Enseñar matemática a través de problemas... pero ¿cómo?

Adriana Zita Rabino

Se comparten algunas estrategias posibles para la selección de problemas significativos, en contextos reales, que promuevan la construcción de conceptos y herramientas matemáticas en los estudiantes. De acuerdo con los planteos de la Educación Matemática Realista, el objetivo de la propuesta es lograr una matematización creciente.

Desde hace algunas décadas, las corrientes didácticas tomadas por los diseños curriculares propician enseñar matemática a través de la resolución de problemas. Según la Educación Matemática Realista (EMR), para que ellos sean un instrumento real[1] de aprendizaje de la matemática, deben ser significativos en el sentido de que los alumnos puedan ligarlos a conocimientos y experiencias previas, planteados en contextos[2] realistas, de modo tal que el alumno sienta interés por resolverlos. Además, deben ser abiertos para que puedan hacerse preguntas, utilizar estrategias variadas y, si fuera necesario, buscar más información por fuera de la dada para resolverlos. Deben incentivar a los alumnos a comprometerse con la actividad matemática promoviendo en ellos la construcción de conceptos y herramientas de esquematización y formalización crecientes, de modo que puedan identificarlos para ser generalizados, reutilizados, resignificados, transferidos y adaptados en situaciones en otros contextos (extramatemáticos o intramatemáticos) para resolver otros problemas (Charnay, R, 1994).

Algunos obstáculos

Existen varios "escollos" y pre-conceptos que aparecen cuando se quieren implementar las ideas mencionadas.

A continuación presentamos algunos obstáculos surgidos de nuestra propia experiencia.

En general, existe la creencia de que hay un solo camino que lleva a la solución de un problema, creencia del alumno, pero que suele ser inducida por el docente, quien posiblemente se formó también bajo una concepción tradicional de la matemática y de su enseñanza y aprendizaje (lo cual incluye el papel del problema con otra mirada).

Aparece también el hecho de que, si bien la generalidad de los docentes acepta hoy que los alumnos traen conocimientos previos, e incluso admiten que pueden poseer experiencias matemáticas ricas extraescolares, no saben cómo capitalizar ambos para dar apoyo y continuidad a esos aprendizajes. Esto se torna un obstáculo que acentúa la diferenciación entre el alumnado.

También los diseños curriculares de matemática (¡que además compiten con los de las muchas disciplinas restantes) se han tornado amplios en contenidos, en función de los avances de la matemática y de los enfoques actuales acerca su enseñanza. Estos documentos exigen comprender la disciplina como "actividad", no como recepción de conceptos acabados, lo que implica un tiempo largo de construcción y trabajo con los distintos conceptos en contextos diversos con la finalidad de ampliar la comprensión de estas ideas novedosas.

Los problemas en los textos de matemática

Por otro lado, la intención del docente puede ser muy positiva hacia los nuevos enfoques, pero al recurrir a los libros de texto –que no necesariamente responden a las nuevas concepciones sobre la enseñanza–, puede ocurrir que o bien los utilice acríticamente o bien que no encuentre en ellos todos los contenidos que le interesa trabajar ni actividades que satisfagan sus expectativas.

Durante muchos años, los textos de matemática se organizaban del siguiente modo: luego de definiciones, reglas y ejemplos de uso, se presentaban los problemas, los cuales aparecían como aplicación de los conceptos matemáticos tratados y, en general, en contextos forzados con el ánimo de orientar hacia el uso de estrategias determinadas.

Por ejemplo:

- *"Si un nadador tarda 10 minutos en nadar 500 metros, ¿cuánto tardará en nadar 5000 metros?"*

  (Claro, el nadador es una máquina que mientras no le falte combustible va a nadar siempre al mismo ritmo sin cansarse.)

- *"Si 10 obreros tardan 18 meses en construir una obra, ¿cuánto tardarán 50 obreros?"*

  (Está bien, todos los obreros trabajan al mismo ritmo, todos tienen la misma capacidad física y emocional.)

- *"¿Dónde tengo que poner una farola en una plaza de tales dimensiones para que alumbre lo mejor posible?"*

  (Se presupone que en la plaza no debe haber árboles ni juegos ni nada que interfiera la luz. Es más: ¡que no se vaya a quemar esa única lamparita porque si no la plaza queda totalmente a oscuras!)

Este tipo de problemas da a los alumnos una imagen parcial de la matemática, cada vez más alejada de la realidad. El alumno pocas veces se hace algún de cuestionamiento. Pero ¿puede responder de la misma manera cuando se encuentra fuera de la escuela y se le presenta un problema a resolver?

Actualmente, los autores de textos han adoptado un criterio más acorde con los nuevos abordajes de la enseñanza y el aprendizaje. Pero seamos claros: los problemas que se proponen son usados en las clases más con un fin motivador y ejemplificador del uso de la matemática (en general, más allá de la matemática misma) que para un aprovechamiento real por parte de los alumnos. Corresponde a los lectores dar vida al texto, y el docente tiene un papel relevante en este sentido, dando la responsabilidad a sus alumnos en la resolución de problemas y en el trabajo matemático colectivo.

