente algunas relativas a la inclusión de clases

Por todas estas razones, el Estudio en su totalidad muestra la necesidad de gestar una ruptura con las definiciones naturales, en particular con la *definición típica*, a fin de que los procesos de definición se adecuen a los modos de definición pertinentes desde el punto de vista matemático.

Los siguientes aspectos generales se destacan por su importancia. Se trata de la necesidad de:

- hacer superar el « estadio » de las « generalizaciones espontáneas » que consiste en condensar los objetos por medio de asociaciones locales y parciales para pasar a una identificación de *categorías semánticas*

- favorecer una familiarización con objetos individuales representativos de las instancias *posibles* de un objeto matemático

- favorecer una *adaptación* a diferentes instancias particulares del objeto, en diferentes registros semióticos de representación

- favorecer el acceso a los diferentes niveles de *articulación discursiva* en lengua natural

- favorecer la adecuación entre las descripciones simbólicas y en lenguaje natural que realizan los alumnos y los objetos que intentan describir (caracterizar). Dicho de otra manera, favorecer la capacidad de articulación entre la *comprensión* y la *extensión* de las *descripciones* simbólicas que realizan - capacidad directamente ligada a la posibilidad de definir adecuadamente clases de objetos mediante propiedades.

Desde el enfoque semiótico adoptado, esto nos condujo a la necesidad de realizar distintos análisis semióticos. Buscamos identificar la complejidad cognoscitiva de las tareas ligadas a la *representación* y a las *transformaciones semióticas* requeridas por las operaciones que comprometen los *procesos de definición*. Buscamos también establecer criterios que sirvan como instrumento de análisis y de diseño de tareas que pongan en juego tales operaciones.

Estos análisis conforman el Estudio que presentamos en el próximo capítulo.

5 Análisis Semióticos

En este capítulo presentamos distintos análisis semióticos, mediante los cuales identificamos *actividades cognitivas* intrínsecamente ligadas a la semiosis que derivan de la hipótesis –formulada y fundamentada en los capítulos anteriores- de que las *representaciones semióticas* y sus *transformaciones* cumplen un papel esencial en los *procesos de definición* de objetos matemáticos. Establecemos criterios para el diseño de tareas matemáticas que aborden la complejidad de dichos procesos.

Para ello, estudiamos la complejidad de las operaciones de *observación*, *reconocimiento*, *descripción* y *definición* de objetos matemáticos, teniendo en cuenta que la naturaleza de los *procesos* de *definición* es diferente según que las definiciones *sean* o *no* expresadas explícitamente. Más precisamente, estos a análisis (ver 5.2 y 5.3) se realizan teniendo en cuenta la exigencia cognitiva que demanda:

- la observación de objetos matemáticos individuales representados en registros semióticos particulares, su reconocimiento y descripción en términos de conversiones a otros registros;
- la comprensión y operatividad de una definición enunciada explícitamente;
- la articulación de estas operaciones cuando los objetos son presentados a la vez mediante ejemplos y mediante definiciones formuladas explícitamente.

Realizamos también un análisis de los registros *gráfico* y de las *escrituras algebraicas* y de la complejidad cognitiva de su articulación (ver 5.5 y 5.6).

A continuación presentamos y fundamentamos los principios generales de análisis elegidos a fin de lograr nuestro propósito, y los criterios de clasificación de los signos seleccionados para comprender las actividades cognitivas objeto de estudio.

5.1 Principios y Criterios generales

5.1.1 Principios generales de análisis

El análisis semiótico está basado en la *articulación* de dos principios generales:

P1. Es necesario tener en cuenta las características de las representaciones y de los sistemas de representación *en sí mismos.*

P2. Es necesario tener en cuenta las características de las representaciones y de los sistemas de representación que permiten comprender y favorecer el funcionamiento cognitivo requerido por los *procesos de definición* de objetos matemáticos.

El significado de esta articulación es el siguiente. Por razones metodológicas, nuestros análisis buscan identificar cuándo y cómo el funcionamiento cognitivo requiere movilizar uno o varios sistemas semióticos. Esto supone identificar las características de los diferentes sistemas, sus alcances y límites. Sin embargo, no estudiamos estos sistemas en su totalidad, sino en tanto y en cuanto nos permiten comprender y favorecer el funcionamiento cognitivo ligado a los *procesos de definición.*

5.1.2 Criterios de clasificación de los signos

Entre los diferentes *criterios de clasificación* de los signos (ver capítulo 3) hemos elegido especialmente:

1. los centrados en la manera de designar los objetos

2. los centrados en « (…) sus posibilidades [de los signos] de ser transformados en otras representaciones semióticas» (Duval, 2006a)

Las razones de la elección surgen de los conceptos presentados y analizados en el capítulo 3, especialmente las nociones de *sentido* de una expresión y *contenido* de una representación semiótica-debidas a Frege y a Duval respectivamente-, y la noción de *transformación semiótica*.

El primer criterio resulta relevante en la medida en que gracias a la diversidad de formas de designar los objetos, es posible expresar y observar las *diferentes* propiedades de un objeto -mediante expresiones con diferente *sentido* o representaciones semióticas con *contenidos* diferentes-.

El segundo criterio elegido se ubica en continuidad con esta idea. Como se ha presentado y analizado (ver capítulo 3) es *gracias* a las « posibilidades de los signos de ser transformados en otras representaciones semióticas» –segundo criterio- que las *transformaciones semióticas* son *posibles* (Duval, 2006 a). Habida cuenta de que las diferentes representaciones expresan diferente conocimiento, en esta posibilidad de los signos de ser transformados unos en otros reside la posibilidad de establecimiento de *relaciones* entre las diferentes propiedades del objeto, lo que hace posible *identificarlo* (como invariante de todas sus representaciones).

El segundo criterio es pertinente también, - y muy especialmente - para el *tratamiento semiótico* de enunciados mixtos (lenguaje natural y simbólico). Gracias a que las transformaciones semióticas son *posibles*, los enunciados pueden modificarse mostrando continuidad y novedad a la vez. Como analizamos en 5.3, esto hace posible la comprensión y la utilización de una definición explícitamente formulada.

Por estas razones, estos criterios resultan relevantes para explotar la potencia de los sistemas semióticos de manera sistemática para poner en funcionamiento las operaciones comprometidas en los *procesos de definición*.

Los análisis que siguen a continuación han sido desarrollados según estos Principios y Criterios generales.

5.2 Análisis semiótico de tareas matemáticas

Este Análisis de Tareas busca en primer lugar identificar *tareas matemáticas* relevantes para el *funcionamiento cognitivo* involucrado en las operaciones de *reconocimiento, observación, descripción* y *definición* de objetos matemáticos. De esta manera, se espera identificar factores de variación pertinentes para una organización sistemática de la enseñanza que ponga en juego dichas operaciones.

A fin de comprender este propósito, es importante en primer lugar diferenciar *tarea matemática* de *tarea cognitiva,* en la medida en que la complejidad cognoscitiva de una tarea no va siempre en el mismo sentido que su complejidad matemática. Una tarea puede ser muy compleja desde el punto de vista matemático y demandar poco desde el punto de vista cognitivo a la vez que algunas tareas matemáticas sumamente elementales pueden requerir un esfuerzo cognitivo considerable (Duval, 1996).

La perspectiva semiótico/cognitiva adoptada se traduce -en relación con este propósito- en primer lugar en la necesidad de que las *tareas matemáticas* promuevan la capacidad de una *articulación* espontánea de registros en relación con las *operaciones cognitivas* objeto de estudio, y la flexibilidad para pasar de un análisis en términos de *contenido* de una representación a un análisis en términos del *objeto* representado.

Ambas capacidades son características del desempeño experto. Efectivamente, el matemático:

- utiliza espontáneamente las *transformaciones semióticas* para *reconocer* y *describir* los objetos, expresando de esta manera sus diferentes propiedades;

- dispone de la capacidad para pasar *localmente* de un análisis en términos de *contenido* de una representación a un análisis en términos del *objeto* representado; esta flexibilidad es un instrumento que utiliza para planificar su acción, como recurso de economía, como elemento de control, etc. (Panizza & Drouhard, 2003).

Por razones metodológicas (ver capítulo 3) esta perspectiva semiótico/cognitiva nos condujo en primer lugar a analizar las tareas teniendo en cuenta especialmente lo relacionado con:

- el acceso a los objetos matemáticos; y
- las diferentes *transformaciones semióticas* requeridas (por las operaciones de *reconocimiento, observación, descripción* y *definición* de objetos matemáticos)

5.2.1 El acceso a los objetos matemáticos

El acceso a los objetos matemáticos se realiza a través de *instanciaciones* del enunciado (que define el objeto) representadas en registros semióticos particulares, que o bien puede concebir el sujeto por sí mismo o bien son dadas por la enseñanza.

Las operaciones de observación, de identificación de rasgos característicos y de descripción de estos rasgos se hacen entonces sobre estas representaciones semióticas particulares, lo que conduce a distinguir tres ejes de variación en las posibilidades de experiencia con las instancias posibles de un objeto:

- i) el de los *datos*;
- ii) el de las *instanciaciones* posibles del enunciado
- iii) el de las *representaciones* (en diferentes registros semióticos) de los *datos* e *instanciaciones* posibles

Entonces, para favorecer un acceso a los objetos matemáticos individuales, de manera que sus características sean lo más representativas posible de los objetos matemáticos de referencia, habrá en primer lugar que tener en cuenta estos tres ejes de variación en el análisis y el diseño de tareas.

5.2.2 Las diferentes *transformaciones semióticas* requeridas

La diversidad de *transformaciones semióticas* requeridas por las operaciones de *reconocimiento, observación, descripción* y *definición* de objetos matemáticos es objeto de indagación en todo el capítulo.

La enseñanza toma en cuenta muy a menudo los aprendizajes de las reglas de *transformación semiótica* de tipo *tratamiento*. Muy especialmente, las *transformaciones* de tipo cálculo en un sistema numérico y las reglas algebraicas que conservan la *denotación* y que por ende permiten resolver ecuaciones.

Las transformaciones de tipo *conversión* también son objeto de enseñanza, pero fundamentalmente las pocas que se realizan mediante la aplicación de *reglas*. Un ejemplo de la enseñanza elemental es el del pasaje de escritura fraccionaria de un número a escritura decimal, y viceversa; un ejemplo de la enseñanza superior es el del pasaje de la descripción de una recta por medio de una ecuación implícita a una descripción por medio de una ecuación paramétrica, y viceversa.

Ahora bien, en su mayoría, las transformaciones de tipo *conversión* no son gobernadas por reglas sino que demandan la identificación de unidades significantes en el registro de partida y en el registro de llegada (Duval, 1995, 2007), lo que no es evidente ni espontáneo. Por ese motivo, un gran problema didáctico es el de encontrar condiciones para que los alumnos logren hacer *conversiones* espontáneamente según las necesidades de una tarea, capacidad que caracteriza los procesos del experto en la resolución de problemas. En diversos puntos de su obra, Duval analiza la complejidad cognoscitiva y didáctica de estas operaciones (1988, 1993, 1995, 2002, 2007).

Una conclusión que deriva de este análisis es que el **tipo de transformación** (*tratamiento*/*conversión*) es una variable didáctica de las tareas que requieren *transformaciones semióticas*, en particular las que ponen en juego las operaciones de *reconocimiento, observación, descripción* y *definición* de objetos matemáticos.

Otro aspecto de interés ligado a la posibilidad de realizar *transformaciones semióticas*, es el de la identificación de *unidades significantes*. Duval (1995) establece un criterio general para abordar este problema:

> (…) La discriminación de las unidades significantes en un registro de representación constituye, pues, un problema análogo al de la investigación de los diferentes factores de variación que intervienen en el análisis de un conjunto de factores que, en la ocurrencia de un fenómeno, intervienen simultáneamente y no pueden ser aprehendidos aisladamente: para disociarlos es necesario recurrir al "método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, mientras que los demás permanecen sin cambio" .

En continuidad con este criterio general, en este primer análisis semiótico desarrollamos otros criterios para el diseño de tareas matemáticas, de manera de favorecer que el sujeto pueda *por sí mismo* observar variaciones, ensayar estrategias de control y establecer conclusiones. Es por eso que en términos generales hemos trabajado con la idea de promover las funciones metadiscursivas[40] de *objetivación* y *tratamiento* por parte de los alumnos.

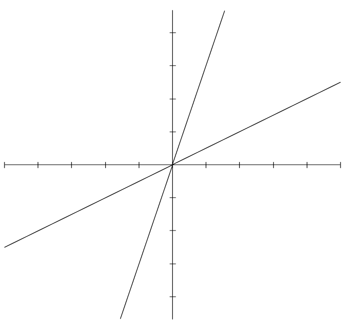
Los diversos criterios para el diseño de tareas que presentamos a continuación así como los establecidos para la comprensión y utilización de una definición matemática (ver 5.3) han sido establecidos teniendo en cuenta las particularidades analizadas aquí sobre el acceso a los objetos matemáticos y sobre las transformaciones semióticas.

5.2.3 El *reconocimiento* de objetos « individuales» y de relaciones antes y después de una transformación semiótica

El criterio establecido aquí por nosotros está destinado a favorecer la experiencia de *reconocimiento* de objetos individuales cuando éstos son sometidos a pasajes de un tipo de representación a otra realizados mediante una *transformación semiótica*. Hemos tomado como punto de partida dos capacidades básicas establecidas por Duval (2006 a) necesarias para el reconocimiento de objetos:

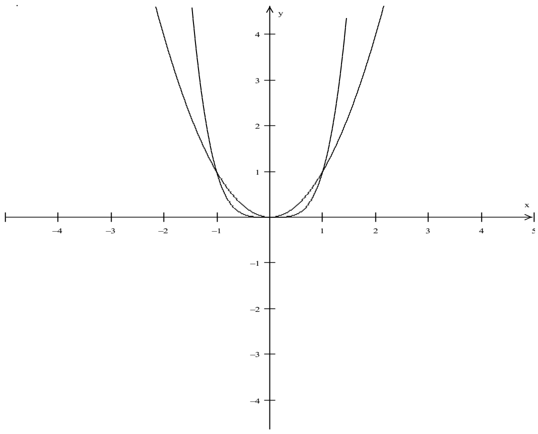
- El **reconocimiento identificante** de un mismo objeto representado en dos sistemas diferentes. Por ejemplo « 0,75 » y « ¾ », dos escrituras del mismo número en los sistemas decimal y fraccionario

- El **reconocimiento discriminante** necesario para distinguir dos objetos en el mismo sistema, cuando pueden parecer los mismos. Por ejemplo**:**



40 Duval denomina funciones discursivas a las funciones que cumplen las lenguas (ver 3.2.1) y funciones metadiscursivas a las funciones que cumplen todos los registros semióticos (ellas pueden ser: de objetivación, tratamiento, y comunicación)

Otro ejemplo es el siguiente. Los alumnos tienden espontáneamente a interpretar estas curvas como parábolas, cuando una de ellas no lo es:



El criterio que establecimos para el diseño de tareas que favorezcan la actividad de exploración y reconocimiento, es el de incorporar estas capacidades en el contexto de **todas** las *transformaciones semióticas* que, conservando el objeto (*denotado*, o *representado*) cambian el *sentido* de la expresión que lo designa (*contenido* de la representación semiótica). Según nuestro análisis, esto permitiría explotar exhaustivamente las capacidades de discriminación e identificación presentadas por Duval.

Bajo ese criterio, identificamos especialmente las tareas que ponen en juego:

- el **reconocimiento identificante** de un mismo objeto representado de **dos maneras** diferentes en el **mismo sistema** (a través de un *tratamiento*).

- el **reconocimiento identificante** y el **reconocimiento discriminante** necesarios para la comprensión de lo que se conserva y de lo que no se conserva entre « las imágenes » de dos representaciones obtenidas mediante un *tratamiento* en un registro, por conversión a otro registro.

5.2.3.1 Algunos ejemplos de interés de cada tipo identificado

5.2.3.1.1 Ejemplo del primer tipo

Un ejemplo de este tipo bien conocido es el de un objeto denotado de diferentes maneras, es decir expresado con cambios de *sentido,* mediante *tratamientos* dentro del sistema de las *escrituras algebraicas.* La expresión última obtenida, por ser la más condensada, crea la ilusión de que es la única expresión que denota el objeto (es decir, de que se lo ha "*hallado*")

$$3x + 2 = 2x + 4$$

$$3x - 2x = 4 – 2$$

$$x = 2$$

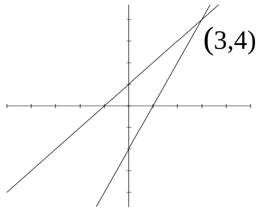
5.2.3.1.2 Ejemplos del segundo tipo

Para ilustrar este tipo de actividad, veremos dos ejemplos que si bien son análogos en tanto tarea *matemática*, ponen en juego diferentes actividades cognitivas y permiten en consecuencia identificar *variables didácticas.*

Primer ejemplo

Cuando se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales, a menudo se hace una representación gráfica (dos rectas) del sistema:

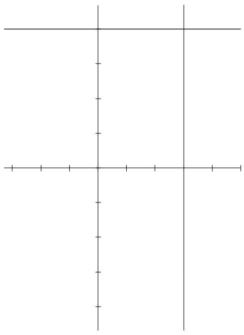
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$



Al hacer el *tratamiento* algebraico del sistema para obtener la solución, en general se observa que los alumnos creen que las dos rectas correspondientes obtenidas por conversión deberían « *ser las mismas* » que las dadas inicialmente. Esto parece indicar que para ellos, mediante un *tratamiento* algebraico se conserva no solamente la **solución** del sistema sino también, las **ecuaciones** (ya que sus representaciones gráficas, según ellos, deberían conservarse).

Este ejemplo es interesante en términos semióticos para hacer observar que, entre « las imágenes » de las dos representaciones obtenidas mediante el *tratamiento* algebraico - por conversión al *registro gráfico*- se conserva la *denotación* pero no el *contenido***,** lo que se expresa claramente por el desplazamiento de las rectas:

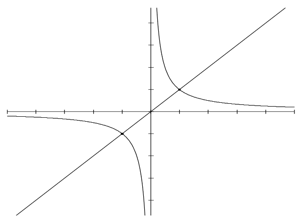
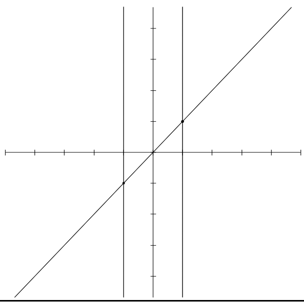
$$\begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$



(3,4)

Segundo ejemplo

Un ejemplo más interesante aún se da en el siguiente caso en el que las ecuaciones no son ambas de grado 1, y la diferencia de *contenido* de la representación gráfica después del *tratamiento* algebraico se manifiesta no sólo por el cambio de las *curvas* que denotan el objeto, sino también por el cambio del *tipo* de curva:

$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$	
$\begin{cases} y = x \\ x^2 = 1 \end{cases}$	

Esto muestra que los **tipos de curva** que describen las ecuaciones del sistema son una variable didáctica (en relación con las capacidades de **reconocimiento identificante** y de **reconocimiento discriminante** enunciadas por Duval): no sólo el *tratamiento* algebraico y las respectivas *conversiones* del sistema antes y después del *tratamiento* requieren diferentes estrategias; los recursos a utilizar para reconocer la **invariancia referencial** en los dos registros de representación y el **cambio de *contenido*** (o *sentido*, en el registro algebraico) son diferentes según el tipo de curvas que describen las ecuaciones del sistema.

En este capítulo, en los apartados 5.5 y 5.6, analizamos particularidades de los registros *gráfico* y de las *escrituras algebraicas.* En el capítulo 6 analizamos la complejidad cognoscitiva de las tareas matemáticas que demandan *implícita* o *explícitamente* conversiones gráfico-algebraicas (en sentido directo e inverso). Las particularidades encontradas permiten profundizar el análisis realizado aquí en relación con las distintas capacidades de *reconocimiento*.

Entendemos que este criterio (de **tipo de reconocimiento** de objetos y de relaciones antes y después de una transformación semiótica) debe ser cruzado posteriormente con el del **tipo de registros** (discursivos y no discursivos) puestos en juego en la *conversión* (ver 5.2.7).

5.2.4 Los diferentes tipos de *conversión* solicitadas por una tarea matemática

Hemos distinguido diferentes tipos de *conversión*:

- Las explícitamente solicitadas por una tarea
- Las implícitamente solicitadas por una tarea
- Las no solicitadas por una tarea (ni explícita ni implícitamente)

Como veremos a continuación en la explicación de cada caso, el carácter (explícito, implícito, ni explícito ni implícito) de solicitud de la *conversión* constituye una **variable cognitiva**. En cada uno de los casos identificamos otras variables cognitivas, algunas de las cuales son **variables didácticas.**

5.2.4.1 Las *conversiones* explícitamente solicitadas por una tarea

Las conversiones **explícitamente** solicitadas por una tarea son bien conocidas. Se trata de las « actividades de *conversión* » (mal llamadas a veces « actividades de traducción »[41]) en las que se pide explícitamente realizar una *transformación semiótica* determinada (por ejemplo convertir una expresión numérica decimal en fraccionaria, expresar en forma paramétrica una recta dada implícitamente por medio de ecuaciones, representar gráficamente una recta, etc.).

Este **carácter explícito** de solicitud de una *conversión* hace que la tarea sea relativamente más sencilla que los otros modos que distinguimos. Tal vez por ese motivo no se ponen en evidencia algunos problemas cognoscitivos sumamente importantes en relación con el *reconocimiento* de objetos.

Por ejemplo, ante una tarea que pide dar la ecuación paramétrica de una recta dada implícitamente, y representar, algunos alumnos hacen correctamente la *conversión* algebraica y luego realizan **dos** gráficos (¡uno para cada ecuación!).

Se podrá argumentar que lo hacen “para estar seguros”. Aun así, esta necesidad refleja una debilidad importante de naturaleza conceptual. Más precisamente, pone en evidencia que no se alcanza a comprender qué significa que un mismo objeto (número, recta, u otro) sea representado de diferentes maneras.

5.2.4.2 Las *conversiones* implícitamente solicitadas por una tarea

Las conversiones **implícitamente** solicitadas por una tarea son las que resultan necesarias por imposibilidad o dificultad de *tratamiento* en el registro de partida, pero que no son solicitadas como parte de la tarea. A menudo tienen un grado de libertad mayor que las **explícitamente** solicitadas, en el sentido de que no está determinado de antemano el registro de llegada de la *conversión*, sino que éste **debe ser elegido** por el

41 En el capítulo 3 hemos explicado el análisis de Duval (2007) de las diferencias entre las operaciones de “conversión”, de “codificación” y de “traducción”

sujeto. Este mayor grado de libertad supone mayor riqueza de pensamiento y mayor conocimiento.

Como veremos a través de los distintos tipos de actividad que hemos identificado dentro de esta categoría, esa complejidad puede expresarse de maneras muy diferentes y suele requerir estrategias diferentes (de naturaleza conceptual y semiótica) según sea el caso.

Las actividades que hemos identificado son numerosas, y las presentamos a continuación.

5.2.4.2.1 La modelización de problemas verbales

La modelización de problemas verbales es encarada por Duval (1995) como una *conversión* de representaciones:

> El planteo en ecuación de los datos de un problema es la *conversión* de diferentes expresiones lingüísticas de relaciones en otras expresiones de esas relaciones en el registro de una escritura simbólica

Esta perspectiva original de la actividad de modelización nos permitió identificar algunas **variables didácticas** de naturaleza lingüística, junto con otras de naturaleza matemática.

- el *tipo de modelo* (cualitativo, no cualitativo, numérico, analítico, etc.) pertinente para el problema; y a la vez, en cada uno de estos casos

- el *tipo de relación matemática* que puede expresar las relaciones del problema. Por ejemplo, los modelos analíticos pueden ser de tipo lineal, cuadrático, exponencial, etc.