Problemas ricos

Un problema bien elegido (o elaborado), que contemple los intereses y posibilidades de los alumnos, es aquel que se presenta como un desafío a resolver, permite ser abordado inicialmente por todos los alumnos de acuerdo con las herramientas que poseen, para luego, con la ayuda del docente en los espacios de socialización de las producciones entre pares, avanzar en los niveles de esquematización y formalización de los contenidos involucrados hasta lograr el objetivo planificado.

Por otro lado, un problema rico permite el abordaje desde distintos ejes curriculares de matemática (y hasta distintas áreas) lo cual hace que el tiempo, contrariamente a lo que se piensa muchas veces, se economice.

Sugerimos que, después de resolver cada problema de los que se ofrecen a continuación, se escriban en el pizarrón todos los contenidos (conceptos y procedimientos) involucrados surgidos durante el desarrollo de la actividad (¡puede resultar llamativo para docentes y alumnos!).

Un aspecto a tener en cuenta es que en la presentación de los problemas, muchas veces se utilizan, además de textos, figuras, ilustraciones, tablas, gráficos, esquemas. Los docentes deben analizar previamente si estos se comportan como meros "adornos" o son intrínsecos al contexto, ayudando a limitar su semántica, promoviendo que los alumnos puedan interpretar de modo adecuado la información que brindan.

Dado que estos problemas en general son abiertos, muchas veces aparece el miedo a no saber qué nos pueden plantear los alumnos y qué les vamos a responder. Al planificar la clase es importante, entonces, considerar y anticipar las posibles respuestas de los alumnos a las diferentes consignas que se propongan en la clase.

A partir de nuestro estudio de la corriente didáctica conocida como Educación Matemática Realista, donde Freudenthal y sus discípulos trabajan sobre la fenomenología didáctica,[3] tuvimos la inquietud de plantearnos qué puede hacer un docente con un enfoque más modesto, pero que responde a los mismos propósitos y finalidades.

Algunas pautas para la búsqueda de problemas

Los ejemplos que encontrarán en el próximo apartado fueron ideados a partir de "mirar con ojos matemáticos" nuestro entorno y adaptarlos para el aula. Al relatar cómo fueron encontrados, es muy probable (y deseable) que quienes están leyendo estas páginas se entusiasmen y puedan hacer lo propio. ¡Ya verán qué gratificante es! Todos los problemas que presentamos son abiertos e invitan a continuar con otros que profundicen el tema.

Para tener en cuenta

I. Estar atentos cuando hojeamos diarios, revistas o libros (no necesariamente de matemática) o miramos programas de televisión, o escuchamos comentarios de los alumnos o situaciones vividas por ellos, etc., para descubrir contextos matematizables, es decir que puedan ser puntos de partida en procesos de matematización afines a los contenidos que deseamos trabajar en nuestras clases (se sugiere recortar o fotocopiar materiales, registrar bibliografía o bajar materiales de Internet, etc., para formar un archivo de contextos interesantes).

II. Seleccionar de nuestro archivo o colección un material adecuado al tema a tratar.

III. Generar en forma abierta preguntas que surjan de analizar este material en función del contexto y registrarlas.

IV. Distinguir qué contenidos pueden ligarse a ese contexto y a esas preguntas y cuál/es de ellos me interesan abordar en el aula.

V. Armar un banco de problemas a partir de ese contexto y de determinar qué preguntas resultan matemáticamente interesantes a partir de él. Es decir, no esperar a necesitar un problema de un tema específico porque probablemente (así lo dice la ley de Murphy) no lo encontremos en ese momento.

VI. Organizar estos problemas en secuencias identificando objetivos, contenidos y características de la actividad.

Todos los docentes, si dominamos el tema, podemos poner en actividad nuestro potencial creativo. Así es, ¡no solo los artistas "crean"! Miremos a nuestro alrededor con "ojos matemáticos".

¡Y a estar atentos, que en cualquier momento puede darse algo!

Ejemplos

I. ¿Por la cocina, cómo andamos?

Este problema nos encanta darlo por la reacción que tienen los alumnos cuando terminan de resolverlo. Es un problema creado a partir de nuestra vida cotidiana y de las múltiples propagandas que aparecen en revistas y televisión, o en el supermercado.

Comentamos en clase:

Nos resultó llamativo en las propagandas el por qué los desinfectantes, en general, hablan de una efectividad del 99,9% y no del 100%.

Los alumnos comienzan a actuar matemáticamente: ¿tendrá importancia esta sutil diferencia?

Opinan algunos que la diferencia es insignificante, que no vale la pena cuestionarse como seguramente lo hace el común de la gente. Pero la duda está sembrada y el trabajo comienza. ¿Cómo podemos verificarlo? ¿Cómo crecen las bacterias?

Se entrega el problema 1 luego de discutir lo anterior y mostrar algunas publicidades *(Figura 1)*.

Figura 1.

Dos millones de bacterias están creciendo en la esquina de la mesada de tu cocina. Tú decides que es hora de asear la casa. Usas un limpiador cuya efectividad en matar es del 99,9% (Figura 2).