Estas variables ponen en juego diferentes tipos de estrategias:

- en primer lugar, estrategias ligadas al conocimiento de propiedades matemáticas, algunas de ellas *independientes* de las representaciones (por ejemplo la naturaleza de las variables –cualitativas, no cualitativas- o el carácter –numérico o analítico- del modelo);

- ahora bien, una vez elegido el tipo de modelo, e identificado el tipo de relación matemática pertinente, la *expresión* de esas relaciones supone a continuación la elección de un *sistema semiótico* de representación. En este punto de la formulación, el proceso de modelización adquiere las características de una *conversión* de representaciones, como el planteo en ecuación identificado por Duval.

5.2.4.2.2 El *reconocimiento* de objetos matemáticos

El *reconocimiento* de un objeto matemático se realiza a menudo mediante una *conversión*, aspecto que no es evidente en absoluto, creemos que por el alto grado de automatización con el que un matemático realiza *conversiones* al analizar un objeto. Dicho de otra manera, el *reconocimiento* se realiza o requiere (implícitamente) un *tratamiento semiótico* de tipo *conversión*.

Por ejemplo, al ver una ecuación del tipo $x^2 + y^2 = 1$:

- el reconocimiento expresado por el enunciado verbal "*se trata de una circunferencia de radio* 1" supone una *conversión* al *lenguaje natural*; y

- el reconocimiento expresado por la representación de un círculo de radio 1 supone una *conversión* al *registro gráfico*.

De la misma manera que con la interpretación de la modelización de problemas verbales analizado en el punto anterior (5.2.4.2.1) el interés de este análisis es el de aportar a la comprensión de los problemas de reconocimiento de objetos todos los resultados de la teoría de Duval relativos a las *transformaciones semióticas* de tipo *conversión*. Más aun, en complementariedad con otros enfoques más orientados a tratar estos problemas como de naturaleza conceptual, este enfoque puede ayudar a identificar el origen semiótico de algunos problemas conceptuales. En su tesis, Meana presenta un análisis de libros de texto a partir del cual formula diversas hipótesis sobre las posibles concepciones erróneas de nociones matemáticas que podrían originarse en problemas semióticos (Meana, 2003).

5.2.4.2.3 La comprensión y utilización de una definición

El *tratamiento semiótico* de una *definición* (formulada explícitamente mediante un enunciado) es otro ejemplo: según nuestro análisis, la comprensión y la utilización de la misma demandan *implícitamente* un conjunto diverso de *conversiones semióticas*. Esto es desarrollado ampliamente en 5.3.1.

5.2.4.2.4 Resolución de un problema planteado en el registro gráfico

Este es un problema reconocido en el ámbito educativo. Encontrar analíticamente las soluciones (numéricas) de un problema planteado en el registro gráfico, requiere *implícitamente* pasar al registro de las escrituras algebraicas. Se trata de un tipo de tarea que es especialmente interesante, en tanto reconocer **espontáneamente** la necesidad de una *conversión* -si no obedece a razones de contrato didáctico- supone conocer los límites del *registro gráfico* y los alcances del registro de *escrituras algebraicas* (Drouhard & Panizza, 2012).

5.2.4.3 Las *conversiones* no solicitadas por una tarea (ni explícita ni implícitamente)

Las conversiones no solicitadas (ni explícita ni implícitamente) por una tarea suponen una elección consciente y espontánea en función de la tarea.

Entre ellas, se encuentran especialmente los **controles** y las **observaciones de variaciones sistemáticas** por *conversión*. Éstas son capacidades que se desarrollan con el tiempo y mediante actividades que muestren la insuficiencia de un solo registro en muchas tareas y la potencia de las *conversiones* a otro registro como elemento de control (Drouhard & Panizza, 2001).

5.2.4.4 Conclusiones

Las actividades dichas « de *conversión* », que solicitan explícitamente la articulación de dos registros, son fundamentales para la didáctica, y reconocidas en el ámbito escolar. Se trata del desarrollo de la capacidad de identificar categorías semánticas en un par de registros determinados de antemano por la tarea solicitada. Esta capacidad no es de ninguna manera espontánea y requiere una enseñanza específica.

Ahora bien, estas actividades donde explícitamente se pide una *conversión* no cubren el espectro de posibilidades de interés desde el punto de vista cognitivo, y muy especialmente en lo que concierne al *reconocimiento* y *descripción* de objetos. Las conversiones *implícitamente* solicitadas por una tarea o las que no son solicitadas ni *implícita* ni *explícitamente* requieren poner en juego estrategias de funcionamiento cognitivo superiores, en la medida en que –como analizamos anteriormente- en el primer caso suponen la **elección** de un registro pertinente para hacer una *conversión* y en el segundo suponen que se haya **descubierto** que la *conversión* entre registros es *un instrumento* para resolver cierto tipo de tareas.

Por todas estas cuestiones, el **carácter** (explícito, implícito, ni explícito ni implícito) de demanda de una *conversión* en una tarea constituye una **variable cognitiva** (y **didáctica** si se consideran solamente los dos primeros valores).

Su consideración sistemática contribuye al desarrollo de las capacidades de *observación*, *reconocimiento* y *descripción* de objetos matemáticos, así como al desarrollo – de manera transversal a los contenidos- de una capacidad fundamental del pensamiento matemático: la de concebir *espontáneamente conversiones* para el *reconocimiento* de objetos y como elemento de *control*.

Este criterio (del **tipo** de *conversión*) deberá ser cruzado posteriormente con el del **tipo de registros** (discursivos y no discursivos) puestos en juego en la *conversión* (ver 5.2.7).

5.2.5 Dos dimensiones de la *significación* de una expresión: el *contenido* y la *operatividad*

Estudiar la complejidad de las operaciones de *descripción* y de *definición* de objetos matemáticos conduce inevitablemente a analizar las expresiones (simbólicas o en lenguaje natural) desde un punto de vista *semántico*.

En este contexto, distinguimos especialmente dos dimensiones de la *significación* de una expresión:

- el **contenido** de la expresión (lo que la expresión explicita); y
- su **operatividad** (lo que la expresión permite hacer).

La primera de estas dimensiones –y en general el contenido de toda *representación semiótica*- remite directamente a las posibilidades de *expresión* del sistema semiótico en el cual se realiza la representación, y en el caso particular de una *expresión*, a las posibilidades de la lengua (natural o simbólica) en la que se la formula. Como ya hemos explicado y desarrollado en el capítulo 3, cada sistema semiótico tiene particularidades por las cuales puede expresar *ciertos* contenidos y no otros, aspecto en el que reside su debilidad y su fuerza.

Por otra parte, si una fórmula puede expresar de manera *condensada* todas las características de un objeto, es evidente que esa capacidad expresiva no es suficiente para que un sujeto se apropie de todas las características del objeto.

Todas estas particularidades hacen necesario realizar *transformaciones semióticas* a fin de poder apreciar diferentes *contenidos* (propiedades de un objeto).

La segunda dimensión, la **operatividad** de una expresión, lo que ella permite hacer, remite al segundo de los criterios de clasificación de los signos elegidos más arriba (ver 5.1.2), según el cual interesan:

> « (…) sus posibilidades [de los signos] de ser transformados en otras representaciones semióticas»

En relación con este punto, como ya hemos destacado, cada sistema semiótico tiene sus propias posibilidades de *tratamiento*, lo que junto con las posibilidades de *expresión* determina las posibilidades de significar y de operar *dentro* del marco de ese sistema. A fin de poder dominar la *operatividad* de las expresiones, se hace necesario conocer las posibilidades de los signos de ser transformados y de ser capaz de utilizarlas en función de la tarea.

Para un trabajo en el dominio del álgebra, por ejemplo, a fin de trabajar adecuadamente, es necesario adquirir conocimiento sobre las capacidades expresivas y de transformación de las *escrituras algebraicas.* Sin embargo, esto no es suficiente. Se requiere desarrollar una capacidad de análisis de las expresiones según las dos dimensiones identificadas aquí –el *contenido* y la *operatividad*-, y una capacidad para pasar de una dimensión a la otra en función de los requerimientos del cálculo o el razonamiento de que se trate.

Analizaremos esta idea por la vía negativa, a través de un ejemplo.

La fórmula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ contiene dos expresiones que *denotan* un mismo objeto, a la vez que:

- la primera "a^2-b^2" explicita la diferencia de dos cuadrados; y
- la segunda "$(a - b)(a + b)$" explicita el producto de una diferencia por una suma

(en términos fregeanos, ambas expresiones tienen la misma *denotación* y *sentidos* diferentes).

La fórmula permite la *sustitución* de cada expresión por la otra, de manera simétrica. Sin embargo, los alumnos no dominan siempre su *significación* en el sentido de la *operatividad* porque a menudo sustituyen: $(a - b)(a + b)$ por $a^2 - b^2$ cuando es la primera expresión la que sería *operatoria* para la tarea (por ejemplo para resolver la inecuación $a^2 - b^2 > 0$); o inversamente $a^2 - b^2$ por $(a - b)(a + b)$ cuando es la primera la que sería *operatoria*, etc. (Panizza & Drouhard, 2003).

Entendemos que si desde el punto de vista sintáctico la operación de sustitución es simétrica (en virtud del significado del signo « = » para las expresiones algebraicas) desde el punto de vista cognitivo, no hay *conmutatividad* de la operación de sustitución (tal vez en virtud de la imposición del signo « = » utilizado en aritmética elemental en un sentido único).

Esta dimensión de la *operatividad* muestra entonces que, aunque los alumnos puedan concebir dos expresiones diferentes para *denotar* un mismo objeto (y hasta captar el *sentido* de cada expresión), pueden no ser capaces de realizar las *transformaciones semióticas* de tipo *tratamiento* que permiten la *substitución* de una por la otra y que caracterizan las operaciones discursivas de tipo cálculo y de tipo razonamiento en el dominio del álgebra.

Se trata de algo a desarrollar a través de estas dos dimensiones de la *significación* de una expresión –el *contenido* y la *operatividad*- y para ambas capacidades interesa especialmente la propuesta de tareas con variadas formas de representación de cada objeto.

En el punto 5.3 tendremos en cuenta este criterio de distinguir ambas dimensiones al analizar las *transformaciones semióticas* ligadas a la comprensión y utilización de una definición formulada explícitamente, en tanto una tal formulación se realiza mediante una *expresión* (compuesta, en lenguaje mixto -natural y simbólico-).

5.2.6 Los diferentes tipos de sustitución de una expresión

Vamos a distinguir:

- las sustituciones de tipo *tratamiento*
- las sustituciones de tipo *conversión*
- las sustituciones de tipo *instanciación*

En el capítulo 3 hemos explicado que toda *sustitución* consiste en el reemplazo de una *expresión* por otra en un contexto dado. Analizamos los aportes de Frege y de Duval a la comprensión del progreso discursivo en matemática en términos de la sustitución de unas *expresiones* por otras con *diferente sentido* e *invariancia referencial.* Presentamos también el análisis de Duval acerca de la potencia de los signos pertenecientes a un sistema semiótico en términos de su capacidad de sustitución de unos por otros, análisis que el mismo autor reconoce como posible gracias a desarrollos posteriores a Frege.

Ahora bien, nos parece conveniente extender esta noción perteneciente a la lógica y relativa a expresiones lingüísticas, al contexto más amplio de las sustituciones de una representación en un registro semiótico cualquiera por otra representación del mismo objeto (*diferente contenido* e *invariancia referencial*).

Desde esa perspectiva, al considerar los razonamientos ligados fundamentalmente a la utilización de un lenguaje (Duval, 1995) nuestro análisis nos condujo a señalar la importancia de distinguir los diferentes *tipos de sustitución* como mecanismos totalmente diferentes del razonamiento matemático, y observar que según la tarea (de cálculo, de validación, de explicación, de descripción, etc.) se ha de privilegiar uno u otro.

Un ejemplo de ello es el de la sustitución de una expresión simbólica por otra equivalente, analizado en el párrafo anterior (5.2.5). Se trata de una *sustitución* de tipo *tratamiento* en el dominio de las *escrituras algebraicas*.

Las *sustituciones* de tipo *conversión* son requeridas para expresar propiedades diferentes de un objeto o bien para realizar *tratamientos* en el registro de llegada cuando el registro de partida resulta inconveniente.

Finalmente, las *sustituciones* de tipo *instanciación.* La exhibición de un ejemplo de un enunciado existencial o de un contraejemplo de un enunciado universal son ejemplos de este tipo. Habrá de notarse que en ambos casos, es una *sustitución* de tipo *instanciación* la que permite hacer avanzar el razonamiento, en la medida en que permite determinar el valor de verdad del enunciado.

Lo que habrá que retener -desde el punto de vista didáctico- es la importancia de desarrollar la capacidad de:

- identificar la pertinencia de un tipo *particular* de *sustitución* en función de la tarea; y

- realizar adecuadamente dichas sustituciones (lo que supone el dominio de las reglas de *tratamiento* de cada registro, capacidad de identificar unidades significantes para las *conversiones* y un amplio espectro de *objetos familiares* para las *instanciaciones*).

En la medida en que estas sustituciones requieren estrategias diferentes, el **tipo de sustitución** es una **variable cognitiva**. Es una **variable didáctica** de las tareas que *explícita* o *implícitamente* requieren sustituciones (ver 5.2.4).

En el punto 5.3.1 tendremos nuevamente en cuenta estos distintos tipos de sustitución para el análisis semiótico ligado a la comprensión y la utilización de una definición formulada explícitamente.

5.2.7 Los diferentes tipos de registros puestos en juego en las *conversiones* (*discursivos* y *no discursivos*)

Como hemos discutido en el capítulo 3, uno de los análisis semióticos de Duval, -el de "*la manera en que las unidades de sentido, constitutivas de las representaciones semióticas, se organizan entre ellas"*- lo lleva a distinguir las representaciones *discursivas* producidas por los lenguajes, de las representaciones *no discursivas* (Duval, 2007). La pertinencia didáctica de esta distinción ha sido presentada en toda su obra, especialmente en relación con la operación de *reconocimiento* de expresiones en una escritura formal y de formas en una figura geométrica (Duval, 1995, 2006b).

En este apartado abordamos esta distinción (*discursivo*/*no discursivo*) como elemento de análisis de la complejidad y los límites de una *conversión*, cuando ésta es utilizada como medio para la operación de *reconocimiento*.

Vamos a desarrollar esta idea a partir de un ejemplo, relativo al análisis del *contenido* de una expresión algebraica[42] a partir de su *conversión* a un registro *no discursivo*. La fórmula $a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b)$[43] es difícil de comprender por los alumnos. Para abordar este problema complejo, a menudo se realizan *conversiones* al registro de las figuras, con fines expositivos. El valor ilustrativo del dibujo consiste en principio en hacer visualmente explícita la relación establecida por la fórmula.

Esta *conversión* (entre un *registro discursivo* y uno *no discursivo*) que se usa como medio de ilustración presenta dos dificultades que interpretamos a continuación. La primera dificultad se explica en términos de la teoría de Duval, gracias a la noción de

---

[42] En 5.2.5 analizamos el mismo ejemplo desde el punto de vista de la dimensión de *operatividad* de la expresión

[43] Esta fórmula contiene *implícitamente* un cuantificador universal (Drouhard & Panizza, 2012). Dicho de otro modo, está expresada en el registro simbólico, que contiene las escrituras algebraicas y los símbolos de operaciones lógicas (registro *discursivo*)

congruencia de representaciones; la segunda, en términos de la noción introducida por nosotros en 5.2.5, la *operatividad* de una *expresión*.

5.2.7.1 Dificultad ligada a la *no congruencia* de representaciones

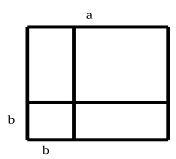
La *congruencia* de representaciones es una noción aparentemente sencilla. Sin embargo, no es evidente el análisis del cumplimiento o no de sus distintas condiciones. Duval (1995) define esta noción en base a tres criterios de congruencia:

- la posibilidad de una **correspondencia "semántica"** de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones se le puede asociar una unidad significante elemental de la otra

- la **univocidad "semántica" terminal**: a cada unidad significante elemental de la representación de partida, no le corresponde más que una unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada

- las **organizaciones** respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el mismo orden en las dos representaciones

En el ejemplo que estamos analizando, las representaciones *no* son *congruentes* porque no es posible asignar a los signos « -» y « + » del registro de partida, unidades significantes elementales en el otro registro de llegada (primer criterio de *congruencia* de representaciones): "a^2 - b^2 = (a - b) (a + b)"



a

En otras palabras, los *contenidos* de ambas representaciones no son los mismos, en la medida en que la relación expresada algebraicamente no está *expresada* en el registro de las figuras, sino que debe ser *inferida* (por tratamiento de la figura)[44]. Dicho de otra manera, el *contenido* de ambas representaciones es diferente, y el *objeto* representado (la relación algebraica) es conservado *solamente* mediante un *tratamiento* de la figura. Esto se inscribe dentro del problema de *reconocimiento identificante* – de un mismo objeto representado en dos sistemas diferentes- presentado en 5.2.3, en el caso particular en el que los dos sistemas son uno *discursivo* y el otro *no discursivo*.

Esto significa que ni la *operación* de *conversión* ni la *conservación* del *objeto* son evidentes para los alumnos, porque requieren un conocimiento de ambos registros a fin de poder expresar la relación mediante un tratamiento de la figura. Es lo que ocurre en general cuando las representaciones no son *congruentes,* lo que muestra también que la **complejidad** de la *conversión*, en el sentido de ***congruencia/no congruencia*** es una **variable didáctica**. Asimismo, muestra la pertinencia de cruzar este criterio de **complejidad** de la *conversión* con el de los **tipos de registros (***discursivos*/*no discursivos*) (ver *5.2.7*) al analizar o diseñar una tarea.

5.2.7.2 Dificultad ligada a la no conservación de la *operatividad* de la expresión algebraica

La expresión « $(a - b)(a + b)$ » tiene un *valor operatorio* (ver 5.2.5) -para simplificar, para resolver la inecuación $(a - b)(a + b) > 0$- que *no* posee la figura formada por cuadrados y rectángulos.

La utilización del registro gráfico en este caso tiene entonces en el mejor de los casos un *valor ilustrativo,* pero de hecho, no tiene *valor explicativo* del funcionamiento del sistema algebraico. En particular, no tiene *valor de prueba*. Esto muestra sus límites, lo cual es importante desde el punto de vista didáctico.

Este ejemplo muestra la complejidad de un análisis de tareas en términos de *transformaciones semióticas*. Muy especialmente, muestra la necesidad de tener en cuenta el **tipo de registro** (*discursivo* o *no discursivo*), la **complejidad de una**

[44] En 5.5 tratamos específicamente las características de otro registro no discursivo, el *registro gráfico*, en particular la necesidad de recurrir a operadores visuales para resolver problemas *dentro* del registro

conversión en términos de *congruencia* de representaciones y su alcance en términos de las operaciones semióticas y cognitivas que permite (en 5.5 y 5.6 tratamos este tema en profundidad en el caso de los registros *gráfico* y de las *escrituras algebraicas*; en el capítulo 6 lo profundizamos analizando una familia de problemas semióticamente equivalentes y su resolución en ambos registros).

5.3 La definición matemática

> « *Hay 10 tipos de personas en el mundo: las que saben contar en binario y las otras*»

En matemática existen tres tipos de definiciones principales: las dadas por un enunciado que explicita la propiedad característica; las definiciones por recurrencia y las definiciones por abstracción.

Presentamos aquí los problemas que hemos identificado como los más importantes desde el punto de vista de las *transformaciones semióticas* que son solicitadas implícita o explícitamente por la comprensión y la utilización de las definiciones dadas por una propiedad característica (5.3.1), incluyendo el análisis del caso especial en el que la misma es formulada en base a una *representación* particular (5.3.2). Abordamos también el problema de la comprensión de redefiniciones de objetos definidos con anterioridad (5.3.4).

5.3.1 Definición formulada explícitamente

Cuando la definición es explícitamente planteada, su formulación se hace por medio de lo que después de Laborde (1992), se llama « representación compuesta » (de escrituras simbólicas y de lenguaje natural). Para nuestro propósito, hemos encontrado pertinente entonces aplicar los criterios establecidos anteriormente a la *definición* en tanto *expresión*, considerando:

- los dos aspectos de la significación identificados en 5.2.5: el *contenido*, que remite a la identificación del objeto definido y sus propiedades; y la *operatividad*, que remite a lo que la definición permite hacer;

- los distintos tipos de *sustitución* (*instanciación*, *tratamiento* o *conversión*) requeridos explícita o implícitamente por la comprensión del significado de la definición y su utilización en distintos procesos de pensamiento (ver 5.2.6).

Los análisis que siguen a continuación son el resultado del cruce de estas dos dimensiones.

5.3.1.1 Sustituciones requeridas por la comprensión y la utilización de las definiciones explícitamente formuladas

En este apartado vamos a analizar cómo juegan los diferentes tipos de *sustitución* (*instanciación*, *tratamiento* o *conversión*) en relación con las dimensiones de *contenido* y *operatividad* de una definición formulada explícitamente**.** Adelantamos esquemáticamente las relaciones identificadas:

	De tipo *instanciación*	**De tipo *transformación semiótica***
Sustituciones ligadas al análisis del *contenido* (5.3.1.1.1)	del *definiens* (5.3.1.1.1.1)	del *definiens* (5.3.1.1.1.2)
Sustituciones ligadas a la *operatividad* (5.3.1.1.2)	del d*efiniens* (5.3.1.1.2.1)	del *definiens* (5.3.1.1.2.2.1)
		por sustitución del *definiendun* por el *definiens* y recíprocamente (5.3.1.1.2.2.2)

Como veremos a continuación, cada uno de los tipos de sustitución identificados cumple *funciones* diferentes según estén ligadas al análisis del *contenido* o a la *operatividad* de la definición.

5.3.1.1.1 Sustituciones ligadas al análisis del *contenido*

5.3.1.1.1.1 **Sustituciones de tipo instanciación del *definiens***

Cuando se trata de una definición formulada explícitamente, las sustituciones de tipo *instanciación* consisten en el reemplazo del nombre del objeto (*definiendum*) por una instanciación particular del *definiens*. Este tipo de sustituciones son fértiles y utilizadas habitualmente para comprender las propiedades expresadas por una definición a partir de la exploración y el análisis de ejemplos y contraejemplos.

Así, por ejemplo, ante la definición general de un espacio vectorial se acude a instanciaciones a manera de ejemplos tales como $\mathbb{R}^2$, una recta en $\mathbb{R}^2$ que pase por el origen, etc., y a manera de contraejemplos a una recta que no pase por el origen, un círculo, etc.

Estas instanciaciones sirven para comprender el significado de las propiedades pedidas en la definición, en la medida en que determinar el carácter de ejemplo o de contraejemplo de una instanciación requiere examinar esas propiedades como prueba de aceptación.

5.3.1.1.1.2 Sustituciones de tipo *transformación semiótica* (*tratamiento* o *conversión*) del *definiens*

La propiedad característica contiene toda la información necesaria para identificar el objeto definido por la misma. Sin embargo, esto no es suficiente para que se la comprenda y se aprecie su alcance. En general, se requieren distintas sustituciones de tipo *tratamiento* o de tipo *conversión* del *definiens*, las que debe realizar un sujeto por sí mismo o ser presentadas por el docente con carácter de ilustración y de manera expositiva.

Por ejemplo, la definición del paralelismo de dos rectas se hace generalmente a partir de expresiones algebraicas que describen estas rectas:

Una recta L': $\mu.w + Q$ es paralela a L: $\lambda.v + P$ si $w = k.v$

En general los alumnos « aceptan » esta definición. Sin embargo, a fin de facilitar la comprensión, los profesores apelan a una *conversión* al registro cartesiano, mediante representaciones de rectas paralelas genéricas. La articulación entre ambas representaciones también es « aceptada » por los alumnos, aunque no sean capaces de realizar la *conversión* ellos mismos.

Ahora bien, si entre los ejemplos posibles de dos rectas paralelas se elige un caso con dos rectas coincidentes, a menudo los estudiantes lo rechazan porque « dos rectas paralelas deben ser diferentes». El hecho de que la definición algebraica incluye como caso particular dos rectas coincidentes, se hace evidente para estos alumnos **sólo en el registro gráfico**. En este caso, la *conversión* sirve no sólo como ilustración sino que puede provocar un conflicto cognitivo en virtud de que ambas representaciones explicitan diferentes *contenidos* del **mismo objeto** (el hecho de que dos rectas paralelas puedan ser coincidentes es *implícito* en la formulación algebraica y *explícito* en el registro gráfico).

Este aspecto de la comprensión de esta definición puede ser abordado también mediante un *tratamiento* semiótico dentro del registro de las escrituras algebraicas. Sin embargo, es sabido que analizar si dos rectas paralelas L': $\mu\,(k.v) + Q$ y L: $\lambda\, v + P$ son o no coincidentes es sumamente complejo para los alumnos si uno se mantiene dentro de este registro.

El recurso de *tratamientos semióticos* del *definiens* de tipo *tratamiento* y de tipo *conversión* puede en el caso general servir -como en el caso que acabamos de analizar- para comprender el significado de una definición, para comparar las diferentes propiedades de un objeto, como elemento de control de los significados atribuidos al hacer explícitos aspectos implíticos en el definiens, etc. Para ello, se requiere que la enseñanza provea de ejemplos representativos que apunten al contenido de la definición, es decir a la identificación de los objetos y sus propiedades y que promueva el uso de *transformaciones semióticas* para hacer explícitos aspectos implícitos en el *definiens*. La tarea de comprensión encarada por parte del alumno requiere a su vez que él pueda concebir por sí mismo las instanciaciones posibles del enunciado, pueda pensarlas representadas en diferentes registros y establecer conclusiones por comparación de las mismas. Dicho de otro modo, la experiencia con objetos individuales según los tres ejes identificados en 5.2.1 y la *articulación* de registros se revelan significativos para la comprensión de una definición explícitamente formulada.

5.3.1.1.2 Sustituciones ligadas a la *operatividad*

Entender el *contenido* de una definición, es decir sus objetos y propiedades no garantiza de ninguna manera que la misma sea *operativa*. La *operatividad* de una definición depende fundamentalmente de la capacidad de *sustituir* expresiones o representaciones por *otras* expresiones o representaciones en el contexto de un discurso matemático, a fin de hacer avanzar un razonamiento o un cálculo (ver capítulo 3).

Las sustituciones ligadas a la *operatividad* de una definición que hemos identificado son de tipo *instanciación* (5.3.1.1.2.1) y de tipo *transformación semiótica* (5.3.1.1.2.2):

5.3.1.1.2.1 **Sustituciones de tipo *instanciación* del *definiens***

Desde el enfoque semiótico adoptado deseamos hacer notar que no se aprecia el *carácter* de *sustitución* que tiene una instanciación en el contexto de un discurso matemático.

La exhibición de un ejemplo de un enunciado existencial o de un contraejemplo de un enunciado universal son ejemplos de este tipo:

- El número 8 como instanciación de número *par* permite determinar el valor de verdad del enunciado

  Existen números pares que son múltiplos de 4

- El número 6 como instanciación de número par permite determinar el valor de verdad del enunciado

  Todos los números pares son múltiplos de 4

En general, al permitir determinar el valor de verdad de los enunciados, estas *sustituciones* de tipo *instanciación* hacen avanzar el razonamiento. Es por eso que las ubicamos en la dimensión de la *operatividad,* es decir en relación con lo que la definición *permite hacer.*

Es interesante notar que según nuestro análisis, las *sustituciones* de tipo *instanciación* cumplen funciones diferentes en relación con la *operatividad* y en relación con el análisis del *contenido* (ver 5.3.1.1.1.1): en este caso sirven para comprender la propiedad característica, en aquel para hacer avanzar el razonamiento.

5.3.1.1.2.2 Sustituciones de tipo transformación semiótica (*tratamiento* o *conversión*)

5.3.1.1.2.2.1 Transformaciones semióticas del *definiens*

La *operatividad* de una definición requiere la elección de *transformaciones semióticas*:

- *válidas*, en el sentido de que permitan sustituciones de unas representaciones por otras en el discurso matemático mediante un cambio de *contenido* e invariancia *referencial* (de manera de garantizar continuidad y novedad, es decir el progreso en el razonamiento (ver capítulo 3)) ; y

- *pertinentes*, en el sentido de conducir a la meta solicitada por la tarea

Ambos requerimientos suponen a su vez la capacidad de elegir los registros de representación apropiados para hacer avanzar el razonamiento o el cálculo, de la misma manera que para las sustituciones de tipo *transformación semiótica* ligadas al análisis del *contenido.*

5.3.1.1.2.2.2 Sustituciones del nombre del objeto (definiendun) por el enunciado que lo define (definiens) y recíprocamente

Esta posibilidad de sustitución recíproca en función de la necesidad de un razonamiento es cognitivamente compleja. Hemos analizado la dificultad de sustitución de una expresión por otra en general, en 5.2.5. Como ejemplo, hemos visto que:

Dada la propiedad*:* a^2-b^2 = (a-b) (a+b)*,*

sustituir a^2-b^2 por *(a - b) (a+b)*

es cognitivamente diferente que sustituir

(a - b) (a +b) por a^2- b^2

Entendemos que en el caso de una *definición*, estas sustituciones recíprocas:

definiendum $\rightleftarrows$ ***definiens***

presentan una dificultad aún mayor que cuando se trata de una *propiedad* como la expresada por la identidad algebraica anterior.

Más aún, esta dificultad es de diferente grado según el tipo de definición. Por ejemplo, para una definición del tipo:

«Aumentar en un t% una cantidad significa multiplicarla por (1+t/100) »

la sustitución del *definiendun* por el *definiens*

definiendum ***definiens***

funciona más bien como una **regla de acción**, y su *operatividad* está garantizada de antemano.

En cambio, para una definición del tipo:

«Un número n es impar si es posible escribirlo como $n = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{Z}$ »

la sustitución del *definiendum* por el *definiens* es más compleja. Al pensar virtualmente en un número n impar, dicha sustitución supone concebir la *existencia* de un número k que exprese la relación. La situación inversa, la de sustituir el *conjunto de propiedades* por el *nombre del objeto*

definiendum ***definiens***

es también importante para la *operatividad* y es aún menos evidente para los alumnos.

Por ejemplo, para demostrar que la suma de dos números consecutivos es impar, el procedimiento más elemental de pensar genéricamente en dos números consecutivos n y $n + 1$, analizar la suma $n + (n + 1) = 2n + 1$, y reconocer en el resultado un número impar, requiere:

1) Reconocer en $2n + 1$ la forma del *definiens* de número impar

2) Sustituir el *definiens* de número impar por el *definiendum*

Estas sustituciones no son de ninguna manera comparables a una regla de acción, y son necesarias para aplicar las propiedades conocidas como teoremas mediante un juego de sustituciones.

En síntesis, a fin de que una definición sea *operativa*, se requiere tener incorporado que estas sustituciones recíprocas son *válidas*; se requiere también la capacidad de elegir las que pueden ser *pertinentes* para hacer avanzar el razonamiento. Esto forma parte del conocimiento de lo que es *definir* en matemática y no es de ninguna manera espontáneo.

5.3.2 *El definiens* formulado en base a una representación particular

Las definiciones que consisten en descripciones de propiedades de un objeto *independientes de sus representaciones* son bien conocidas, no es necesario precisar aquí de qué se tratan.

Lo que nos parece importante en esta tesis es poner en evidencia que algunas definiciones son formuladas en base a una propiedad de las *representaciones* de los objetos y analizar semióticamente lo que esto agrega en complejidad a la comprensión y la utilización de una definición explícitamente formulada.

Se dice por ejemplo que

> « un número es racional si su *escritura decimal* es finita o periódica»

Habrá de notarse que este tipo de definición supone *por defecto* un sistema de representación particular, en este caso el *sistema decimal* de numeración.

Aunque el carácter de número *racional* no cambie al cambiar de sistema, otro tipo de propiedades sí cambian y la definición puede depender de la base de referencia. Por ejemplo, 1/3 tiene una escritura ilimitada periódica en el sistema decimal (“0,3333...”) pero su escritura es finita en el sistema triádico (« $\underline{0},\underline{1}$ », lo que significa $0 \times 3^0 + 1 \times 3^{-1}$).

Cuando el *definiens* expresa una propiedad de las *representaciones* de los objetos, impone implícitamente **restricciones** que juegan sobre la posibilidad de realizar observaciones de ejemplos y contraejemplos, comprender la definición y utilizarla en procesos de pensamiento. Esta imposición juega de manera diferente en cada una de esas operaciones, lo que puede ser analizado en términos del tipo de *sustitución* (*instanciación*, *tratamiento* o *conversión*) utilizado.

Esquemáticamente:

Sustituciones de tipo *instanciación*	Restricción del grado de libertad en el modo de acceso al objeto de *referencia*
Sustituciones de tipo *tratamiento*	Imposición del registro en el que se realiza el *tratamiento*
Sustituciones de tipo *conversión*	Imposición del registro de salida de la *conversión*

A continuación explicamos estas características encontradas.

5.3.2.1 Restricciones sobre las *sustituciones* de tipo *instanciación*

Consideramos primero las sustituciones de tipo *instanciación*. Como ya analizamos, estas sustituciones sirven especialmente para analizar ejemplos y contra-ejemplos, y en general para poner en juego las operaciones de observación, de identificación de los rasgos característicos y de descripción de estos rasgos a través del análisis de casos particulares.

En el caso general, cuando el *definiens* consiste en una descripción de propiedades del objeto *independientes* de sus representaciones, las observaciones tienen todos los grados de libertad posibles en cada uno de los ejes de variación que identificamos en 5.2.1: el de los datos; el de las instanciaciones y el de los registros.

Ahora bien, cuando el *definiens* consiste en una descripción de propiedades que sí dependen de la representación del objeto, hay una *reducción* del grado de libertad (el de los registros) para representar las *instanciaciones*.

Por ejemplo, dada la definición:

> « un número es racional si su *escritura decimal* es finita o periódica»

el registro *impuesto* para analizar una instanciación es el de las escrituras decimales.

El análisis lingüístico nos ha permitido comparar -mediante el método de las *diferencias* debido a Saussure (1973) - una definición como la anterior con la siguiente:

> « un número es racional si puede ser *escrito* como el cociente de dos números enteros »

Esta definición también se refiere a la *representación* del objeto (número racional) ("si puede ser escrito…") pero no depende de ningún *registro particular* de representación. Esto significa que el número debe ser expresado como un cociente, pero sin requerirse un sistema particular para los números involucrados (los que podrían escribirse en sistema de numeración romana u otra). Naturalmente, debido al sistema que usamos en la actualidad, para analizar una instanciación se va a trabajar en el registro de las fracciones, pero esto *no* es una condición expresada por el *definiens* –como en el caso de la definición que presentamos antes-.

Finalmente, la definición

> « un número es racional si es igual al cociente de dos números enteros »

no remite a ninguna representación, expresa solamente una condición de igualdad entre dos objetos. Esto permite diferentes grados de libertad para analizar las instanciaciones, lo que conlleva diferentes posibles estrategias.

Este análisis nos ha conducido así a identificar tres niveles diferentes de formulación de la propiedad característica que conllevan estrategias diferentes en las sustituciones de tipo *instanciación*. El hecho de que el *definiens* se formule en base a una representación particular o mediante una propiedad característica independiente de las representaciones es entonces una **variable didáctica** de las tareas que demandan una sustitución de tipo *instanciación*. También lo es, en el primer caso, el registro en el que se formula la propiedad.

5.3.2.2 Restricciones sobre las sustituciones de tipo *transformación semiótica* (*tratamiento* o *conversión*)

La misma reducción del grado de libertad opera también en las sustituciones de tipo *tratamiento* y de tipo *conversión*, cuando el *definiens* expresa una propiedad el objeto en un sistema de representación.

Más precisamente, el registro *impuesto* por la definición determina:

- el registro en el que se efectúan los *tratamientos* semióticos del *definiens*
- el registro de salida de las conversiones semióticas que se efectúan en el *definiens*

Por ejemplo, ante la definición anterior

> « un número es racional si su escritura decimal es finita o periódica»

Las *transformaciones semióticas* del *definiens* se realizan necesariamente en el registro semiótico de las escrituras decimales.

En la medida en que la comprensión y la utilización de una definición requieren recurrir a estas *transformaciones semióticas* el *registro impuesto* por la definición influye sobre ambas dimensiones.

Naturalmente, esta restricción del grado de libertad se puede superar, pero esto requiere a su vez otros tratamientos (semióticos o lógicos), lo que no reduce la complejidad sino que la traslada a otro lugar. Como hemos ya analizado en distintos puntos de esta tesis, las equivalencias que suponen estos tratamientos son automáticas para el profesor pero de ninguna manera para los alumnos. Las capacidades para realizar *tratamientos semióticos* con invariancia referencial y/o formulaciones lógicas que conserven la verdad requieren una enseñanza especial. De la misma manera que para las sutituciones de tipo instanciación, el hecho de que el *definiens* se formule en base a una representación particular o mediante una propiedad característica independiente de las representaciones es una **variable didática** de las tareas que demandan una sustitución de tipo *transformación semiótica*. También lo es, en el primer caso, el registro en el que se formula la propiedad.

5.3.3 El problema de articulación de la definición con las observaciones de objetos individuales

La enseñanza adopta principalmente uno de los dos modos de aproximación a la definición privilegiados: o bien la presentación de actividades a partir de las cuales, mediante la experiencia con objetos individuales, la observación y la descripción se deben abstraer las propiedades que caracterizan al objeto que se intenta definir; o bien la presentación de una definición formulada explícitamente que da cuenta de las condiciones necesarias y suficientes, y a partir de la cual se podrá acceder a su significado y su alcance (en términos de *extensión*).

Se trata de dos aproximaciones que consideran los procesos de definición de alguna manera según caminos opuestos. En la práctica ninguna se da en estado puro, y generalmente se requieren distintos niveles de *articulación*, entre las definiciones tal como son explícitamente planteadas por el profesor o el libro de texto, las observaciones de las *representaciones* particulares de las *instancias* particulares del objeto que el alumno pueda concebir por sí mismo, las que le son ofrecidas a manera de ejemplos, y las definiciones construidas a partir de dichas observaciones.

Consideramos que el problema de la articulación es en sí mismo todo un tema de investigación. No lo hemos abordado específicamente dentro de nuestro objeto de estudio. Sin embargo, algunos de los resultados del estudio empírico dan elementos para comprender dificultades de los alumnos relacionados con esos procesos, a la vez que sugieren una línea de trabajo para una tal investigación. Nos referimos a las características de las descripciones simbólicas que realizan los alumnos, que tienen para ellos valor de definiciones pero que *denotan* un conjunto de objetos individuales diferente del que ellos intentan describir (ver capítulo 4). Como sugerimos en 4.7.2 **una línea de investigación en didáctica se abre** y es el del trabajo sobre la adecuación entre las *descripciones* -verbales o simbólicas- a conjuntos de objetos y la capacidad de control sobre dichas descripciones. En la medida en que una definición matemática es un tipo particular de descripción que contiene en general lenguaje verbal y simbólico, esa capacidad de adecuación es necesaria para que las definiciones formuladas mediante propiedades establezcan las propiedades necesarias y suficientes requeridas por la definición matemática. Esa capacidad también es necesaria para que se pueda analizar el significado (la *comprensión*) de una definición, establecer su *extensión* y las relaciones que corresponden entre ambos aspectos de una definición explícitamente formulada.

5.3.4 Redefiniciones

El discurso matemático tiene entre una de sus particularidades la de tomar objetos ya definidos y retomarlos posteriormente en otros contextos y redefinirlos. Nos interesa especialmente analizar las siguientes situaciones desde el punto de vista semiótico:

- la redefinición de un objeto matemático mediante un cambio del *definiens* (por proposiciones equivalentes)
- la redefinición de un objeto matemático mediante un cambio de nombre (*definiendum)*
- la utilización de una misma representación para dos objetos matemáticos diferentes

5.3.4.1 Definiciones de un objeto dadas por proposiciones equivalentes

La tradición matemática considera que la comprensión de la equivalencia de dos proposiciones es de naturaleza estrictamente lógica o conceptual. Ahora bien, la mayor parte del tiempo el análisis de la equivalencia lógica de dos definiciones de un mismo objeto mediante proposiciones equivalentes requiere la realización de *sustituciones* de tipo *transformación semiótica*.

Tomemos como ejemplo las diferentes definiciones de proporcionalidad directa. Tenemos las siguientes definiciones equivalentes:

- *f* es una función de proporcionalidad directa si tiene la forma $f(x) = k.\ x$, siendo k un número real

Esta es la más habitual de las definiciones, utilizada como entrada al tema en la escuela secundaria

- *f* es una función de proporcionalidad directa si puede ser representada por una recta no vertical que pasa por el origen

- *f* es una función de proporcionalidad directa si cualquiera sean a, b y t números reales:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

y

$$f(t.a) = t.f(a)$$

(esta definición es puesta en acto espontáneamente en la escuela mediante procedimientos de los alumnos que se expresan como « a la suma la suma » y « al producto el producto ») (Vergnaud, 1990).

Establecer la compatibilidad o equivalencia de estas diferentes definiciones, explícitamente formuladas o no, demanda un *tratamiento* semiótico -dentro de las escrituras simbólicas o por *conversión* al registro gráfico-, que queda a menudo a cargo del alumno.

5.3.4.2 Renombrar (diferente *definiendum*/mismo *definiens*)

Hay también objetos que son definidos con un nombre **(***definiendum)* y luego con otro por medio de una misma proposición **(***definiens*).

El siguiente es un ejemplo de Álgebra Lineal: Un conjunto de dos vectores que caracterizan un plano que pasa por el origen se denomina "Conjunto de « vectores dirección » del plano" al comienzo del curso; y un poco más adelante, cuando el plano es considerado como sub-espacio de un espacio vectorial, "« base » del subespacio".

Éste es un ejemplo en el que se cambia el *nombre* del *objeto* en virtud de un cambio de *marco* (Douady, 1984).

La complejidad cognoscitiva del cambio de marco reside en comprender la noción de base de un subespacio, pero no en el tratamiento algebraico para decidir si se cumplen las condiciones, ya que las propiedades que caracterizan al objeto son las mismas en ambos casos.

En general, las redefiniciones en las que se cambia el nombre de un objeto, guardan la misma complejidad que este ejemplo de Álgebra Lineal. No se trata de establecer comparaciones entre proposiciones equivalentes (porque el *definiens* es el mismo). Tampoco se trata de redefinir relaciones como cuando un mismo *definiendum* se utiliza en otro marco (por ejemplo cuando se define "triángulo" sobre una esfera). El problema semio/cognitivo a retener es que un mismo objeto tiene dos denominaciones distintas, y debe ser mirado desde diferentes puntos de vista en cada marco, entre otras cosas por las relaciones que mantiene con otros objetos.

5.3.4.3 Utilización de una misma representación para designar dos objetos diferentes

El siguiente es otro ejemplo de Álgebra Lineal

Si B_1 et B_2 son dos bases determinadas de un espacio vectorial, la matriz cuyas columnas están formadas por las coordenadas de B_1 en la base B_2 es llamada en distintas cirucunstancias "Matriz de cambio de base (de B_1 a B_2)" o bien "Matriz de la transformación identidad (en las bases B_1 y B_2)".

Esto lo hace bastante complejo desde el punto de vista semiótico: se trata de ver que una misma matriz *C representa* dos objetos matemáticos diferentes.

En 5.2.3 analizamos la complejidad del *reconocimiento discriminante* necesario para distinguir dos objetos representados en un mismo sistema, cuando pueden parecer los mismos porque sus representaciones son *similares*. No cabe aquí utilizar esa noción para describir la operación de discriminación porque no se trata de dos representaciones similares sino de una *misma* representación. Sin embargo, sí se requiere la discriminación de los objetos; para lo cual ayuda el cambio de marco. Con la entrada en el tema de las transformaciones lineales, la misma matriz pasa a designar un objeto diferente, esta vez acompañado de un cambio de la propiedad característica (diferente

***definiens*).** Ahora bien, un objeto siendo caracterizado por las relaciones que tiene con otros objetos, puede decirse que los objetos “matriz de cambio de base” y “matriz de la función identidad” son diferentes pero sin embargo equivalentes bajo varios aspectos: cumplen una función análoga en cada uno de los marcos, tienen exactamente las mismas propiedades matemáticas, etc. Dicho de otro modo, ambos objetos son equivalentes pero no idénticos, a pesar de que sus representaciones bajo forma de matriz sea la *misma*.

Es importante retener la idea general de que **una misma escritura o signo** puede designar diferentes objetos matemáticos. En ese sentido, lo analizado en 5.3.4.2 se inscribe dentro de este problema general, en la medida que el *nombre* (*definiendum*) de un objeto es también una escritura con la que se lo designa. Lo hemos tratado aparte porque en tanto representación tiene un status especial desde el punto de vista cognitivo.

Lo analizado aquí tiene gran generalidad a la vez que no es posible determinar su alcance. Cada caso particular merece un análisis especial (piénsese por ejemplo en el signo “=” para establecer relaciones numéricas, para establecer relaciones algebraicas, o para indicar la familia de primitivas de una función).

5.4 Conclusiones

Hasta aquí, en este capítulo -bajo el principio de que la *semiosis* determina las condiciones de ejercicio de la *noesis*- hemos buscado identificar características de las tareas matemáticas que favorezcan la puesta en juego de las operaciones de *observación* y *reconocimiento* de objetos, y las operaciones discursivas de *descripción y denominación (definición*) de manera pertinente desde un punto de vista matemático. Los fenómenos encontrados en el *Estudio Empírico* nos condujeron a la necesidad de realizar este análisis, a fin de establecer *factores de variación* pertinentes para el trabajo didáctico, especialmente para identificar *condiciones de ruptura* con las definiciones espontáneas de los alumnos.

Por otra parte, hemos analizado distintos problemas ligados a la comprensión y utilización de una definición explícitamente formulada, su articulación con las definiciones construidas a partir de ejemplos particulares, y los problemas semióticos ligados a la redefinición de objetos.

Hemos abordado toda esta complejidad considerando especialmente *la articulación de registros de representación* como fuente principal para guiar el trabajo didáctico. Entre otros desarrollos, destacamos los siguientes:

- mostramos las *transformaciones semióticas* requeridas por el reconocimiento de un objeto individual y por la comprensión y operatividad de una definición explícitamente formulada (5.3.1)

- elaboramos fuentes de variación sistemáticas para el reconocimiento, observación, descripción y denominación (definición) de objetos matemáticos (5.2)

- identificamos algunas variables cognitivas y didácticas favorables al desarrollo de la capacidad de los estudiantes de formular descripciones (en lenguaje simbólico) adecuadas a los objetos que intentan describir (5.2; ver también 4.4).

Así como el *Estudio Empírico* mostró la necesidad de realizar estos *Análisis Semióticos*, estos últimos mostraron la necesidad de profundizar en las particularidades de la *representación* y el *tratamiento* dentro de dos registros fundamentales para la actividad matemática: el registro *gráfico* y el registro de las *escrituras algebraicas*. Es lo que presentamos a continuación junto con los resultados de una investigación que explica el valor instrumental de este análisis.

5.5 Particularidades de la *representación* y el *tratamiento* dentro del registro *gráfico*

En este apartado abordamos algunas particularidades del registro *gráfico* desde la perspectiva de articulación de los Principios 1 y 2 expuesta en 5.1.1. Dicho de otra manera, presentamos las características de este sistema semiótico surgidas de nuestro análisis, que resultaron relevantes para identificar aspectos del funcionamiento cognitivo requerido por la *observación* y la *descripción* de objetos matemáticos (en 5.6 hacemos un análisis desde la misma perspectiva con el registro de las *escrituras algebraicas*). El estudio nos llevó a identificar diferentes tipos de problemas relacionados con la posibilidad de *representación y* de *tratamiento* dentro de este registro.

En relación con la *representación*, hemos identificado los siguientes aspectos de interés:

- la *representación* gráfica de puntos que tienen un carácter de *genericidad*;
- la ausencia de ciertas convenciones y signos que garanticen un funcionamiento *autónomo* del sistema;
- el carácter parcial de las representaciones *impuesto* por el registro, en particular en relación con la representación de objetos no-acotados.

En relación con la posibilidad de *tratamientos* dentro del registro, hemos identificado como aspecto de interés la necesidad de recurrir a operadores visuales.

A continuación analizamos todos estos aspectos identificados, y algunas de sus consecuencias desde el punto de vista cognitivo.

5.5.1 Particularidades de la *representación* en el registro *gráfico*

5.5.1.1 La representación gráfica de puntos que tienen un carácter de genericidad

El registro gráfico presenta restricciones semióticas sumamente complejas en relación con la posibilidad de expresar –y posteriormente interpretar- el carácter de genericidad requerido por la actividad matemática.

Contrariamente a lo que ocurre con el registro de las *escrituras algebraicas*, en el registro *gráfico* no es suficiente poner *una letra* para representar un punto genérico (ver 5.6.1.1).

Para representar gráficamente un par ordenado *genérico* (x, y), la solución que se adopta en general es la de dibujar un punto (que no podrá ser otro que un punto *particular*) al que *se le da* un carácter de genericidad, adoptando la convención de ponerle una «etiqueta». Por ejemplo: « (x, y) ».

Naturalmente, estas *marcas* no deben tener ningún rasgo de singularidad (por ejemplo estar en el origen, o en uno de los ejes, o en la bisectriz de un cuadrante, etc.). La semiosis funciona dentro de una configuración que en este caso se completa con el "puntillado" (que permite graficar –también genéricamente- las abscisas y ordenadas de los puntos genéricos « (x, y) »).

La manera de representar un objeto genérico agrega complejidad a los *tratamientos* dentro de este registro, muy especialmente a los diferentes procedimientos visuales requeridos por la interpretación de los gráficos. Más adelante tratamos este problema en el caso particular del uso de un operador visual horizontal para determinar si una función es o no inyectiva (ver 5.5.1.3.1).

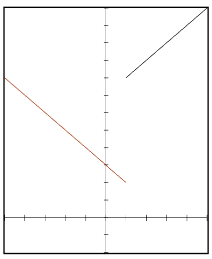
5.5.1.2 La ausencia de convenciones y signos que garanticen un funcionamiento autónomo del sistema

Encontramos que el sistema gráfico no dispone de dos tipos de signos importantes:

1. En primer lugar, signos para representar por ejemplo la desigualdad, o la igualdad, los cuantificadores, y las preguntas, etc.

   Esto tiene como consecuencia que cuando se busca resolver un problema -formulado en lenguaje *mixto* (*natural y simbólico*)- por un método gráfico, la *representación* obtenida por *conversión* de un enunciado produce representaciones *no congruentes* en el sentido de Duval, porque muchas de las *unidades significantes* no pueden tener asociadas *unidades significantes elementales* por *conversión* al registro gráfico, vulnerando de esta manera el *primer criterio* de congruencia de representaciones (un ejemplo de esto es dado más adelante cuando se trata de determinar por método gráfico si una función es o no inyectiva, y es profundizado en el capítulo siguiente mediante el análisis de una familia de problemas semióticamente equivalentes).

2. Este sistema tampoco dispone de signos que indiquen con rigor el comportamiento de un objeto fuera del marco restringido de la "ventana" en la que se realiza el gráfico. Para completar una representación, se recurre habitualmente a indicaciones en lenguaje natural que crean una ilusión de *cierre* del sistema a través de un mecanismo virtual. Por ejemplo, ante gráficos como el siguiente:



se agregan leyendas del tipo «completar siguiendo el sentido del recorrido», o bien «si el trazado del gráfico toca los bordes del marco, "todo continúa de la misma manera"», etc.

Pero el funcionamiento de estas convenciones semióticas no está bien definido. De hecho, un análisis basado en las propiedades figurales de las gráficas y la comprensión de « completar y seguir el sentido del recorrido » plantea problemas mayores. Uno de los problemas es el de identificar qué es lo que, precisamente, « continúa de la misma manera » en el seno de este « todo ». El caso de Ana Paula analizado en el siguiente apartado es elocuente de este problema.

5.5.1.3 El carácter parcial de las representaciones impuesto por el registro

Como toda representación, la representación gráfica es *necesariamente* parcial. La parcialidad que queremos discutir aquí se relaciona directamente con lo analizado más arriba: el marco restringido de una "ventana" en el que se realiza todo gráfico.

En el caso de los objetos no-acotados, esta restricción hace que no se pueda representar el objeto en todo su dominio de definición. La *metonimia* (del tipo «tomar el todo por la parte ») de la representación se impone necesariamente ¿Cómo representar una parábola por ejemplo, - que se extiende infinitamente-, en su totalidad, en el espacio reducido de una hoja de papel?

En consecuencia, el que « lee » un gráfico debe inferir a partir de las *cualidades figurales* de la representación de una parte del objeto, las características de la parte de la función que no está representada.

En los entornos informáticos, esto se resuelve a través de cambios de escala, del desplazamiento de la ventana, etc. Sin embargo, eso de « ir más lejos » para ver aquello de lo que tenemos necesidad, y saber « adónde ir » se vuelve circular cuando no se puede anticipar eso de «lo que tenemos necesidad ».

Aunque se pueda pensar que en el caso de restringido de las funciones lineales (o lineales a trozos) este problema está bien controlado, la comparación de los dos dibujos siguientes muestra lo contrario:

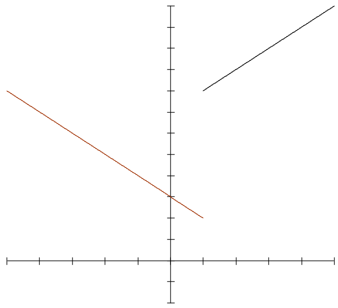


Gráfico I

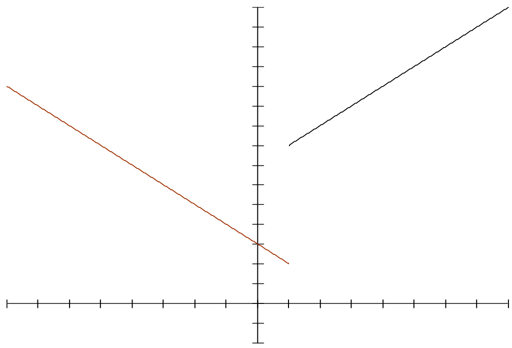


Gráfico II

Habrá de notarse que los dos dibujos representan el *mismo objeto*, la función

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 \text{ si } x < 1 \\ x + 7 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$

pero expresan diferente *contenido*: el Gáfico II *explicita* la no-inyectividad, y el Gráfico I *no la explicita*.

A continuación comentamos un trabajo anterior[45] "Estudio sobre la inyectividad de una función definida a trozos" sobre el análisis de esta función definida a trozos que muestra bien las posibles consecuencias de estas particularidades de la representación gráfica, desde el punto de vista cognitivo.

5.5.1.3.1 Resultados de la investigación sobre inyectividad

En la investigación, se presentó a los alumnos de un curso de 60 estudiantes de primer año de la Universidad el problema de analizar las propiedades de la función *f* definida más arriba.

---

45 Presentado como Seminario ante la Escuela de Verano 1999

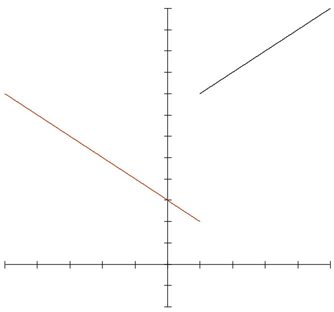
Teniendo en cuenta las escalas y rangos de valores que los estudiantes utilizan habitualmente para dibujar el gráfico de las funciones, anticipamos que en general producirían un gráfico del tipo I, y formulamos la siguiente hipótesis: a través del análisis del gráfico, los alumnos van a considerar que la función es inyectiva. Sobre todo, teniendo en cuenta que gran parte de los alumnos atribuyen valor epistémico[46] « evidente » (Duval, 1995) a una propiedad observada en el gráfico, sin someter a prueba este tipo de conclusiones.

El 40% de los estudiantes dio una respuesta incorrecta, y concordante con nuestro análisis a priori.

5.5.1.3.1.1 El caso de Ana Paula

El trabajo de Ana Paula –una de las alumnas- resultó especialmente interesante, porque ella:

- afirma que la función es inyectiva a continuación de un estudio analítico incompleto (ella estudia la inyectividad sobre cada fragmento de la función separadamente)**;**
- luego verifica en el gráfico (que ella misma trazó):



- y finalmente hace una tabla de valores que le confirma su afirmación, en virtud de los valores elegidos

Lo interesante de esta producción es que a diferencia de otros alumnos, ella

[46] El valor espistémico es el grado de fiabilidad de lo que está enunciado en una proposición (evidente, cierto, posible, plausible, imposible, absurdo, etc.) (Duval, 1995)

contrasta su estudio analítico con el gráfico y aun con la tabla de valores llegando a la misma conclusión.

Se consideró interesante realizar una entrevista clínica (ver anexo II)

Durante la entrevista, Ana Paula se compromete con una tarea más compleja que la necesaria: frente a un contraejemplo provisto por el entrevistador, hace cálculos y constata rápidamente la falsedad de su conjetura.

Sin embargo, no se detiene allí. Busca otros contra-ejemplos, luego una manera de obtenerlos, después una regularidad, y finalmente una caracterización.

El investigador le pregunta para qué hizo todo eso. Ana Paula explica:

« *Es que si tuviera que hacerlo de nuevo lo haría mal nuevamente, porque antes lo había hecho analíticamente, lo había verificado en el gráfico y me dio lo mismo y luego hice el cuadro de valores y no puse el* (*-6;2*). *No comprendo qué hice mal…* »

Dicho de otra manera, busca en la caracterización del conjunto de contra-ejemplos una información para mejorar su procedimiento de análisis.

En términos semióticos, Ana Paula busca realizar una *articulación* de registros. Aunque ella dice « controlar » los resultados obtenidos en el registro de los pares ordenados (« *porque antes lo había hecho analíticamente, lo había verificado en el gráfico…* ») el gráfico no la ayuda para darse cuenta de que su análisis es incompleto, y tampoco la tabla de valores «*…y luego hice el cuadro de valores y no puse el* (*-6;2*). *No comprendo qué hice mal…*». El contraejemplo en sí mismo y su reflexión sobre los diferentes registros utilizados no le permite darse cuenta de lo que le hubiera conducido a una respuesta correcta (hacer un dibujo en un intervalo más grande, considerar pares de valores representativos en el análisis y en la tabla, etc.).

El problema de las *instanciaciones posibles* de un enunciado en comparación con las instanciaciones que analizan los alumnos ha sido tratada anteriormente en este capítulo (ver sustituciones de tipo instanciación en 5.2.6 y en los distintos trabajos que conforman el Estudio Empírico). Muy especialmente, vimos las limitaciones en las producciones de los alumnos producto del campo restringido de *objetos familiares* para ellos.

En cuanto a la representación en el *registro gráfico,* este ejemplo muestra de manera interesante cómo el comportamiento de una curva *fuera del marco* donde se dibuja el gráfico es un problema complejo, aun para los alumnos que disponen de capacidades lógicas y matemáticas bastante avanzadas, como es el caso de Ana Paula.

También muestra consecuencias de las convenciones semióticas *mal definidas*. Por ejemplo, la convención según la cual « *todo continúa de la misma manera* » es ambigua. Aplicado a los dos gráficos presentados en 5.5.1.3 (GI y GII) da lugar a considerar el comportamiento de cada una de las semirrectas *separadamente* (cada una « *continuando de la misma manera* »).

En síntesis, el ejemplo muestra que los aspectos identificados aquí sobre las particularidades de la representación en el registro *gráfico* tienen consecuencias sobre las posibilidades de *tratamiento* dentro del registro. En el apartado siguiente analizamos el recurso de los operadores visuales utilizados habitualmente, junto con algunos de sus límites, tomando el mismo ejemplo de este apartado. Presentamos también el aporte de Duval sobre las *unidades visuales* y sus *configuraciones* como elemento para el análisis semiótico de tareas y para la identificación de variables didácticas.

5.5.2 Particularidades de los *tratamientos* dentro del registro *gráfico*

5.5.2.1 La necesidad de recurrir a operadores visuales

Como ya dijimos, en virtud de que no existen signos para representar los cuantificadores, la igualdad, la desigualdad, etc., en general no se cumple el primer criterio de congruencia de representaciones ("*a cada unidad significante simple de una de las representaciones se le puede asociar una unidad significante elemental"*)(ver 5.2.7.1). En consecuencia, los enunciados mixtos no producen representaciones congruentes en el *registro gráfico*.

Esto conduce a menudo a la necesidad de recurrir a *operadores visuales*.

Es el caso del ejemplo analizado anteriormente (ver 5.5.1.3.1). La definición de inyectividad de una función es:

Una función f es inyectiva si cualesquiera sean x e y números reales: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

La *conversión* al registro gráfico de este enunciado no permite representar la cuantificación "cualesquiera sean x e y número reales", ni el signo "$\neq$"

La *resolución gráfica* se realiza entonces mediante el uso de un *operador visual*[47] horizontal que consiste en pasear *virtualmente* una recta horizontal paralela al eje de las « x ».

Ahora bien, aunque este operador parezca trivial, *hereda* toda la complejidad de las características de la representación en este registro identificadas en esta tesis:

- en primer lugar, la complejidad de representación de lo *genérico* y el hecho de que no existan signos que expresen los cuantificadores (el operador supone recorrer virtualmente *todos* y *cada uno* de los puntos de un conjunto infinito representado en la ventana);

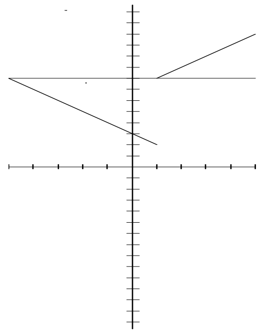
- en segundo lugar, los límites impuestos por el *carácter parcial* de la representación en el registro, al tratarse de un objeto no-acotado. Se trata de inferir las cualidades de la función fuera del marco de la ventana (la investigación presentada en 5.5.1.3.1 señala los límites de este operador visual para decidir la inyectividad de una función no acotada).

En ese sentido, es importante notar la diferencia entre los dos gráficos GI y GII en cuanto a la posibilidad de poder o no *trazar una frontera*.

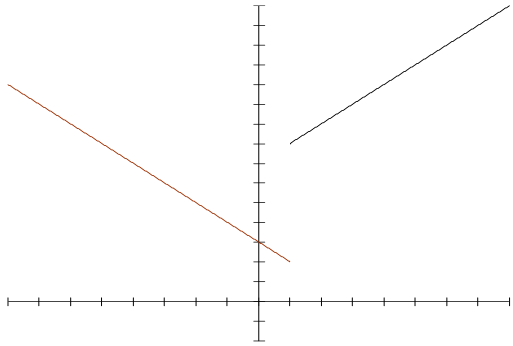
1. en el primer gráfico, se puede trazar una frontera que separa las dos unidades figurales:

---

[47] diferentes operadores visuales puede requerir el análisis de un gráfico. Más adelante utilizaremos el operador visual vertical, el que junto con el operador horizontal presentado en este capítulo forman los más tradicionales de los utilizados en la enseñanza. El juego de variables didácticas debe tener en cuenta especialmente los límites de estos operadores para la exploración dentro del registro gráfico.



2. en el segundo gráfico, no hay frontera posible:



Éste es el punto de vista de las *unidades figurales* y sus *configuraciones* (Duval, 1995; 2002; 2003). Al comparar los gráficos, vemos que:

- las *unidades figurales* son las mismas en ambos casos (una recta « baja », la otra« sube »); pero
- las *relaciones* entre estas *unidades figurales* no son las mismas

En términos de la teoría de Duval, se puede decir que no se trata de *dos gráficos diferentes*, sino de *un mismo gráfico*, pero de *dos figuras diferentes* -porque no contienen la misma información-. Dicho de otra manera, los dos gráficos explicitan diferentes informaciones (tienen diferentes *contenidos*) porque las *configuraciones visuales* (que forman las *unidades figurales*) son diferentes: constituyen dos maneras diferentes de situar una unidad con respecto a la otra.

5.5.3 Conclusiones

Sostenemos que la *analogía* y la *metonimia* relativas específicamente a *aspectos semióticos* deben ser estudiadas desde el punto de vista cognitivo y didáctico, así como han sido estudiadas las relativas a *ideas* y *conceptos*. Entendemos que se trata de un problema que abre toda una línea para investigaciones futuras.

El criterio de análisis en términos de *configuraciones visuales* de *unidades figurales*, que pueden cambiar la información en función de la *posición relativa* de estas unidades, es pertinente para cualquier figura. Por otra parte, en la medida en que diferentes representaciones de un mismo objeto pueden formar configuraciones figurales diferentes, diferentes procedimientos visuales son requeridos para su interpretación (*mirada intencional, deconstrucción dimensional, operador visual, etc*.) (Duval, 1994, 2005). Por ese motivo, el **tipo de configuración visual** constituye una **variable cognitiva.** Es también una **variable didáctica**, debido a que puede ser controlada por la situación.

5.6 Particularidades de la *representación* y el *tratamiento* dentro del registro de las *escrituras algebraicas*

De manera análoga a lo que hicimos con el *registro gráfico*, en este apartado presentamos las características de este registro que hemos identificado, y siempre atendiendo a los dos *principios* de análisis establecidos en 5.1.1. Organizamos estas características en términos de las posibilidades de *representación* y *tratamiento* dentro del mismo, de manera de facilitar un análisis comparativo de ambos sistemas de representación.

En relación con la *representación* algebraica, hemos identificado los siguientes aspectos de interés:

- la *representación* algebraica de valores que tienen un carácter de *genericidad*
- la ausencia de signos que garanticen un funcionamiento *autónomo* del sistema

En relación con los *tratamientos* dentro del registro, encontramos el problema de la omisión provisoria de escrituras y la omisión o sustitución provisoria de variables.

A continuación analizamos todos estos aspectos identificados, y algunas de sus consecuencias desde el punto de vista cognitivo.

5.6.1 Particularidades de la *representación* en el registro de las *escrituras algebraicas*

5.6.1.1 La representación algebraica de valores que tienen un carácter de genericidad

En el registro de las *escrituras algebraicas*, es suficiente poner una letra –por ejemplo *x*- para representar un valor que tiene carácter de genericidad. Ahora bien, se suele decir que "*x* representa un número *indeterminado".* Frege estableció que esa expresión no es adecuada, y la sustituyó por la expresión "*x* representa un número de *manera* indeterminada*".* Lo interesante desde nuestro punto de vista es poner el acento en que con este aporte, Frege descubre que la indeterminación no se da sobre los *números* sino sobre su *representación.*

5.6.1.2 La ausencia de signos que garanticen un funcionamiento autónomo del sistema

El registro de las escrituras algebraicas no contiene cuantificadores, ni los signos utilizados para la descripción de un conjunto (por ejemplo ("{}";"/", ":", etc.), ni signos que permitan representar una pregunta.

Esto tiene diversas consecuencias en la resolución de problemas por métodos algebraicos. En primer lugar, la *representación algebraica* obtenida por *conversión* de un enunciado -formulado en lenguaje *mixto* (*natural y simbólico*)- no produce representaciones congruentes en el sentido de Duval. La explicación es que algunas *unidades significantes* del enunciado original no tendrán *unidades significantes elementales* asociadas por *conversión* al registro de las escrituras algebraicas -de la misma manera que lo que ocurre con el *registro gráfico*- (ver 5.5.1.2).

En consecuencia, la *conversión* del enunciado al *registro de las escrituras algebraicas* resulta un mecanismo de implicitación que modifica el objeto *denotado* (o *representado*) por el enunciado original. Habrá de recordarse que según el enfoque semiótico adoptado aquí -siguiendo a Duval (1995) – consideramos el proceso de *expresión de relaciones* de un enunciado en términos de relaciones algebraicas como una *conversión* entre registros (“*El planteo en ecuación de los datos de un problema es la conversión de diferentes expresiones lingüísticas de relaciones en otras expresiones de esas relaciones en el registro de una escritura simbólica”*).

Desde este punto de vista, el proceso de *conversión* del enunciado de un problema al registro de las *escrituras algebraicas* presenta:

- en primer lugar todas las dificultades cognitivas ligadas al hecho general de que *no hay* reglas para la *conversión* entre registros;

- en segundo lugar, las dificultades ligadas a la *no congruencia de representaciones* y modificación del *objeto denotado* por el enunciado, según las características identificadas y analizadas aquí.

En relación con esto último, Duval (ibíd.) dice:

> (...)La dificultad de conversión de una representación depende del grado de no congruencia entre la representación de partida y la representación de llegada.

Según nuestro análisis, la pérdida de unidades significantes en este proceso de *conversión* al registro es constitutivo de la dificultad de *conversión en sentido inverso*, cuando una vez resuelto el problema la respuesta obtenida debe expresarse en términos del enunciado original (Drouhard & Panizza, 2012).

5.6.2 En relación con los *tratamientos* dentro del registro de las escrituras algebraicas

5.6.2.1 La omisión provisoria de escrituras y la omisión o sustitución provisoria de variables

Los *tratamientos* dentro del registro de las *escrituras algebraicas* suponen diversos mecanismos de implicitación y modularidad (Drouhard & Panizza, 2012).

Uno de ellos es la *omisión o sustitución provisoria* de variables y/o la *omisión provisoria* de escrituras. Muy especialmente, cuando el *tratamiento* de una cierta *escritura* consiste en el tratamiento de una de las *escrituras particulares* contenidas en la *escritura* original.

Un ejemplo sencillo es el de la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Mediante alguno de los procedimientos elementales, el *tratamiento* conduce a trabajar *provisoriamente* con una sola variable y/o con una sola ecuación.

Entre dichos procedimientos, el método denominado de *sustitución* merece un comentario especial, en la medida en que el mismo encierra toda la dificultad propia de un “cambio de variables”. El cambio de variables tiene en principio reservado dentro del sistema educativo una entrada *oficial* como método para resolver problemas de enseñanza superior en el dominio del análisis matemático. Sin embargo, muchos problemas matemáticamente elementales consisten en *sustituciones* que involucran un *cambio de variables* aunque no se los considere de esta manera. Estos problemas presentan en consecuencia toda la complejidad cognoscitiva propia de dicho método.

El mismo método de sustitución sirve para ilustrar la idea de omisión provisoria de escrituras (contenidas en una escritura original). Una vez realizada la sustitución, la resolución consiste en trabajar provisoriamente con una sola de las ecuaciones y una sola de las dos variables, debiendo a continuación recuperarse la información perdida –pero implícita en el contexto- para dar la respuesta final. Los problemas derivados de este tipo de pérdidas son de público conocimiento.

En términos generales, la fase de *tratamiento algebraico* consiste en mecanismos de implicitación y modularidad mediante los cuales se mantiene la *denotación* de una *parte* de la escritura (la *escritura particular* tratada). La obtención del objeto denotado por la fórmula original requiere de un mecanismo de recuperación progresiva una vez obtenido el "resultado" de la escritura particular tratada.

Otras dos cuestiones fundamentales destacamos en relación con los *tratamientos* dentro de este registro. Algunos de ellos:

- mantienen la *denotación* (de la escritura) pero la expresan con *sentidos* diferentes -a través *de escrituras* diferentes- (como en el caso de la resolución de ecuaciones)

- mantienen la *denotación* (de la escritura) y la expresan con el mismo *sentido* -a través de una misma *escritura*- pero esta escritura es utilizada con *significados* diferentes (como por ejemplo el caso de un plano que pasa por el origen, cuya ecuación es utilizada para indicar los "vectores dirección" o "una base del subespacio" en el contexto de un mismo discurso en el que se cambia de *marco*) (ver 5.3.4.3).

La complejidad cognoscitiva de toda la etapa de *tratamientos* supone una gestión de estos dos aspectos así como un tratamiento simbólico de la "indeterminación" de un símbolo tal como ***x***, representante de un número de *manera* indeterminada (5.6.1).

Estos aspectos son sumamente complejos a la hora de realizar los *tratamientos* pero en caso de poder realizarlos de manera automática, la necesidad de un manejo adecuado se pondrá en evidencia al momento de insertar la respuesta algebraica en la escritura original. Si bien esa posibilidad de tratamiento automático es la que da la potencia al tratamiento algebraico, un dominio de estos aspectos señalados es necesario para que el tratamiento simbólico sea un útil eficaz para la resolución de problemas.

5.6.3 Conclusiones

En síntesis, nuestro análisis conduce a señalar que por sus particularidades, la *representación* y el *tratamiento* dentro del registro de las *escrituras algebraicas* se basan en mecanismos de **implicitación** y de resolución **modular.** La flexibilidad del sistema permite el *tratamiento* de una escritura mediante pasos que comprometen ciertos “módulos” y no otros, pero la resolución algebraica *requiere* la recuperación de los “módulos” dentro de las escrituras y de éstas dentro de los enunciados de manera coherente. Por otra parte, una vez resuelto un problema por medio de una modelización algebraica, la respuesta al problema demanda la recuperación de los diversos elementos que necesariamente quedaron implícitos al *convertir* el problema al registro de las *escrituras algebraicas*. El capítulo siguiente está destinado a especificar todos estos aspectos a través del análisis de una familia de problemas semióticamente equivalentes.

6 A propósito de los problemas que demandan *conversiones* gráfico-algebraicas

Las cuestiones planteadas en los puntos 5.5. y 5.6 muestran la complejidad intrínseca de dos registros fundamentales de la actividad matemática: el registro *gráfico* y el de las *escrituras algebraicas*. Estas características tienen muchas consecuencias en la resolución de problemas matemáticos que demandan una *conversión* entre ambos registros.

En distintos lugares de esta tesis hemos abordado la complejidad cognoscitiva que acarrea la *conversión* de representaciones. Destacamos los problemas identificados con el Estudio Empírico (capítulo 4) especialmente con el dispositivo de *descripción* de una curva funcional (4.4), en un contexto de comunicación que compromete una doble *conversión* (registro gráfico→lenguaje mixto→registro gráfico) y los debidos al encapsulamiento de registros de representación (ver 4.6). En todo el Análisis Semiótico de Tareas Matemáticas hemos encarado el mismo problema en relación con las operaciones de observación, reconocimiento y descripción y en particular hemos mostrado que el tipo de registro es una variable didáctica de los problemas que requieren una *conversión* de representaciones.

En este capítulo analizamos otras complejidades ligadas a la *conversión*. Concretamente, analizamos un problema matemático elegido a fin de mostrar cómo juegan las particularidades de los registros *gráfico* y de las *escrituras algebraicas* identificadas por nosotros en 5.5 y 5.6, en actividades que demandan implícitamente *conversiones* entre ambos registros.

Concretamente, presentamos y analizamos un problema relativo a regiones del plano formulado en *lenguaje mixto* (*lengua natural* y *simbólica*) que demanda implícitamente una *conversión* al registro *gráfico* o al de las *escrituras algebraicas* según se adopte un procedimiento de tipo gráfico o de tipo algebraico. También demanda implícitamente dobles *conversiones* (sentido directo e inverso) *gráfico-algebraicas* para procesos intermedios de cálculo, de prueba o de control.

El análisis tiene un doble propósito.

En primer lugar, como acabamos de mencionar, tiende a mostrar la complejidad cognoscitiva de los problemas que suponen *conversiones* entre los registros involucrados, teniendo en cuenta los criterios establecidos en el capítulo 5.

En segundo lugar, y por la misma vía, busca mostrar la pertinencia de dichos criterios como instrumento de análisis semiótico de los problemas matemáticos.

El problema a analizar es el siguiente:

Sean dos funciones reales f y g, tales que $f(x) = x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, ¿Cuál es la región del plano definida por el conjunto de pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$?

Habrá de notarse que el análisis semiótico general del problema no depende de las funciones f y g elegidas. En ese sentido, el problema puede ser considerado como representativo de una familia de problemas semióticamente equivalentes.

Sin embargo, algunos aspectos particulares de visualización en el registro *gráfico* se ponen en evidencia con las funciones elegidas para esta formulación, y algunos aspectos particulares del registro de las *escrituras algebraicas* se ponen en evidencia con otro par de funciones, lo que mostraremos a lo largo de la exposición. Más adelante presentamos una variante del problema formulado con dos funciones genéricas f y g, a fin de establecer la diferencia en complejidad que presenta este aspecto genérico en comparación con la familia de problemas de funciones particulares.

Nos proponemos analizar las dificultades semiocognitivas de la resolución del problema, especialmente las ligadas a las diferentes *transformaciones semióticas* demandadas (explícitamente o no) por el problema, según se aborde una resolución gráfica o algebraica del mismo.

Se pueden seguir dos caminos diferentes:

- un procedimiento de tipo gráfico, o bien
- un procedimiento de tipo algebraico

Nuestro análisis sobre estos distintos tipos de procedimiento, tiene en cuenta en cada caso:

- el conjunto de operaciones a realizar a partir del enunciado hasta llegar a una representación en el registro (*gráfico* o de las *escrituras algebraicas*, según corresponda) que permita su resolución en dicho registro.
- los procedimientos posibles dentro del registro
- la necesidad o no de acudir a otro registro en el marco de la tarea (para tratamientos o controles intermedios)
- el conjunto de operaciones a realizar a partir del resultado obtenido para insertarlo en términos del problema original

En términos generales, todos estos procesos requieren una serie de *transformaciones semióticas* que difieren en naturaleza según el registro elegido para la resolución y según la necesidad de la tarea. A fin de analizar la complejidad cognoscitiva de estas operaciones, y según los criterios de análisis de tareas establecidos en el capítulo 5, tendremos especialmente en cuenta:

- las particularidades del registro (*gráfico* o de las *escrituras algebraicas)* en particular las identificadas en esta tesis (5.5 y 5.6)
- el carácter –implícito o explícito- de las *transformaciones semióticas* demandadas por cada tarea (5.2.4)
- la *congruencia* o *no* de la representaciones obtenidas por *conversión* (5.2.7.1)
- la conservación o no de la *denotación* y/o del *sentido* de la expresión (o *contenido* de la representación) después de cada *transformación semiótica*

6.1 Los procedimientos de tipo gráfico

Diferentes procedimientos de tipo gráfico pueden conducir a la “solución”, teniendo en cuenta, obviamente, que estos procedimientos demandan *implícitamente* (5.2.4.2) *conversiones* al registro de las *escrituras algebraicas*, ya que:

- para hacer los gráficos se deben determinar precisamente las coordenadas de los puntos de intersección
- como los procedimientos de tipo gráfico no tienen valor de prueba, para demostrar el resultado se requiere -también *implícitamente*- una *conversión* al registro de las *escrituras algebraicas.*

Estos límites de los procedimientos de tipo gráfico son bien conocidos y no es necesario detenerse más en este punto.

Nuestro análisis se dirige ahora a establecer las particularidades de tres etapas:

- la de *conversión* del enunciado del problema al registro *gráfico* necesaria para su resolución dentro del registro;
- la de *resolución* propiamente dicha; y
- la de inserción de la respuesta obtenida en el registro *gráfico* en términos del enunciado original

Esquemáticamente, encontramos los siguientes problemas en cada etapa:

Etapa de *conversión* del enunciado del problema al registro *gráfico*	Problemas ligados al *carácter genérico* de la letra *x* Problemas ligados a la *no congruencia* de representaciones
Etapa de la resolución *propiamente dicha*	Necesidad de recurrir a un operador visual Necesidad de recurrir al *registro de las escrituras algebraicas*
Etapa de obtención de la respuesta del problema original	Necesidad de recuperación de elementos implícitos y de reinterpretación de elementos explícitos

6.1.1 Etapa de *conversión* del enunciado del problema al registro *gráfico*

Dado que el problema se refiere a puntos del plano caracterizados por sus coordenadas, el registro de representación por excelencia es el sistema de coordenadas cartesiano. Esto podría conducir a pensar que el proceso de *conversión* del enunciado al registro *gráfico* y su resolución dentro del mismo es cognitivamente neutro. Veamos por qué esto se puede revisar a la luz del análisis semiótico.

6.1.1.1 Problemas ligados al carácter genérico de la variable

La interpretación del enunciado utilizando el registro *gráfico* supone en principio una *conversión* de una parte del mismo[48]:

> Sean dos funciones reales f y g, tales que $f(x) = x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, ¿Cuál es la región del plano definida por el conjunto de pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$?

que consiste en graficar ambas curvas en el mismo sistema cartesiano. La dificultad que acarrea este tipo de tareas es bien conocida (y depende de la complejidad de las funciones particulares elegidas)[49].

Ahora bien, la *conversión* al registro *gráfico* de la expresión:

> Sean dos funciones reales f y g tales que $f(x) = x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, ¿Cuál es la región del plano definida por el conjunto de pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$?

pone en juego una característica ligada al *carácter genérico* de la variable x. En la medida en que el enunciado original está expresado en *lenguaje mixto* y el registro de llegada de la *conversión* es el *gráfico*, esta *conversión* supone una articulación de las

[48] A fin de facilitar la comprensión, utilizamos el negro y el gris para distinguir la parte del enunciado que es *convertida* de la que no lo es

[49] Más adelante (en 6.1.4) analizamos especialmente el problema semiótico/cognitivo de la representación de dos funciones genéricas

interpretaciones de lo genérico en los registros *gráfico y algebraico*. Según nuestro análisis, la manera diferente en que lo genérico se expresa en ambos registros –según hemos señalado en 5.5.1.1 y 5.6.1.1- es una fuente especial de complejidad de la *articulación* entre ambos registros.

Más precisamente, en el enunciado original de este problema:

- x es una variable y tiene entonces un *carácter genérico*: decimos gracias a Frege que x representa un número de manera indeterminada;
- $f(x)$ y $g(x)$ heredan este carácter de *genericidad*.

Las *unidades significantes* « $f(x)$ » y « $g(x)$ » del enunciado original tienen asociadas respectivamente *unidades significantes elementales* en el registro *gráfico* ("marcas" con etiquetas « $f(x)$ » y « $g(x)$ » respectivamente sobre el eje de las ordenadas). Sin embargo, en la medida en que aquellas *unidades* tienen carácter de genericidad, también las *unidades* asociadas –puntos del eje de ordenadas con etiquetas « $f(x)$ » y « $g(x)$ »- deben tener carácter de genericidad. Para ello, éstas -las *marcas* con « etiquetas » « $f(x)$ » y « $g(x)$ »- no deben tener ningún rasgo de singularidad; el único rasgo que pueden y deben tener (en este caso) es el de estar situadas en la zona correspondiente a las imágenes de las funciones f y g.

La solución que se adopta es la de dibujar un punto (que no podrá ser otro que un punto particular) al que se le da un carácter de genericidad, junto con la convención de ponerle una « etiqueta». Por ejemplo: « $(x, f(x))$ » y « $(x, g(x))$ ».

La semiosis funciona dentro de una configuración que en este caso se completa con el "puntillado" (que permite graficar –también genéricamente- las abscisas y ordenadas de los puntos « $(x, f(x))$ » y « $(x, g(x))$ »).

Ahora bien, la manera de representar un punto genérico de la función agrega complejidad no sólo a esta etapa de *conversión* del enunciado original al registro *gráfico* sino también a la etapa de *tratamientos* dentro del mismo (ver 5.5.2), y al momento de expresar el resultado obtenido gráficamente en términos del enunciado original (etapas segunda y tercera respectivamente).

6.1.1.2 Problemas ligados a la no *congruencia* de representaciones

El análisis en términos de *congruencia* de representaciones nos conduce a notar que la misma parte del enunciado original, es decir:

> Sean dos funciones reales f y g tales que $f(x) = x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, ¿Cuál es la región del plano definida por el conjunto de pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$?

no produce una representación *congruente* por *conversión* al registro *gráfico*, porque dos *unidades significantes* no tienen asociadas *unidades significantes elementales* en la representación del registro *gráfico*:

- la unidad significante « y » de los pares « (x, y) » del enunciado original
- el signo « > » en la escritura «$f(x) > g(x)$»

entonces no se cumple el *primer criterio* de *congruencia* de representaciones (5.2.7.1).

Habrá de notarse además que el hecho de que el signo « > » no tenga asociada una unidad en la representación del registro *gráfico* obtenida por *conversión*, es independiente de la expresión original a convertir: a diferencia de la unidad significante « y » del par (x, y) que en este caso no aparece en la representación por *conversión* pero podría aparecer en otro caso, el signo « > » no tiene *-en ningún caso-* una *unidad semiótica* que pueda corresponderle en el registro *gráfico*, por no pertenecer al *léxico* del registro *gráfico*. Esto tiene consecuencias directas en las posibilidades de resolución dentro del registro, como mostramos a continuación.

6.1.2 Etapa de la resolución propiamente dicha

6.1.2.1 Necesidad de recurrir a un operador visual

Por las razones expuestas, la *resolución gráfica* necesita recurrir a un *operador visual* vertical (definido en 5.5.2.1), que en este caso:

- recorre vertical y genéricamente el espacio entre las curvas que representan a f y g,

- usa características espaciales (arriba, abajo, etc.) -que *no son signos* del sistema semiótico-.

Este operador es utilizado con facilidad por los estudiantes, y de manera eficaz en un conjunto de situaciones particulares, lo que les hace suponer que es universalmente válido.

Sin embargo, la eficacia del mismo está limitada por las particularidades del registro *gráfico* (en particular por los problemas de representación gráfica de los objetos no-acotados expuestos en 5.5.1.3) y la dificultad cognoscitiva de visualización de estos objetos[50]. De hecho, si las representaciones gráficas de las funciones f y g son muy complicadas, este operador puede fácilmente conducir a error a un principiante. En esos casos, es necesario recurrir a una *conversión* al registro algebraico.

6.1.2.2 Necesidad de recurrir al registro de las *escrituras algebraicas*

El análisis que realizamos aquí parte del supuesto de que se trata de una familia de problemas semióticamente equivalentes. El análisis anterior muestra los límites de los operadores visuales para una *resolución interna* dentro del registro para ciertas funciones de esta familia de problemas. En estos casos, en consecuencia, el pasaje a una formulación algebraica no se restringe a la necesidad de *demostrar* los resultados obtenidos por un método gráfico o a la necesidad de hallar valores numéricos particulares del gráfico, sino que puede ser requerido en diversas circunstancias en virtud de las limitaciones del registro *gráfico* para los tratamientos internos dentro del mismo.

6.1.3 Etapa de obtención de la respuesta del problema original

Los procedimientos de tipo gráfico no tienen valor de prueba. Si se encuentra una solución al problema a través de un procedimiento gráfico, las « reglas del juego »

---

[50] Hemos visto dificultades análogas del mismo origen en relación con el operador horizontal, en la investigación presentada en 5.5.1.3.1

matemático exigen que se pueda demostrar el resultado, y esto se hace en el registro algebraico. Sin embargo, siempre dentro de las limitaciones del sistema que acabamos de analizar, y dependiendo del tipo de curvas y de la relación entre las mismas, es posible en muchos casos obtener una « solución » gráfica. En esos casos, la interpretación en términos del problema original requiere recuperar la variable « *y* » del par (*x*, *y*) que quedó implícita en la etapa de *conversión*, y luego hacer una interpretación en términos de pares ordenados y finalmente en términos de puntos del plano. Como veremos más adelante, esta etapa es más compleja con las resoluciones de tipo algebraico (ver 6.2).

6.1.4 Un nuevo problema: diferencia entre dos funciones genéricas y dos funciones particulares

Una mención especial requiere el enunciado del problema original presentado con dos funciones *f* y *g genéricas* (utilizado por ejemplo cuando se intenta explicar el método para el cálculo de área entre dos curvas):

> Sean dos funciones reales *f* y *g* ¿Cuál es la región del plano definida por el conjunto de pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$?

En estos casos, a los problemas señalados anteriormente para el caso de dos funciones *f* y *g particulares*, se debe agregar el siguiente problema de naturaleza semiótica: cuando las funciones *f* y *g* son dos *funciones genéricas*, la representación de las mismas presenta también características ligadas a la *genericidad*.

Esto significa que al momento de representarlas se buscará que las curvas sean lo más representativas de *dos curvas cualesquiera*, cuando obviamente no podrán ser dibujadas sino *dos curvas particulares*.

No hay lugar en esta tesis para desarrollar este problema. Sin embargo, habrá de notarse que el problema de representación de una *función* genérica es semióticamente más complejo que el de la representación de un *punto* genérico que hemos analizado. Esto hace que la familia de problemas con funciones genéricas sea cognitivamente más difícil de abordar que el problema con dos funciones particulares. Esto debe ser tenido en cuenta a la hora de identificar las variables didácticas.

6.2 Los procedimientos de tipo algebraico

Retomamos ahora el problema inicial con dos funciones particulares, para analizar los procedimientos de tipo algebraico.

Los procedimientos algebraicos tienen valor de prueba y se puede o no hacer conversiones al registro *gráfico* como *ilustración* o bien como *elemento de control.* Estas conversiones no son ni *explícita* ni *implícitamente* demandadas por la tarea pero de gran utilidad. En nuestra opinión la enseñanza realiza a menudo estas conversiones a manera de *ilustración* pero no toma en cuenta la importancia de desarrollar la capacidad de *conversión* como *elemento de control.*

Recordemos que, según lo establecido en general para todos los registros involucrados en la resolución del problema, cabe aquí tener en cuenta:

- el conjunto de operaciones a realizar a partir del enunciado hasta llegar a una representación en el registro (de *escrituras algebraicas* en este caso) que permita su resolución en el mismo.
- los procedimientos posibles para obtener la solución algebraica
- la necesidad o no de acudir a otro registro en el marco de la tarea (para tratamientos o controles intermedios)
- el conjunto de operaciones a realizar a partir del resultado obtenido para reinsertarlo en términos del problema original

Nos interesa especialmente mostrar cómo juegan los **mecanismos de implicitación** y de **resolución modular** característico de la resolución algebraica, de recuperación de los módulos y de los diversos elementos implícitos para esta familia de problemas con dos funciones *particulares* (ver 5.6).

Formulamos la siguiente hipótesis:

Estos mecanismos de implicitación y de resolución modular pueden ser explicados en términos de sucesivas *transformaciones semióticas* que o bien mantienen el *objeto* cambiando el *sentido* de la expresión que lo designa (*contenido* de la representación según Duval) o bien modifican el *objeto denotado* (o *representado* según Duval) obtenido por *conversiones* no congruentes

La importancia de sostener esta hipótesis es que la dificultad cognoscitiva de la resolución de esta familia de problemas puede ser explicada por la Teoría de los Registros de Duval, -especialmente la etapa de recuperación de los módulos y de los diversos elementos implícitos-.

6.2.1 Análisis semiótico de la resolución del problema. Fundamentos de la hipótesis

De la misma manera que hicimos con el registro *gráfico*, y a fin de fundamentar nuestra hipótesis, el análisis se dirige ahora a establecer las particularidades de:

1. la *conversión* del enunciado del problema al registro *algebraico n*ecesaria para su resolución en el registro; y
2. las relacionadas con la *resolución propiamente dicha*.

Esquemáticamente:

Etapa de *conversión* del enunciado del problema al *registro algebraico*	Mecanismos de implicitación que producen representaciones no congruentes Mecanismos de sustitución provisoria de variables que cambian el objeto denotado
Etapa de tratamiento dentro del registro de las escrituras algebraicas	Mecanismos de omisión provisoria de expresiones
Etapa de reinserción de la solución algebraica en el problema inicial	Recuperación de elementos implícitos y reinterpretación de elementos explícitos

6.2.2 La *conversión* del enunciado al registro de las *escrituras algebraicas*

En primer lugar, analicemos las diferentes *transformaciones semióticas* del enunciado original necesarias para llegar a una representación en el *registro* de las *escrituras algebraicas* que permita su resolución mediante un *tratamiento* dentro del mismo:

Dado el enunciado original:

Sean dos funciones reales f y g tales que $f(x) = x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. ¿Cuál es la región del plano definida por el conjunto de pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$?

En primer lugar, notemos que se necesita transformar la segunda parte del enunciado:

Sean dos funciones reales f y g tales que $f(x) = x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ ¿Cuál es la región del plano definida por el conjunto de pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$?

quedando el enunciado:

Sean dos funciones reales f y g tales $f(x) = x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$¿Cuáles son los valores de x para los cuales se verifica $f(x) > g(x)$?

A continuación, es necesario convertir el enunciado anterior al registro de las *escrituras funcionales,* el que se transforma en la siguiente *escritura*:

$f(x) > g(x)$

y **quedando el resto de los elementos implícitos**.

Finalmente, a fin de obtener una representación que permita un *tratamiento* dentro del registro de las *escrituras algebraicas* la escritura anterior se *convierte* en la inecuación:

$$x^3 + 3x^2 > x^3 + 2x^2 + 1$$

Este conjunto de operaciones que constituyen la *conversión* del enunciado original al registro algebraico son realizadas casi automáticamente en el aula, sin tenerse en cuenta la dificultad cognoscitiva de recuperación de los elementos implícitos y de *reinserción* de las escrituras en enunciados una vez obtenida la resolución algebraica.

El análisis semiótico de esta primera etapa -de *conversión*- sugiere tener en cuenta los siguientes aspectos, especialmente porque permiten explicar la dificultad cognoscitiva de inserción del resultado algebraico para dar la respuesta al problema original –tercera etapa-, y también muchos de los errores de los alumnos:

- al realizar la *conversión* de « ¿Cuál es la región del plano definida por el conjunto de pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$? » al sistema de las *escrituras algebraicas,* no es posible asociar *unidades elementales* para expresar la pregunta, ni para la descripción del *conjunto* (de pares ordenados).

- la unidad significante « y » del par « (x, y) » del enunciado no se transforma en ninguna *unidad significante elemental* de la representación alebraica « $f(x) > g(x)$ ». Se trata de una omisión provisoria de la variable « y » debida a requerimientos del *tratamiento* algebraico (que consiste en resolver una inecuación en x). La variable « y » queda implícita y deberá ser recuperada después de la resolución algebraica (de la inecuación en x)

- la escritura « $f(x) > g(x)$ » deja en la sombra el hecho de que la *relación entre las ordenadas* $f(x)$ y $g(x)$ aparece como una *relación entre las abscisas* una vez escrita la inecuación para las dos funciones particulares*:*
  $x^3 + 3x^2 > x^3 + 2x^2 + 1$

  En este caso, no se trata de la *omisión* de una variable como en el caso de la variable « y », sino de una *sustitución provisoria* que transforma la escritura « $f(x) > g(x)$ » en una inecuación en x. Es decir:

La escritura « $f(x) > g(x)$ » es sustituida por la escritura «$x^3 + 3x^2 > x^3 + 2x^2 + 1$»

Esta sustitución provisoria *funciona* como un cambio de variables, con toda la complejidad que esto supone, a pesar de tratarse de un problema elemental. Como se analizó en 5.6, muchos problemas de matemática elemental poseen esta complejidad, aunque el cambio de variables sea -recién- considerado como un recurso necesario en matemática superior. En relación con este punto, nos interesa destacar lo siguiente:

- esta sustitución no cambia el objeto denotado, pero sí el *sentido* de la escritura que lo designa;
- los *sentidos* de *ambas escrituras* son necesarios para dar la respuesta al problema original (tercera etapa);
- el segundo de los *sentidos* es evidente, en tanto el primero requiere poder interpretar la escritura «$x^3 + 3x^2 > x^3 + 2x^2 + 1$» recuperando el significado de la escritura original (des-sustituir la expresión). Más precisamente, para "insertar" la respuesta algebraica en el enunciado original una vez obtenida la solución de la inecuación, se requiere la capacidad de *ver* (*interpretar*) la escritura «$x^3 + 3x^2 > x^3 + 2x^2 + 1$» de dos maneras diferentes:
    - como una relación entre las ordenadas de las dos funciones (« $f(x) > g(x)$ »);
    - como el conjunto de valores de x que verifican la inecuación (relación entre abscisas)

En síntesis, la *conversión* del enunciado al registro de las *escrituras algebraicas* está pautado por los mecanismos de *implicitación* y *modularidad* propios de la resolución algebraica que establecimos en 5.6. El proceso de *conversión* produce representaciones *no congruentes* en el sentido de Duval que cambian el objeto denotado por el *enunciado original*, manteniendo la *denotación* de *una parte* del mismo: la escritura « $f(x) > g(x)$ » (ver hipótesis formulada en 6.2).

En virtud de la importancia de diferenciar los *dos objetos*, vamos a llamar:

- ***Og*** al objeto denotado por el enunciado original es decir, « las regiones del plano definidas por su abscisa x tales que $f(x) > g(x)$ »; y

- ***O***$\boldsymbol{O_x}$ al objeto denotado por el enunciado una vez convertido al registro algebraico para su resolución; es decir « el conjunto de los valores de x, que verifica $f(x) > g(x)$ »

Desde el punto de vista cognitivo, la complejidad generada por las particularidades semióticas destacadas aquí no se evidencian en el *proceso mismo* de resolución sino cuando el objeto *denotado* por el enunciado original debe ser obtenido a partir del resultado algebraico, es decir a partir del objeto *denotado* por la escritura « $f(x) > g(x)$ ». En particular, se deben recuperar las unidades significantes « y », « $f(x)$ » y « $g(x)$ » y recuperar la *interpretación* de la escritura « $x^3+ 3x^2 > x^3+ 2x^2+1$» (y todas las que siguen por *tratamiento*, incluida la “solución” « $x < -1 \vee x > 1$») como una relación entre ordenadas (« $f(x) > g(x)$ »).

Desde nuestra perspectiva, la dificultad en recuperar esta « mirada funcional » de la escritura explica por qué a menudo los alumnos responden incorrectamente un problema de este tipo sólo en términos de x, es decir, describiendo el objeto ***Ox*** denotado por la escritura final:

El conjunto de números reales x tales que $x < -1 \vee x > 1$

en vez de responder en términos del objeto ***Og*** denotado por el enunciado original:

El conjunto de pares (x, y) del plano que cumplen la relación $f(x) > g(x)$ son aquellos que verifican $x < -1 \vee x > 1$

El problema cognitivo a comprender es que una vez obtenido el “resultado” (*denotación*) de la *escritura particular* tratada en el registro algebraico, la obtención del objeto *denotado* por el enunciado original requiere de un mecanismo de *recuperación progresiva de* los elementos implícitos y de *reinserción* de las escrituras en enunciados.

Presentamos ahora los posibles problemas de *tratamiento* dentro del registro de las *escrituras algebraicas*.

6.2.3 Los *tratamientos* dentro del registro de las *escrituras algebraicas*

A fin de continuar con los fundamentos ´-iniciados en el apartado anterior- de la hipótesis formulada más arriba (en 6.2), destacamos dos aspectos a analizar en las distintas etapas de *tratamiento* dentro del registro de las *escrituras algebraicas*:

- Los enunciados $f(x) > g(x)$, $f(x) - g(x) > 0$ y todos aquellos obtenidos por reescritura de $f(x) - g(x)$ (incluido el que expresa el resultado) mantienen el objeto denotado –$\boldsymbol{O_x}$– pero lo expresan con *sentidos* diferentes.

- Las distintas etapas de *tratamiento* requieren la capacidad de *interpretación* de *una misma escritura* de diferentes maneras[51], y de guardarlas in mente para:

    - realizar controles parciales por *conversión* al registro *gráfico* durante la resolución; o bien

    - insertar la respuesta algebraica en el enunciado original (por razones similares a la necesidad de *interpretación* de la escritura obtenida por sustitución («$x^3 + 3x^2 > x^3 + 2x^2 + 1$») en la etapa de *conversión* del enunciado -según analizamos en el párrafo anterior-).

Analizamos a continuación estos dos aspectos:

- cambio de *sentido* e invariancia *referencial* de dos expresiones*; y*
- distintas *interpretaciones* de una misma escritura

en cada una de las etapas de *tratamiento*.

6.2.3.1 Primer tratamiento dentro del registro de escrituras algebraicas:

Transformar $f(x) > g(x)$ en $f(x) - g(x) > 0$

[51] Problema análogo al analizado ya en relación con la escritura « $f(x) - g(x) > 0$», producto de la *conversión* del enunciado original al registro algebraico

Una vez planteado el problema en términos de la inecuación $f(x) > g(x)$, el primer *tratamiento* (“T_1”) en este registro produce (generalmente) la inecuación $f(x) - g(x) > 0$

6.2.3.1.1 Aspecto sentido/denotación.

Las dos escrituras tienen evidentemente *sentidos* diferentes. Según sean los tipos de funciones f y g y sus relaciones, este cambio de *sentido* se evidencia de manera diferente. Por ejemplo, si las funciones particulares elegidas son $f(x) = x^2 + 5$ *y* $g(x) = x^2 + 1$ entonces se pasa de $x^2 + 5 > x^2 + 1$… a ¡$4 > 0$!

Es particularmente difícil para los alumnos « guardar in mente » que la última desigualdad es una relación entre funciones.[52]

Una posibilidad desde el punto de vista didáctico es la de realizar un control por *conversión* al registro *gráfico,* haciendo observar que la variación concomitante (ver 5.2.3) de este tratamiento algebraico consiste en pasar de la comparación de dos parábolas a la comparación de dos rectas horizontales de ecuaciones respectivas $y = 4$ e $y = 0$.

6.2.3.1.2 Aspecto *interpretación*: “dos miradas de una misma escritura”

Una vez planteado el problema en términos de la inecuación $f(x) > g(x)$, el primer tratamiento en este registro produce (generalmente) la inecuación $f(x) - g(x) > 0$. Es necesario ver la escritura «$f(x) - g(x) > 0$» como:

- una relación entre las *ordenadas* de las funciones «$f(x) - g(x)$ » y «0» (siendo **0** la **función nula** ($0(x)$))

- una relación entre las abscisas -los *valores de x* que verifican la inecuación $f(x) - g(x) > 0$ (siendo « 0» un **número**)

Habrá de notarse que en relación a la capacidad de ver la escritura « $f(x) > g(x)$ » de dos maneras diferentes analizada anteriormente en comparación con la etapa de *conversión*

---

[52] Este caso particular muestra que dentro de esta familia de problemas semióticamente equivalentes el tipo de funciones *f* y *g* es una variable didáctica.

del enunciado original al *registro* de las *escrituras algebraicas*, la mirada funcional es más compleja en esta etapa del primer *tratamiento*, a causa del « 0 » a la derecha (función 0(x)). Esto agregará complejidad al momento de (re) interpretar las soluciones algebraicas en términos del enunciado original.

6.2.3.2 Tratamientos ulteriores

Los *tratamientos* ulteriores para resolver la inecuación $f(x) - g(x) > 0$ se obtienen mediante reescrituras de « $f(x) - g(x)$».

Por ejemplo, si $f(x) = x^3 + 3\,x^2$ y $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$, la inecuación

$(x^3 + 3x^2) - (x^3 + 2x^2 + 1) > 0$

se puede resolver mediante reescrituras de $(x^3 + 3x^2) - (x^3 + 2x^2 + 1)$, mediante dos *tratamientos* sucesivos "T_2" y "T_3":

$$(x^3 + 3x^2) - (x^3 + 2x^2 + 1) \xrightarrow{T_2} x^2 - 1 > 0 \xrightarrow{T_3} (x - 1)(x + 1)$$

y luego resolver la inecuación $(x - 1)(x + 1) > 0$.

Mediante estos sucesivos *tratamientos*, el cambio de *sentido* de la expresión que designa al objeto $\boldsymbol{O_x}$ se da mediante cambios de *sentido* de las expresiones que designan a la función *f-g*. Dicho vulgarmente, en tanto estos tratamientos afectan *solamente* al primer miembro de la inecuación, no modifican su *denotación* (la función *f-g*), sino la manera de designarla.

Las mismas consideraciones y observaciones que en el caso precedente son válidas aquí para la interpretación "dos miradas de una misma escritura". Se deben guardar in mente la mirada funcional y la mirada sobre las abscisas en cada paso.

6.2.4 Solución del problema inicial (Tercera etapa)

En la última etapa, una vez obtenida la solución algebraica, para dar la solución del problema a partir del resultado algebraico se debe:

- (re) interpretar la solución en términos de ordenadas;
- (re) interpretarla en términos de las pares (x, y) tales que $f(x) > g(x)$; y finalmente

- (re) interpretar los pares ordenados (x, y) como puntos del plano

En otras palabras, estas distintas interpretaciones son necesarias para obtener el objeto ***Og*** -denotado por el enunciado original (« la región del plano para la cual la abscisa x de sus puntos cumple $f(x) > g(x)$ »)-, una vez obtenido el objeto $\boldsymbol{O_x}$ (« el conjunto de los valores de x, que verifica $f(x) > g(x)$ »).

Analizamos a continuación cómo juegan los aspectos *sentido*/*denotación* e *interpretación* en esta última etapa, una vez obtenida la solución algebraica. En términos de *sentido*/*denotación,* la mayor parte de los problemas de álgebra elemental poseen la característica del ejemplo analizado aquí:

La "solución" algebraica no es otra cosa que el objeto $\boldsymbol{O_x}$ expresado (designado) mediante una expresión más *« condensada»* del tipo: « $x < -1 \vee x > 1$»[53]

Como hemos analizado anteriormente, el objeto $\boldsymbol{O_x}$ es la solución de la escritura pero no del enunciado original. En relación con la reinserción de la solución algebraica para obtener la solución del problema original **la no conservación del objeto** es fundamental. Se deberán recuperar todos los elementos implícitos a fin de obtener el objeto objeto $\boldsymbol{O_g}$ denotado por el enunciado original.

Todas las consideraciones realizadas sobre la necesidad de mantener la mirada funcional y la mirada sobre las abscisas se ponen en juego para poder reinterpretar la solución algebraica en términos del objeto $\boldsymbol{O_g}$, lo que consituye la interpretación "dos miradas de una misma escritura".

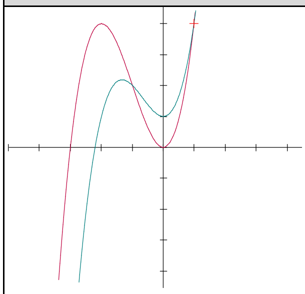
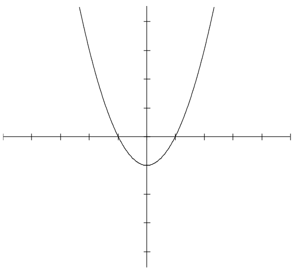
---

[53] se destaca que no todos los tratamientos semióticos en el dominio del álgebra tienen esta propiedad de dar la solución de manera más condensada. Piénsese por ejemplo en las n soluciones de la ecuación $z^n = 1$.

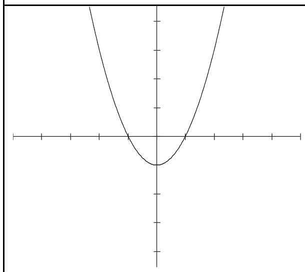
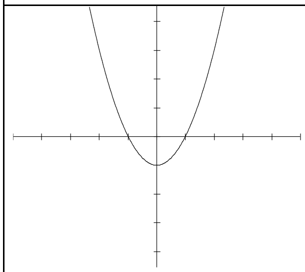
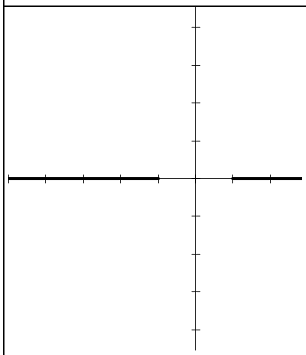
6.2.4.1 Esquema ilustrativo del análisis anterior

A continuación analizamos todos los pasos descriptos anteriormente, desde la formulación del problema en términos algebraicos hasta la inserción del resultado algebraico para dar la solución del problema inicial, para el caso particular de las funciones f y g definidas por $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

Por razones expositivas utilizamos una *representación gráfica* del conjunto ***Og,*** y mostramos en paralelo los efectos de los *tratamientos algebraicos* sobre las representaciones gráficas obtenidas por *conversión*, utilizando los criterios establecidos en el capítulo 5 -observar lo que se conserva y lo que *no* se conserva durante los *tratamientos* y las *conversiones*- (ver 5.2.3).

Registro *gráfico*			**Registro de las *escrituras algebraicas***
	El objeto ***Og***[54] puede ser obtenido por tratamiento gráfico a través de un operador visual vertical a partir de las curvas f y g (ver 5.5.2)	$\leftarrow C_1$	$f(x) > g(x)$ $x^3 + 3x^2 > x^3 + 2x^2 + 1$
			$\downarrow T_1$
	El objeto ***Og*** puede ser obtenido por tratamiento a través de un operador visual vertical a partir de las curvas $f - g$ e $y=0$	$\leftarrow C_2$	$f(x) - g(x) > 0$ $(x^3+3x^2)- (x^3+2x^2+1) > 0$ $=$ *denotación* ($\boldsymbol{O_x}$) $\neq$ *sentido*

54 En todo este cuadro, por abuso de notación escribimos "el objeto ***Og***" para expresar "la *representación gráfica* del objeto ***Og"***

	↓ T_2
 El objeto ***Og*** puede ser obtenido por tratamiento a través de un operador visual vertical a partir de las curvas *f* - *g* e *y*=0 (la reescritura de *f* - *g* no cambia el gráfico) ← C_3	$f(x) - g(x) > 0$ $x^2 - 1 > 0$ = *denotación* ($\boldsymbol{O_x}$) ≠ *sentido* por reescritura de $(x^3 + 3x^2) - (x^3 + 2x^2 + 1)$
	↓ T_3
 idem cuadro anterior ← C_4	$f(x) - g(x) > 0$ $(x - 1)(x + 1) > 0$ = *denotación* ($\boldsymbol{O_x}$) ≠ *sentido* por reescritura de x^2 1
	↓ T_4
 El objeto ***Og*** puede ser obtenido si estos intervalos son interpretados en términos de ordenadas (donde $f(x) > g(x)$) y luego en términos de pares (x, y) (tales que $f(x) > g(x)$) ← C_5	$x < -1 \vee x > 1$ = *denotación* ($\boldsymbol{O_x}$) ≠ *sentido* (más directo)

6.2.4.2 Respuesta:

A partir de $\boldsymbol{O_x} = \{x \,/\, x < -1 \vee x > 1\}$

1) La "mirada funcional" de la escritura "$x < -1 \vee x > 1$" es la que permite interpretarla en términos de ordenadas, y afirmar que:

$f(x) > g(x)$ si y sólo si $x < -1 \vee x > 1$

2) La ordenada « y » del par (x, y) (desaparecida en la *conversión* del enunciado original -*lengua escrita* $\Rightarrow$ *escrituras algebraicas*-) debe ser recuperada a fin de interpretar la escritura anterior

"$f(x) > g(x)$ sii $x < -1 \vee x > 1$"

en términos de pares ordenados y sustituirla por

"(x,y) tales que $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$"

esto da la respuesta al problema inicial:

Og : la región del plano en la que la abscisa x cumple $x < -1 \vee x > 1$

6.2.4.3 Análisis de las *conversiones* posibles al registro gráfico durante la resolución algebraica, y de las capacidades requeridas por cada etapa.

Comentamos a continuación las *conversiones* posibles al registro *gráfico*, su naturaleza y características como elementos para la resolución y el control (ver esquema ilustrativo en 6.2.4.1).

C_1 es una *conversión* no demandada por la tarea, los alumnos pueden hacerla para visualizar la situación o para tener una idea de la solución por *tratamiento gráfico* a través de un operador visual vertical a partir de las curvas f y g. La resolución gráfica en este caso es más orientadora que en los siguientes C_2, C_3, C_4 o C_5.

C_2, C_3 y C_4 tampoco son demandadas por la tarea. Los alumnos pueden hacer estas *conversiones* como medio de control del proceso, o bien cuando no logran interpretar el resultado de una etapa de *tratamiento* algebraico (como cuando encuentran « $4 > 0$»). En ese caso es necesario que puedan volver al sentido del enunciado que corresponde a la *conversión* (C_2, C_3 o C_4) en términos de imágenes de funciones; luego hacer un *tratamiento gráfico* a través de un operador visual vertical a partir de las curvas correspondientes.

C_5 no es tampoco solicitada por la resolución algebraica. Si el alumno pudiera volver al sentido del enunciado (algebraico) en términos de imágenes de funciones, no tendría necesidad de volver al registro *gráfico* porque en ese caso, la vuelta al nombre de las ordenadas estaría disponible**.**

En general, los alumnos tienen que volver al registro *gráfico* para resolver el problema; pero allí encuentran el mismo problema: la solución algebraica estando planteada en términos de *x* (y ocultando la relación entre ordenadas), la vuelta no se hace sobre el plano sino solamente sobre el eje de las *x*. Dicho de otra manera: una vez resuelta la inecuación, hay dos problemas de interpretación que están bloqueados por la mirada (parcial) sobre las abscisas: uno en el registro de las *escrituras algebraicas* y otro al volver al registro *gráfico*.

La resolución algebraica demanda por una parte mantener la *interpretación funcional* (lo que es difícil porque las diferentes formulaciones del enunciado son planteadas en términos de abscisas, y « olvidando » la relación entre las ordenadas); y por otra parte, demanda recuperar las *y* desaparecidas en la *conversión lengua escrita* → *escrituras algebraicas*.

Cada *conversión* al registro *gráfico* demanda también mantener la *interpretación funcional***,** lo que, generalmente, es bastante complicado, dado que la *conversión* se realiza sobre el eje de las *x* y no sobre el plano. Entonces se hace intervenir un cambio de dimensión.

Las relaciones entre los diferentes gráficos (que se corresponden por *conversión* con las escrituras resultantes de los *tratamientos algebraicos* $T_1 \ldots T_4$) plantean problemas mayores: como hemos discutido ya, la experiencia indica que la expectativa de los alumnos es la de conservación no sólo del *objeto denotado* ***Og*** del plano sino también de la *manera* de remitir a este objeto (ver 5.2.3.1.2). Esto plantea problemas importantes en lo que se refiere a la interpretación y la visualización (por medio del operador visual vertical).

6.2.4.4 Conclusiones

Hemos encontrado aquí una dificultad particular de « pérdida de sentido»[55], evocada habitualmente en relación con la **modelización algebraica**. En comparación con un problema verbal a dos variables cuya escritura de las relaciones obliga a un **esfuerzo consciente** de redesignación de objetos, en el caso analizado aquí la escritura de relaciones entre ordenadas en términos algebraicos no obliga a ningún esfuerzo para explicitar las relaciones en términos de abscisas. Dicho de otra manera, el esfuerzo sería **darse cuenta** de este pasaje de las ordenadas a las abscisas.

Es este carácter automático de la modelización lo que plantea en este caso problemas específicos de « pérdida de sentido » del problema original. La posibilidad de recuperar el sentido al final del trabajo (o durante la resolución, si se hacen conversiones por control) supone la disponibilidad de las dos miradas -funcional y sobre las abscisas- y de poder hacer remontar al primer plano una u otra visión según las necesidades (análogo al balanceo figura-fondo de la Teoría Gestalt).

Todo esto muestra que el **tipo de registro** en el cual se plantea esta familia de problemas constituye una variable didáctica, lo que ya habíamos establecido en general en relación con los problemas de *descripción* de objetos (ver 5.2.7). Muy especialmente, las estrategias de resolución requieren discriminar qué es lo que se conserva o no por medio de una *transformación semiótica* (el *objeto* o la *manera* de remitir al objeto). Dado que según los **tipos de funciones** y **sus relaciones** esta manera de remitir cambia considerablemente, éstos también constituyen **variables didácticas**.

55 Recordamos aquí que escribimos « sentido » cuando utilizamos esta palabra con la significación tradicional en didáctica, y « *sentido* » cuando lo utilizamos con la significación dada por Frege

7 Conclusiones y Perspectivas

Nuestro interés en el problema de la definición se originó en trabajos anteriores sobre el razonamiento matemático, realizados en el dominio del álgebra. Como describimos en el Capítulo 1, encontramos un desfasaje entre ciertos procesos «espontáneos» de definición de los alumnos y las modalidades de definición pertinentes desde el punto de vista matemático. Más precisamente, encontramos que ciertos procesos de observación y descripción de los alumnos modulan sus definiciones espontáneas por *comprensión*, las que consisten en *agrupar* los objetos observados bajo una misma *denominación* y mediante *propiedades* que raramente *caracterizan* el objeto que se intenta definir, en tanto no capturan los rasgos *necesarios* y *suficientes*.

El análisis de la literatura científica mostró la complejidad de la definición desde el punto de vista de la enseñanza, y la diversidad de perspectivas desde las cuales este objeto complejo puede ser abordado. Vimos en particular características muy diferentes según el nivel educativo y el dominio de conocimiento en el que se trate este problema. A pesar de que diferentes autores trabajan sobre la definición, los trabajos difieren porque se refieren a objetos distintos, aunque los discursos porten sobre la enseñanza de *la* definición como si se tratara de un problema con un significado único y compartido. Desarrollamos algunas categorías de análisis que nos permitieron comparar los trabajos y ubicar el aporte de esta tesis. Nos interesa destacar aquí una de las ideas surgidas de este análisis –también presentado en el capítulo 1- y es el de la pertinencia de tratar diversos aspectos de la definición de manera *transversal* a los contenidos. Entendemos que esta perspectiva permite abordar problemas que no se identifican fácilmente al centrarse exclusivamente en la definición de un contenido particular. Otro aspecto que marca nuestro aporte en comparación con los trabajos de otros autores, es el hecho de que la mayoría de los trabajos se centra principalmente en la relación entre las definiciones matemáticas y los *conceptos* que ellas definen, y en menor medida en la relación con los *objetos* que la definición determina, aspecto que abordamos especialmente en esta tesis. Por otra parte, los diferentes autores otorgan un papel menor a las representaciones, en la medida en que el aspecto representacional de las tareas administradas a los alumnos para estudiar sus concepciones no es tomado en cuenta en el análisis de los resultados. Por último, no se registran estudios cognitivos que indaguen el rol de la tipicidad en los dominios numérico o algebraico, aspecto importante de nuestro trabajo; los trabajos se refieren a la tipicidad en el ámbito de la geometría y de las funciones matemáticas.

A continuación presentamos los principales resultados de los trabajos realizados: el Estudio Empírico (capítulo 4) y los Análisis Semióticos que componen el capítulo 5.

7.1 Estudio Empírico

Un primer trabajo realizado en el dominio del álgebra nos condujo a poner en evidencia algunos fenómenos de los razonamientos de los alumnos, razonamientos que distinguimos según si son ligados fundamentalmente a un lenguaje o son producidos sobre la base de los objetos de la experiencia (Duval, 1995). Encontramos que ciertas características de los **procesos descriptivos** de los alumnos y las limitaciones del **campo de los objetos familiares** para ellos, modulan gran parte de sus procesos «espontáneos» de categorización y denominación (definición) de los objetos matemáticos. Más precisamente, encontramos que sus operaciones discursivas de descripción a menudo son basadas en *asociaciones lingüísticas* de propiedades de pocos ejemplos representados en un solo registro, ejemplos concebidos espontáneamente dentro del campo restringido de los objetos que les son *familiares*, generalmente instancias típicas del objeto matemático o del enunciado de referencia. Como consecuencia, los procesos de categorización de los alumnos de la población estudiada responden en gran medida al modelo de *categorización por prototipos* **(**Kleiber, 1990; Rosch, 1976; Tversky & Kahneman, 1974) y las definiciones adoptan las características de las definiciones naturales, muy especialmente la *definición típica* (Duval, 1995). Encontramos también evidencias de dificultad para acceder a los distintos *niveles de articulación discursiva* requeridos por el razonamiento matemático, en virtud de una focalización de la atención en los objetos y sus descripciones (Duval, 1999); en base a esta interpretación explicamos diversos procedimientos ligados a la validación, en parte inexplicados en términos conceptuales o de nivel de racionalidad. Identificar estos aspectos del funcionamiento cognitivo de los procesos «espontáneos» de categorización y denominación mostró la necesidad de familiarizar a los alumnos con nuevos objetos y con diferentes maneras de observarlos y describirlos. Esto orientó los trabajos posteriores del Estudio Empírico, destinado a indagar cómo se manifiestan las *operaciones constitutivas* de los *procesos de definición* de objetos matemáticos -*reconocimiento, observación, descripción* y *denominación*-. Muy especialmente, buscamos identificar las características de los «mecanismos de sustitución» (de tipo instanciación, de tipo tratamiento y de tipo conversión) utilizados. Buscamos identificar fenómenos asociados a tales operaciones a través del análisis tanto de los procedimientos «espontáneos» como de aquellos solicitados explícita o implícitamente mediante tareas diseñadas.

Los trabajos realizados en el marco de este Estudio Empírico comprometen el uso de diferentes registros de representación ante tareas de muy diferente naturaleza y contextos matemáticos diversos. Los fenómenos identificados fueron presentados en el capítulo 4. A continuación presentamos una síntesis del Estudio, y describimos los fenómenos más importantes identificados.

7.1.1 Síntesis descriptiva del Estudio Empírico

El Estudio Empírico muestra la necesidad de **gestar una ruptura** con las definiciones naturales, en particular con la *definición típica,* a fin de que los procesos de definición se adecuen a los modos pertinentes de definición en matemática.

Muy especialmente, se desprende del Estudio la necesidad de hacer superar el estadio de las generalizaciones espontáneas que consiste en condensar los objetos individuales por medio de asociaciones locales y parciales basadas en observaciones de rasgos no representativos de las propiedades de un objeto. Desde nuestra perspectiva esto se produce y se perpetúa porque no hay un trabajo específico destinado a la *observación* y la *descripción* de objetos, hipótesis que sostenemos en esta tesis para todo lo que concierne a la definición de objetos. Si se producen estas categorizaciones y definiciones espontáneas sin control y se perpetúan, es porque no se ha dado lugar a una construcción y deconstrucción por observación de nuevos objetos, representativos de las instancias *posibles* de un objeto matemático.

Es por eso que en una segunda parte de la tesis, encaramos -entre otros análisis semióticos- un Análisis Semiótico de Tareas Matemáticas, destinado al desarrollo de las capacidades de *exploración, observación, reconocimiento* y *descripción* de objetos « individuales» en sus diferentes representaciones, y al tratamiento semiótico de enunciados mixtos (lenguaje natural y simbólico), en particular las definiciones. Por razones metodológicas, hemos buscado identificar características de las tareas que promuevan que un sujeto pueda por sí mismo observar variaciones de manera sistemática, ensayar estrategias de control y establecer conclusiones.

Por otra parte, se desprende del Estudio Empírico la necesidad de trabajar sobre la *adecuación* de las descripciones a conjuntos de objetos y la capacidad de control sobre las mismas. El fenómeno identificado en este Estudio sobre las *descripciones* –que las escrituras *denotan* conjuntos mayores que los que los alumnos intentan describir- motiva esa necesidad. La importancia didáctica de esto reside en que dicha capacidad de adecuación es constitutiva de los procesos de definición de objetos matemáticos, en la medida en que una definición matemática es un tipo particular de *descripción***.**

A continuación describimos sucintamente los **fenómenos encontrados**, especialmente aquellos comunes a los diferentes estudios, destacando que comprometen diferentes áreas de conocimiento (aritmética, álgebra y geometría).

7.1.1.1 Definición por tipicidad y sus efectos

De la misma manera que en el dominio del álgebra, encontramos en otros contextos *descripciones* que tienen para los alumnos el valor de *definiciones*, pero que a menudo quedan atrapadas en los rasgos de *representaciones particulares* del/os objeto/s individual/es analizado/s. Identificamos también manifestaciones de los *efectos* de estas «definiciones espontáneas», algunos de ellos característicos de las definiciones por tipicidad. Entre los más importantes:

•el fenómeno de apareamiento: reconocimiento de un objeto basado *estrictamente* en el rasgo identificado –aceptación si dispone del rasgo y rechazo en caso contrario-

•el fenómeno de «herencia», según el cual «lo que es válido para un individuo es válido para todos»" (por ejemplo, si algo es contraejemplo de una clase establecida mediante una «definición espontánea», entonces *toda* la clase es contraejemplo)

•falta de articulación entre las «definiciones espontáneas» producidas por los alumnos y otras definiciones del mismo objeto

•dificultad para reconocer el carácter hereditario de una propiedad universal.

7.1.1.2 Problemas debidos a la (falta de) disponibilidad de objetos matemáticos

En los diferentes estudios realizados, la falta de disponibilidad de objetos matemáticos es a menudo la fuente principal de imposibilidad de resolución satisfactoria de una tarea. Hemos encontrado dificultades para encontrar ejemplos y contraejemplos de enunciados algebraicos, para el reconocimiento de un objeto (individual) como perteneciente a una clase de objetos, y para la aceptación de un objeto (individual) como contraejemplo de un enunciado verbal.

7.1.1.3 Fenómenos ligados el alcance de las descripciones basadas en observaciones

Las descripciones de propiedades de objetos matemáticos en *escritura simbólica* y/o *lenguaje natural* han mostrado en este Estudio Empírico otro fenómeno ligado a la relación entre las operaciones de *observación* y *descripción*. A menudo, las descripciones realizadas –en *lenguaje natural* o *simbólico*- son adecuadas a los objetos observados, pero no los caracterizan, en el sentido de que otros objetos caen dentro del alcance de la descripción.

Este aspecto ligado al alcance (imprevisto) de ciertas descripciones verbales y simbólicas –en particular las definiciones- es uno de los fenómenos más importantes identificados en esta tesis a través del Estudio Empírico, y fundamental para interpretar los procesos semióticos constitutivos de los objetos matemáticos que construyen los alumnos. En general este fenómeno se inscribe dentro de los problemas de (falta de) articulación de diferentes registros semióticos, en tanto los alumnos tratan –

indebidamente- estas escrituras como si fueran *caracterizaciones* del conjunto de objetos observados, o como nuevas descripciones de un objeto obtenidas mediante *conversión* de registros. La mayoría de las veces se observa una falta de control por parte de los alumnos. En ese sentido, hemos encontrado que, a diferencia de los contextos en los que estas descripciones se realizan de manera espontánea, ciertos contextos *descriptivos* que requieren la *conversión* de registros de representación en contextos de *comunicación* (en el sentido de Brousseau) muestran su pertinencia didáctica.

A continuación presentamos los resultados más importantes de los Análisis Semióticos realizados y presentados en el capítulo 5 de la tesis.

7.2 Análisis semióticos

A través de los distintos análisis semióticos realizados en este capítulo, identificamos variables cognitivas y didácticas intrínsecamente ligadas a la semiosis que derivan de la hipótesis de que las *representaciones semióticas* y sus *transformaciones* tienen un rol fundamental en los *procesos de definición* de objetos matemáticos.

Hemos tenido en cuenta que la naturaleza de los *procesos de definición* de objetos matemáticos es diferente según las definiciones sean o no expresadas explícitamente. Es por eso que el trabajo fue realizado y organizado teniendo en cuenta la exigencia cognitiva que demanda:

a) la observación y el reconocimiento de objetos matemáticos individuales representados en registros semióticos particulares, y su descripción en términos de *conversiones* a otros registros; la importancia de esto reside en el hecho de que de un registro a otro los *contenidos* de las representaciones de un mismo objeto no son los mismos y no explicitan necesariamente las mismas propiedades del objeto representado.

b) la comprensión y operatividad de una definición enunciada explícitamente; y

c) la *articulación* de estas operaciones cuando los objetos son presentados a la vez mediante ejemplos y mediante definiciones formuladas explícitamente. Esta articulación se traduce por la autonomía de un alumno para comprender rápidamente, tomar iniciativas en la resolución de problemas y controlar él mismo sin necesidad de solicitar la ayuda de alguien (profesor u otro compañero)

Esto nos condujo a organizar el trabajo en base a:

- un análisis de las tareas matemáticas que favorecen la *exploración, observación y reconocimiento* de objetos individuales (ver 7.2.1);
- un análisis de las *transformaciones semióticas* que subyacen a la comprensión y utilización de una definición explícitamente formulada (ver 7.2.2);

lo que a su vez nos condujo a la necesidad de incorporar un tercer estudio:

- que consiste en un análisis semiótico de las particularidades de dos registros de representación especiales: el registro *gráfico* y el registro de las *escrituras algebraicas*, y en identificar aspectos de la complejidad de tareas matemáticas que involucran ambos registros, en particular su articulación (ver 7.2.3).

Los resultados de este análisis son presentados en el capítulo 5. A continuación los sintetizamos siguiendo la organización mencionada.

7.2.1 Análisis semiótico de tareas matemáticas

- La necesidad de ofrecer factores de variación relevantes para observar, explorar y describir un objeto « individual» en sus diferentes representaciones nos condujo en primer lugar a estudiar el reconocimiento de objetos « individuales» y de relaciones antes y después de una *transformación semiótica,* y a profundizar en las dos capacidades necesarias establecidas por Duval (2006 a) para el reconocimiento de objetos: el reconocimiento identificante y el discriminante. Estudiamos estas capacidades en el contexto de todas las *transformaciones semiótica*s que, conservando el objeto (*denotado*, o *representado*) cambian el *sentido* de la expresión que lo designa (*contenido* de la representación semiótica). De este análisis resultó como variable el **tipo de reconocimiento (identificante /discriminante)** de objetos y de relaciones antes y después de una *transformación semiótica*, y distinguimos especialmente las tareas que ponen en juego: a) el reconocimiento identificante de un mismo objeto representado de dos maneras diferentes en el mismo sistema (a través de un *tratamiento*); b) el reconocimiento identificante y el reconocimiento discriminante necesarios para la comprensión de lo que se conserva y de lo que no se conserva entre « las imágenes » de dos representaciones obtenidas mediante un *tratamiento* en un registro, por *conversión* a otro registro. Sugerimos que este criterio debe ser cruzado posteriormente con el de **tipo de registros** (*discursivos* y *no discursivos*) puestos en juego en una *conversión* (criterio expuesto más adelante), en la medida en que los registros *discursivos* y *no discursivos* requieren estrategias muy diferentes para las capacidades de reconocimiento mencionadas, como muestra toda la teoría de Duval.

- Como ya se ha discutido ampliamente en el capítulo 3, comprendimos con la tesis de Frege que es el mecanismo de *sustitución* el que va a explicar el razonamiento matemático y el cálculo, numérico o algebraico. Duval profundizó esta idea con su aporte sobre la potencia de los signos pertenecientes a un sistema semiótico en términos de la capacidad de sustitución de unos signos por otros y de las posibles operaciones de composición entre ellos, aporte que reconoce como posible gracias a desarrollos posteriores a Frege. Nuestra necesidad de identificar diferentes tipos de sustitución fue inspirada en todos estos aportes a la comprensión del progreso discursivo en matemática, en términos de la sustitución de unas expresiones por otras con diferente *sentido* e invariancia *referencial*.

  Fue así que, al considerar los razonamientos ligados fundamentalmente a la utilización de un lenguaje (Duval, 1995) nuestro análisis nos condujo a distinguir tres **tipos de sustitución** –entendida la sustitución como reemplazo de una expresión por otra-: las sustituciones de tipo *instanciación*, de tipo *tratamiento*, y de tipo *conversión*. Esta distinción permite explicar mecanismos totalmente diferentes del razonamiento matemático, y observar que según la tarea (de cálculo, de validación, de explicación, de descripción, etc.), el razonamiento ha de privilegiar uno u otro.

Destacamos la importancia para la didáctica de desarrollar la capacidad de identificar la **pertinencia de cada tipo de sustitución** en función de una tarea y de distinguir los conocimientos asociados a cada una de ellas (campo de instanciaciones posibles de un enunciado, reglas de tratamiento en cada registro e identificación de *unidades significantes* para las *conversiones*).

- Los **tipos de registros (discursivos y no discursivos)** puestos en juego en las *conversiones* constituyen variables cognitivas y didácticas; esto ha sido fundamentado por Duval, en particular en Duval (2007). Nuestro Análisis Semiótico de las tareas de *conversión* en términos del **tipo de *registros*** (**discursivos/no discursivos)** mostró la pertinencia de cruzar este criterio con las nociones de **congruencia de representaciones** y de **operatividad de una expresión**, especialmente para comprender aspectos de la complejidad cognoscitiva ligada al reconocimiento de objetos en dos registros diferentes. Concretamente, el análisis nos permitió explicar -en el caso particular de una *conversión* entre el registro de *escrituras algebraicas* y el registro de las *figuras*- y en términos de *no congruencia* de representaciones, que el reconocimiento identificante -lejos de ser una operación inmediata- supone una inferencia mediante un *tratamiento* de la figura. Mostramos también que puede perderse la *operatividad* de la expresión algebraica al pasar al registro de las figuras, de modo tal que la conversión no tendría valor explicativo del funcionamiento del sistema algebraico, aun cuando pudiera tener valor ilustrativo.

  Desde el punto de vista didáctico, esto muestra los límites de la estrategia de *conversión* como recurso de ilustración, estrategia utilizada en la enseñanza como si se tratara de un proceso transparente. Asimismo, muestra la pertinencia de cruzar el criterio de análisis de una tarea que solicita una *conversión* según los **tipos de registros** involucrados, con el de **complejidad de la *conversión*** (en términos de *congruencia* de representaciones), especialmente cuando se trata del reconocimiento de un objeto en dos registros diferentes.

Hemos encontrado otras variables relevantes, las que son discutidas en el capítulo 5. Entre ellas, el **modo (explícito, implícito, ni explícito ni implícito)** en el que una tarea matemática puede solicitar una *conversión*. Asimismo, hemos distinguido dos dimensiones de la significación de una expresión: a) el **contenido** (lo que la expresión explicita); y b) su **operatividad** (lo que la expresión permite hacer). La dimensión de *operatividad* nos ha resultado especialmente importante para explicar aspectos del progreso discursivo del razonamiento y el cálculo; muy especialmente, la complejidad semio/cognitiva de la utilización -en un proceso de pensamiento- de una definición formulada explícitamente, en tanto una tal formulación se realiza mediante una expresión (compuesta, en lenguaje mixto –natural y simbólico-).

7.2.2 La definición matemática

En esta segunda parte analizamos las definiciones dadas explícitamente mediante un enunciado, desde el punto de vista de las *transformaciones semióticas* que son *solicitadas implícita* o *explícitamente* por la comprensión y utilización de la propiedad característica. Incluimos el caso especial en el que la propiedad característica es formulada en base a una representación particular y el problema de la redefinición de objetos.

I. **La comprensión y utilización de una definición explícitamente formulada**

Esta primera parte del análisis estuvo basada en la aplicación de los criterios establecidos anteriormente para las *expresiones*, habida cuenta de que cuando la definición es explícitamente planteada, el *definiens* es una *expresión* « compuesta » (por escrituras simbólicas y lenguaje natural). Concretamente, el análisis portó sobre:

- los dos aspectos de la *significació*n de una expresión mencionados más arriba: el *contenido*, que remite a la identificación de los objetos y sus propiedades; y la *operatividad*, que remite a lo que la definición permite hacer;

- las *sustituciones* que demandan *explícita* o *implícitamente* la comprensión y utilización de la definición.

Mostramos que los distintos **tipos de sustitución** (***instanciación, tratamiento* y *conversión)*** de una expresión, juegan, esquemáticamente, de la siguiente manera en relación con las dimensiones de *contenido* y *operatividad* de una definición formulada explícitamente (ver 5.3.1.1)**:**

	De tipo *instanciación*	**De tipo *transformación semiótica***
Sustituciones ligadas al análisis del *contenido*	del *definiens*	del *definiens*
Sustituciones ligadas a la *operatividad*	del d*efiniens*	del *definiens*
		por sustitución del *definiendun* por el *definiens* y recíprocamente

El análisis nos condujo a mostrar los siguientes aspectos de interés:

- En relación con el análisis del *contenido* de una definición, las sustituciones de tipo *instanciación* del *definiens* sirven para comprender el significado de la propiedad característica, a la luz de observar si la misma se cumple o no en un objeto “individual”, cuando se busca determinar si éste es un ejemplo o un contraejemplo.

  Las sustituciones de tipo *transformación semiótica* sobre el *definiens* también juegan un papel importante en la comprensión de la propiedad característica:

  a) por un lado, en la medida en que las distintas representaciones permiten acceder a distintos significados; y por otro lado

  b) porque al explicitar aspectos implícitos en el *definiens*, sirven como elemento de control de los significados atribuidos.

- En relación con la *operatividad* de una definición:

  En primer lugar, las *sustituciones* de tipo *instanciación* sobre el *definiens* sirven para hacer avanzar un razonamiento basado en la definición, es decir para hacerla *operativa*, dado que un ejemplo de un enunciado existencial y un contraejemplo de un enunciado universal sirven para determinar el valor de verdad del enunciado.

En segundo lugar, las sustituciones de tipo *transformación semiótica* del *definiens* juegan también sobre la *operatividad***,** pero de manera diferente sobre:

a) las *transformaciones posibles* –es decir *válidas*, las que garantizan el avance del razonamiento mediante un *cambio de contenido* e *invariancia referencial*-, y

b) las *transformaciones pertinentes*- orientadas a una meta deseada.

La *operatividad* de una definición en el marco de una tarea requiere la conjugación de las dos capacidades –realizar *transformaciones válidas* y *pertinentes*-, lo que a su vez requiere la capacidad de elección de un registro adecuado para la *transformación semiótica* a realizar.

II. El *definiens* formulado en base a una representación particular

Otro punto de interés de nuestro análisis proviene de haber identificado que algunas definiciones consisten en descripciones de propiedades de un objeto *independientes* de sus representaciones, en tanto otras son basadas en una propiedad de las *representaciones* de los objetos (por ejemplo « un número es racional si su *escritura* decimal es finita o periódica»). En este segundo caso, si bien se aplica todo el análisis realizado para el caso general, destacamos que la *comprensión* y *utilización* de la propiedad característica se complejiza, en la medida en que se imponen restricciones sobre las sustituciones *posibles* del *definiens* (ver 5.3.2).

Esquemáticamente:

Sustituciones de tipo *instanciación*	Restricción del grado de libertad en el modo de acceso al objeto de *referencia*
Sustituciones de tipo *tratamiento*	Imposición del registro en el que se realiza el *tratamiento*
Sustituciones de tipo *conversión*	Imposición del registro de salida de la *conversión*

Estas restricciones juegan especialmente en la posibilidad de observación de ejemplos y contraejemplos –basadas en las sustituciones de tipo *instanciación*- y en las posibilidades de comprensión y utilización de una definición – basadas en sustituciones de tipo *tratamiento* **y** de tipo *conversión* del *definiens*- como hemos establecido y mencionado más arriba.

III. El problema de la redefinición de objetos

Analizamos finalmente el problema de la **redefinición de objetos**. Encontramos especialmente importante distinguir y mostrar la complejidad cognoscitiva ligada a los procesos de redefinición, lo que nos llevó a distinguir:

- la redefinición de un objeto matemático mediante un cambio del *definiens* (por proposiciones equivalentes)
- la redefinición de un objeto matemático mediante un cambio de nombre (*definiendum)*
- la utilización de una misma representación para dos objetos matemáticos diferentes, presentados en distintos marcos

Todas estas operaciones conllevan dificultades de naturaleza semiótica, generalmente estudiadas en la literatura científica en términos conceptuales o lógicos. Muy especialmente, la equivalencia de definiciones impone la necesidad de realizar sustituciones de tipo *transformación semiótica* del *definiens* de una o ambas definiciones. Por otra parte, el hecho de que una palabra (nombre de un objeto) adquiera distintos significados en contextos diferentes y el problema más general de que una **misma escritura** o **signo** represente dos objetos matemáticos diferentes suele ser fuente de dificultad semio/cognitiva importante.

7.2.3 Particularidades de dos registros de representación especiales: el registro *gráfico* y el registro de las *escrituras algebraicas*

Los fenómenos encontrados en el Estudio Empírico motivaron la necesidad de profundizar en el conocimiento de las características de los distintos registros utilizados en matemática, a fin de comprender mejor las producciones de los alumnos. El análisis

Semiótico de Tareas nos condujo al mismo punto, motivando la necesidad de identificar aspectos de la complejidad de las actividades de *observación* y *descripción* de objetos matemáticos. Hemos elegido realizar el análisis de los registros *gráfico* y de las *escrituras algebraicas* por su importancia en la actividad matemática del nivel educativo medio y superior. El estudio nos llevó a identificar diferentes tipos de problemas relacionados con las posibilidades de *representación y* de *tratamiento* dentro de cada registro.

En relación con las posibilidades de *representación*, analizamos comparativamente el funcionamiento de ambos sistemas según los siguientes aspectos:

- la *representación* (gráfica o algebraica) de valores que tienen un carácter de *genericidad*
- la ausencia de ciertas convenciones y signos que garanticen un funcionamiento *autónomo* del sistema

En relación con las posibilidades de *tratamiento* dentro de cada registro, encontramos especialmente de interés:

- la necesidad de recurrir a operadores visuales para un *tratamiento* dentro del registro *gráfico*

- la omisión provisoria de escrituras y la omisión o sustitución provisoria de variables como mecanismos propios de los *tratamientos* dentro del registro *algebraico*

A manera de síntesis, destacamos los siguientes puntos de este análisis:

En relación con el registro *gráfico*, encontramos pertinente el criterio de análisis de una figura en términos de *configuraciones visuales* de *unidades figurales.* Más precisamente, al analizar una investigación (ver el caso de Ana Paula, 5.5.1.3.1.1) en la que se pone en juego el *reconocimiento* de un objeto no acotado, mostramos el valor instrumental de la comparación de representaciones conteniendo distinta información en virtud de la organización diferente de las *unidades figurales* (distintas configuraciones visuales). Concluimos que en la medida en que diferentes representaciones de un mismo objeto pueden formar configuraciones figurales diferentes, diferentes procedimientos visuales son requeridos para su interpretación (*mirada intencional, deconstrucción dimensional, operador visual, etc*.); en consecuencia, el **tipo de configuración visual** constituye una variable cognitiva y didáctica.

En relación con el registro de las *escrituras algebraicas* encontramos especialmente importante destacar según nuestro análisis que los *tratamientos* se basan en mecanismos de implicitación y de resolución modular. La flexibilidad del sistema *permite* el tratamiento de una escritura mediante pasos que comprometen ciertos "módulos" y no otros, pero *requiere* la recuperación de los "módulos" de manera coherente dentro de las escrituras y de éstas dentro de los enunciados en el contexto de un discurso.

Todas estas características identificadas en cada registro influyen en la complejidad cognoscitiva de resolución de problemas dentro del registro, en la necesidad de recurrir a *conversiones* a otros registros, y en este último caso en la complejidad de inserción en el problema original de los resultados obtenidos. Seguramente se requieren nuevas investigaciones sobre las características de estos registros y los problemas cognitivos que plantea su articulación. Muy especialmente, sería de interés continuar el estudio de Duval (1988) –en el que identifica las variables significativas para las tareas de *conversión* entre ambos registros para el caso de gráficos de rectas y ecuaciones- a fin de identificar las variables correspondientes al caso de curvas funcionales.

7.3 Perspectivas

Las siguientes líneas de investigación se abren a partir de nuestro aporte.

Por un lado, habrá de recordarse que hemos adoptado una perspectiva de *transversalidad*, entendida por nosotros como la identificación y tratamiento didáctico de aspectos *comunes* a la definición de diferentes contenidos. Es de interés identificar las diversas declinaciones que adoptan los aspectos de la definición (criterios y variables) identificados por nosotros según los diferentes dominios de conocimiento. Entendemos que esta línea de investigación facilitaría aportar de manera complementaria a los trabajos didácticos sobre la definición de conceptos específicos.

Una segunda línea se sitúa directamente en la articulación de la Teoría de los Registros Semióticos con la Teoría de Situaciones Didácticas. Hemos mostrado que ciertos contextos *descriptivos* de *comunicación* son favorables para provocar conflictos cognitivos vía una doble articulación de registros, lo que hace posible que los alumnos descubran por sí mismos las razones del alcance (imprevisto) de sus descripciones verbales y simbólicas y desarrollen mecanismos de control sobre dichas descripciones.

Es de interés el diseño de este tipo de situaciones a la luz de las condiciones establecidas por Brousseau para los contextos de comunicación, junto con los criterios y variables identificados aquí relacionados con la *articulación* de registros –muy especialmente los que provienen del análisis de la articulación entre registros *discursivos* y *no discursivos*. Entendemos que estos contextos facilitarían procesos generalmente bloqueados por el *encapsulamiento* de registros de representación, a través de explorar una doble vía –sintáctica y semántica-, favorable al desarrollo de la capacidad de los estudiantes de formular descripciones (en lenguaje verbal y simbólico) adecuadas a los objetos individuales que intentan describir.

En relación con la necesidad de extender el campo de objetos *familiares* de los alumnos, hemos propuesto criterios e identificado variables destinados a un trabajo específico con la *observación* y el *reconocimiento* de objetos, de manera de favorecer una construcción y deconstrucción por observación de nuevos objetos. Hemos formulado la hipótesis de que una entrada en la definición matemática requiere que las representaciones prototípicas no jueguen ningún rol en el *reconocimiento* de objetos, en la medida en que las operaciones basadas en dichas representaciones favorecen las asociaciones locales y bloquean la identificación de categorías semánticas requerida por las *transformaciones semióticas* ligadas al *reconocimiento* y la *descripción.* Una tercera línea de investigación se abre a partir de esta hipótesis, en analogía con los trabajos de Duval sobre la visualización en el área de geometría: identificar condiciones bajo las cuales las escrituras *numéricas* y *algebraicas* prototípicas no bloqueen las operaciones de *reconocimiento* y *descripción* en el área numérica y algebraica.

8 Referencias Bibliográficas

Ackermann,W. 1954. Salvable cases of the decision Problem. *Studies in Logic*. *Advanced Mathematical Thinking,* chapter 5. Dordrecht: Kluwer.

Alvarez, J.A. & Panizza, M. 1989. Resultados de aplicabilidad pedagógica de una investigación cognitiva en el Aprendizaje del Análisis Matemático, *Enseñanza de las Ciencias*, vol **7**, no 2. pp.141-146.

Asiala, A. et al. 1996. A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. Kaput J. Shoenfeld A. Dubinsky. E. (Eds.): *Research in Collegiate Mathematics Education II*. Providence, RI: American Mathematical Society and Washington, DC: Mathematical Association of America. pp.1-32.

Attorps, I. 2006. *Mathematics teachers' conceptions about equations*. Tesis Doctoral. Universidad de Helsinki.

Balacheff N. 1987. Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, **18**. pp.147-176.

Balacheff, N. 1995. Conception, connaissance et concept. In Grenier, D. (Ed.): *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques*. Grenoble : IMAG. pp.219-244.

Balacheff, N. 2000. *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Brousseau, G. 1997. *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Editada y traducida por N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. 1998. *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cortés Morató, J. & Martínes Riu, A. 1996. *Diccionario de Filosofía.* CD-ROM. Barcelona: Herder.

Douady, R. 1984. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat. Paris: Université Paris VII.

Drouhard, J-Ph. &., Panizza, M**.** 2001. Producciones escritas y tratamientos de control en álgebra: algunas evidencias para pensar en interacciones posibles para guiar su evolución. Relme 15. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. pp.207-212**.**

Drouhard, JPh. & Panizza, M. 2012. Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., Robert, A. (Eds.) : *Recherches en Didactique des Mathématiques. Numéro spécial hors-série. Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives*. Grenoble: La Pensée Sauvage. pp.209-235.

Drouhard, J-Ph. 1992. *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat. Paris: Université de Paris VII.

Dubinsky, E. 1996. Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática*, Vol. **8**, nº 3. pp.25-41.

Dubinsky, E. 2000. De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), **3**/1. pp.47-70.

Dubinsky, E., Elterman, F., & Gong, C. 1988. The Student's Construction of Quantification, *For the Learning of Mathematics*, **8** (2), pp.44-51.

Ducrot, O., & Schaeffer, J-M. 1995. *Nouveau dictionnaire encyclopédique des sciences du langage*. Paris: Le Seuil.

Ducrot, O., & Todorov, T. 1972. Dictionnaire encyclopédique des sciences du langage. Paris: Le Seuil.

Duval, R. 1993. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **5**.

Duval, R. 1994. Les différentes fonctionnements d`une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM,* No **7**.

Duval, R. 1995. *Semiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. 1996. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. **16**. No 3. pp.349-382.

Duval, R. 2002. L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Actes du SFIDA 13-16*, Vol. **IV**. Nice: IREM de Nice.

Duval, R. 2003. Décrire, visualiser, raisonner: quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ?. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **8**.

Duval, R. 2005. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, **10**.

Duval, R. 2006a. Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Volumen **9.** Número Especial. México: Clame. pp.45-81.

Duval, R. 2006b. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **61**. pp.103-131.

Duval, R. 2007. La conversion de représentations, un des deux processus fondamentaux de la pensée. In J. Baillé (Ed.) : *Du mot au concept: Conversion*. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Duval, R. 2009. « Objet » : un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles ?. In J. Baillé (Ed.) : *Du mot au concept: Objet*. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Fischbein, E. 1987. *Intuition in Science and Mathematics: an Educational Approach,* Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E., & Baltsan, M. 1998. The mathematical concept of set and the “collection model”. *Educational Studies in Mathematics,* **37**(1). pp.1-22.

Frege, G. 1974. *Escritos lógico-semánticos*. Madrid: TECNOS.

Fregona, D. 1975. *Les figures planes comme “milieu” dans l’enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques.* Thèse. Université Bordeaux I.

Granger, G-G. 2003. *Philosophie, langage, science*. Les Ulis: EDP sciences. Coll. “Penser avec les sciences”.

Guzman Retamal, I. 1984. *Le rôle de représentations dans l’appropriation de la notion de fonction*. Thèse. Strasbourg: IRMA.

Kanizsa, G. 1998. *La grammaire du voir. Essais sur la perception.* Diderot Éditeur. Coll. Arts et Sciences.

Kenny, A. 1995. *Introducción a Frege*. Madrid: Cátedra. (Título Original: *Frege : An introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy*).

Kleiber, G. 1990. *La semántica de los prototipos*. Madrid: Visor.

Kripke, S. 1995. Identidad y necesidad. En Villanueva, L. (Ed.): *La búsqueda del significado*. Madrid: TECNOS

Laborde, C. 1982. *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l’enseignement mathématique.* Thèse d'État. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Laguerre, E. 2007. Le concept de typicalité appliqué aux registres figuraux et numérico-algébriques : figures archétypes, prototypes pathologiques et pathogènes, typicalité dans la résolution de tâches. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. **12**.

Lakatos, I. 1976. *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Library.

Mariotti, M.A., & Fischbein, E. 1997. Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*. **34.** pp.219–248.

Meana, G. 2003. *Estudio desde un punto de vista semiótico de las actividades sugeridas por los libros de texto y su relación con la construcción de la noción de variable.* Tesis de Licenciatura en Enseñanza de las Ciencias con Orientación Matemática. Universidad Nacional de San Martín.

Ouvrier-Buffet, C. 2006. *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse. Grenoble: laboratoire Leibniz. (http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/).

Ouvrier-Buffet, C. 2006. Exploring mathematical definition construction processes. Educational Studies in Mathematics, **63**(3). pp.259-282.

Ouvrier-Buffet, C. 2012. L'activité de définition : vers un mode de pensée spécifique ? Ginebra: *Actes de EMF2012*.

Panizza, M., & Alvarez, J.A. 1990. La propiedad de densidad, características de su aprendizaje y conclusiones para la enseñanza. *Educación Matemática*. Vol. **3** pp.15-21.

Panizza, M. 2002. Generalización y Control en álgebra. *Relme 15 (Reunión Latinoamericana de Educación Matemática). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericano. pp.213-21.

Panizza, M., & Drouhard, J-Ph**.** 2003. Los tres órdenes de conocimiento como marco para significar las prácticas evaluativa. En Palou de Maté, C., De Pascuale, R., Herrera, M., & Pastor, L.: *La evaluación en la enseñanza. Un proyecto para las áreas de lengua y matemática*. Buenos Aires: GEEMA.

Panizza, M. 2005. *Razonar y Conocer. Una aproximación a la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires: El Zorzal.

Panizza, M. 2006. Substitutions on algebraic statements, based on associations in natural reasoning. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., & Stehliková, N. (Eds.): *Proceedings of the 30th PME International Conference.* **1**, p.312.

Panizza, M. 2008. Verbal and symbolic descriptions of Properties of mathematical objects. In Rivas, M. U.: *Proceedings of the 32th PME International Conference*. México.

Poincaré, H. 1908 : *Science et Méthode* (translated by Francis Maitland 1913), English version: Dover Publications Publishers. pp.65–81.

Putnam, H. 1995. El significado de “significado”. En Villanueva, L. (ed.). *La búsqueda del significado*, Madrid: TECNOS.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. 2005. Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, **7**. pp.51–73.

Rivas, M. U. 1996. Frege y Peirce: en torno al signo y su fundamento. *REV - AF*, vol. **29**, nº 3 : [20]. Navarra: depósito académico digital. Universidad de Navarra.

Rosch, E. 1976. Structural Bases of Typicality Effects. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, **2**, 4. pp.491-502.

Rosch, E. 1978. *Principles of Categorization*. En Rosch, E. & Lloyd, B. (Eds.): *Cognition and Categorisation*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum. pp.27-48.

Saussure (de), F. 1973. *Cours de linguistique générale*. Lausanne: Payot.

Sfard, A. & Linchevski, L. 1994. The gains and pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational studies in mathematics*, **26**. pp.191-228.

Tall, D. (Ed). 1994. *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., & Vinner, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12**. pp.151-169.

Tversky, A., & Kahneman, D. 1974. Judgement under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, **185**. pp.1124-1130.

Vergnaud, G. 1990. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **10**/2-3. pp.133-169.

Villanueva, L. 1995. *La búsqueda del significado*. Madrid: TECNOS

Vinner, S. 1983. Concept definition, concept image, and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. vol.14, número 3.

Vinner, S. 1991. The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. In Tall, D. (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer. pp.65-81.

Vinner, S. 1992. The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* vol.23, número 2.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. 1980. Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. *Proceedings of the Fourth PME Conference*. Berkeley, USA.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. 1983. On concept formation in geometry. *Zentralblat tfür Didaktik der Mathematik,* **5**. pp.20–25.

Vygotsky, L.S. 1997. *Pensée et langage*. Traduction de F. Sève. Paris: La Dispute.

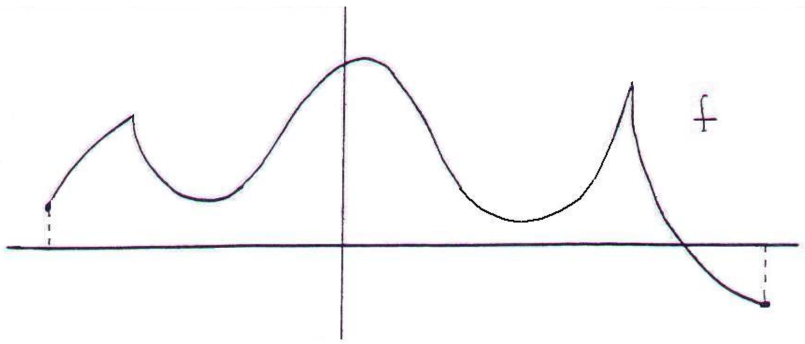
Winicki, Landman, & Leikin. 2000. On equivalent and Non equivalent Definitions: Part I . *For The learning of Mathematics,* **20**(1). pp.17-21.

9 ANEXOS

9.1 ANEXO I

“Estudio sobre los fenómenos asociados a la descripción de una curva funcional en un contexto de comunicación” (Estudio II, Capítulo 4)

Descripción del dispositivo: **Descripción del dispositivo**: se muestra a un grupo (emisor) el gráfico de una función y el grupo debe producir un mensaje que contenga la información necesaria para que el otro grupo (receptor, que no tiene acceso al gráfico) pueda reproducirlo, respetando la forma y las posiciones con respecto a los ejes, sin exigencia de escala. No cabe aquí una validación por superposición de las figuras sino que la comparación se realiza por medio de criterios topológicos.



Producciones de los grupos participantes

$f : [a<0, b>0] \to \mathbb{R}$ continua   grupo A
14917

3 máximos el del medio es el único derivable
y es el absoluto

4 mínimos Extremos del intervalo mínimos
"b" es mínimo absoluto

Ningún mínimo toca el eje
x excepto el absoluto que lo
cruza

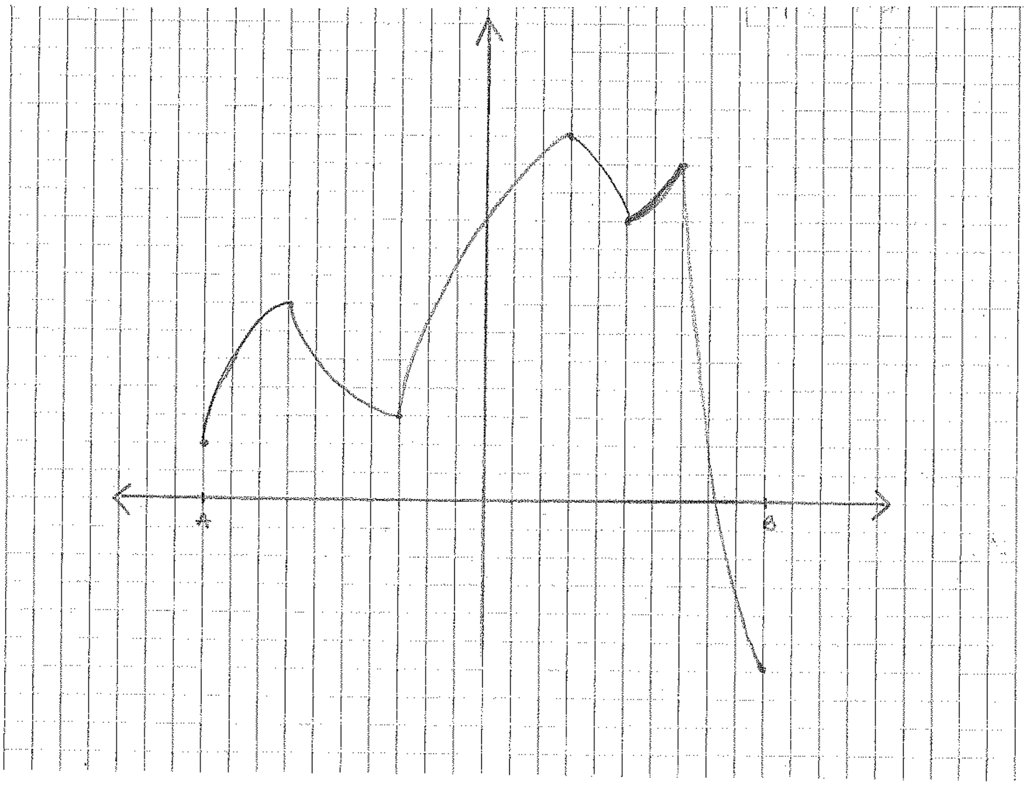
máximos y mínimos intercalados

cóncava hasta el 1er máximo

del último máximo, al extremo,
es convexo

cuáles
entre los los máximos hay dos tramos
convexos y uno cóncavo

NOTA



Grupo B - 14 a 17

* LA FUNCION f ES CONTINUA Y ESTA DEFINIDA EN EL INTERVALO $[X_0 ; X_8]$

Img $[Y_4 ; Y_2]$

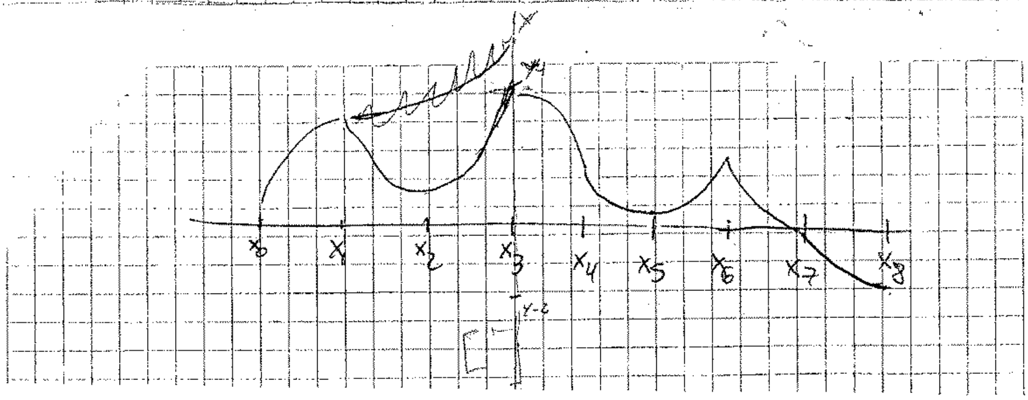
* TIENE 3 MINIMOS REL: X_0, X_2 y X_5 y UNO ABSOLUTO: X_8
* TAMBIEN TIENE 3 MAX: X_1, X_3, X_6, DONDE X_3 ES ABS. y CORTA AL EJE Y.

CONC. Y CRECIMIENTO

* DE X_0 A X_1 CRECE y ES CONCAVA

$X_1, X_2 \downarrow$ $X_2, X_3 \uparrow$

* DE X_1 A X_3 CRECE Y ES CONVEXA
* DE X_3 A X_5 DECRECE Y DE X_3 A X_4 ES CONCAVA. Y DE X_4 A X_5 ES CONVEXA
* DE X_5 A X_6 CRECE Y ES CONVEXA
* DE X_6 A X_8 DECRECE Y ES CONVEXA, Y X_7, CORTA AL EJE X.



HOJA

FECHA

grupo C_10 a 13

$f: x_0 =$ extremo.

en x_1 hay un pico.

en x_2 hay un mínimo.

x_3 cambio de concavidad

x_4 máximo

x_5 cambio de concavidad

x_6 mínimo

x_7 pico

$f(x_8) = 0$

x_9 Extremo.

(x_1, x_3) concavo hacia arriba

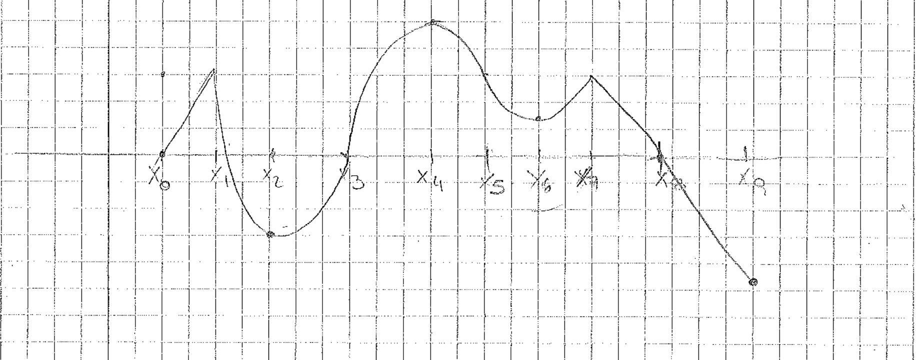
(x_3, x_5) " " abajo

(x_5, x_7) " " arriba

(x_0, x_1) creciente

(x_7, x_9) decreciente

$f: [x_0, x_9) \to \mathbb{R}$



Transcripción de las producciones de los grupos y descripción de unidades de análisis

Grupo A
A1. f : [a<0, b>0] →R continua A2. 3 máximos. El del medio es el único derivable y es el absoluto A3. 4 mínimos A4. Extremos del intervalo mínimos "b" es mínimo absoluto A5. Ningún mínimo toca el eje x excepto el absoluto que lo cruza A6. máximos y mínimos intercalados A7. cóncava hasta el primer máximo A8. Del último máximo, al extremo, es convexo A9. Entre los dos máximos hay dos tramos convexos y uno cóncavo
Grupo B B1. La función f función es continua y está definida en el intervalo [x_0, x_8] B2. Img [y_1,-y_2] B3. Tiene 3 mínimos REL: x_0, x_2 *y* $x_{5,}$ y uno absoluto: x_8 B4. También tiene 3 máximos x_1, $x_{3,}$ y x_6 donde x_3 es absoluto y corta al eje y CONCAVIDAD Y CRECIMIENTO B5. De x_0 a x_1 crece y es cóncava B6. x_1 , x_2 ↓ x_2 , x_3↑ B7. De x_1 a x_3 crece y es convexa B8. De x_3 a x_5 decrece y de x_3 a x_4 es cóncava, y de x_4 a x_5 es convexa B9. De x_5 a x_6 crece y es convexa B10. De x_6 a x_8 decrece y es convexa, y x_7 corta al eje x

Grupo C

C1. $f : x_0$ = extremo

C2. En x_1 hay un pico

C3. En x_2 hay un mínimo

C4. x_3 cambio de concavidad

C5. x_4 máximo

C6. x_5 cambio de concavidad

C7 x_6 mínimo

C8. x_7 pico

C9. $f : x_8=0$

C10. x_9 extremo

C11. (x_1, x_3) cóncava hacia arriba

C12. (x_3, x_5) cóncava hacia abajo

C13. (x_5, x_7) cóncava hacia arriba

C14. (x_0, x_1) creciente

C15. (x_7, x_9) creciente

C16. f: $[(x_0, x_9)] \rightarrow \mathbb{R}$

9.2 ANEXO II

Entrevista analizada en 5.5.1.3.1.1 El caso de Ana Paula

Frente al problema de estudiar las propiedades de la función $f(x) = \begin{cases} -x+3 \text{ si } x<1 \\ x+7 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ en relación a la inyectividad, Ana Paula ha realizado un análisis en distintos registros semióticos llegando a una conclusión errónea. Después de darle un tiempo para que revise su producción, el investigador le sugiere analizar el par de valores (-6 ;2)

Ana Paula calcula

AP Ah no, es verdad, no es inyectiva (*ella reflexiona*)

AP ¿Que debería haber puesto para que no me dé esto? ¿Un número negativo y uno positivo?

E no sé, mira…

AP busco para que ésto me de lo mismo…
Ah, si, como –*x* cambia el signo es como si hubiera dos positivos, uno agregado a 3 y el otro a 7, debería darme lo mismo

Ella iguala a 10, reflexiona, encuentra -7 y 3

AP -7 y 3… -(-7)+3 = 3+7
Y ahí ya comprobé que no es inyectiva

E ¿y con el (-6;2) ya no estaba comprobado?

AP si, por supuesto, ya había verificado antes

Ella sigue buscando contra-ejemplos

E ¿por qué buscas otros contra-ejemplos?

AP Es que si tuviese que hacerlo de nuevo, lo haría mal nuevamente, porque antes lo había hecho analíticamente, lo había verificado en el gráfico y me dio lo mismo y luego hice el cuadro de los valores y no puse el (-6 ;2). No entiendo qué hice mal….

Ella relee sus producciones anteriores

E mhhh…

AP la diferencia entre x_1 y x_2 debe ser constante? A ver … x_1-x_2 es igual a la imagen

E ¿a la imagen de qué?

AP de los dos…

Ella se pierde en sus cálculos

AP ¡Ah, no! va a haber una infinidad en cuanto la imagen sea más grande o igual que 8

ella reflexiona

AP ¿Cómo puedo hacer para encontrarlos?

E la imagen de *x*1 debe ser igual a la imagen de *x*2

AP Es lo que yo ya había dicho, por la definición

E lo habías dicho, pero no lo utilizaste para lo que te habías propuesto

AP ¡Ahhhh!

Finalmente hace el cálculo y llega a la caracterización.

$$-x_1 + 3 = x_2 + 7$$

$$x_1 + x_2 = 4, (x_1 < 1, x_2 \geq 1)$$