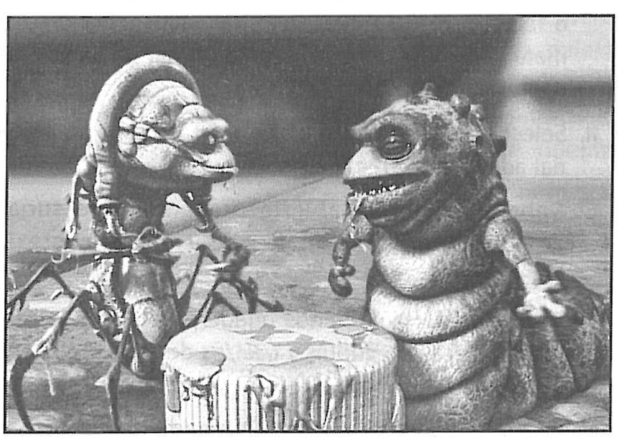

Figura 2.

Suponiendo que el número de bacterias se duplicara cada 20 minutos.

¿Cuánto demorará aproximadamente en haber la misma cantidad de bacterias que antes?

Ayuda

– Admitiremos que, durante la división celular, una bacteria se divide en mitades, formando dos células nuevas. Luego cada bacteria se divide nuevamente, y así sucesivamente. Se dice que estas bacterias tienen un *factor de crecimiento 2.*

Los alumnos pueden organizar los datos que van surgiendo con un diagrama de árbol o con una tabla de valores. Dependiendo del nivel en el proceso de aprendizaje, pueden dar respuesta al problema en 10 pasos, o construir la fórmula para resolver una sencilla ecuación, que será novedosa para ellos, suponiendo que desconocen la **función de crecimiento exponencial**. También es interesante que representen dicha situación gráficamente para que vean cuán rápido es ese crecimiento.

Solución

Si el limpiador tiene una efectividad de 99,9%, quiere decir que el 0,1% de las bacterias quedan vivas, o sea 2.000 bacterias que están en reproducción permanente.

La fórmula correspondiente de este crecimiento exponencial es: $B = 2000 \cdot 2^t$

Si queremos (no queremos, pero lamentablemente es lo que sucede) que el número de bacterias sea el original, hay que resolver la siguiente ecuación para extraer el tiempo, lo que pueden hacer estimativamente aunque todavía no hayan trabajado con ecuaciones exponenciales o logarítmicas:

$$2.000 \text{ bacterias} \cdot 2^t = 2.000.000 \text{ bacterias}$$

Su resultado nos dice que el número de períodos t es casi 10, lo que representa menos de 3 horas y media. (Más precisamente: 199,3 minutos o sea 3,32 horas, o 3 horas, 19 minutos y 12 segundos. ¡Qué *bajón*!)

Ahora estamos en condiciones de cambiar el factor de crecimiento o el tiempo o ambos con la finalidad de ir avanzando en el concepto de función exponencial.

II. ¿Es cierto que el burro es tan burro?

Hace unos días tuve la suerte de conocer uno de los hermosos lugares que hay en la Argentina: Cafayate, en la provincia de Salta. Es un pueblito muy tradicional, inmerso en paisajes espectaculares. Su plaza central está rodeada de negocios regionales y de varias parrillas, en donde, a partir de las 21 hs. uno puede comer acompañado de grupos folklóricos de la región.

Una noche estábamos comiendo una riquísima parrillada (¡ni qué hablar de las empanadas!) y un trío entonaba canciones folklóricas. Para cada una de ellas la voz cantante hacía una pequeña introducción. En un momento dijo: *"Ahora vamos a cantar un huayno. Este es un ritmo en tres tiempos, y es así porque imita el paso del burro cuando está transitando por lugares escarpados y peligrosos. Ustedes se preguntarán cómo puede ser que el burro, teniendo 4 patas, haga un paso a un ritmo de 3. Bueno, apoya dos patas a la vez (con las otras dos forma tres puntos de apoyo), de esta manera tiene más firmeza para no caerse".*

Yo concluí para mis adentros: "¡Entonces el burro no es tan BURRO...!!!"

Llevado esto al aula. la pregunta crucial de los alumnos resultó ser "¿por qué tres apoyos son mejor que cuatro?"

Los alumnos comienzan a cuestionarse y a probar, por ejemplo, suponiendo que el burro es una silla o mesa y constatan que la cuarta pata generalmente no aporta y aun llega a estorbar. ¿Culpa del suelo? ¿Culpa de las 4 patas?

Entonces se les brindan a los alumnos materiales para modelizar la situación.

Figura 3.

Usar escarbadientes (como patas) y un pedacito de cartón como asiento.

La explicación de este "fenómeno" es sencilla y se puede hacer basándose en un axioma euclidiano que dice que ***por tres puntos no alineados pasa un único plano*** *(o que tres puntos no alineados determinan un único plano).*

Para entender esta propiedad un poco mejor, se puede hacer una analogía con el postulado de Euclides (más familiar a los alumnos), que dice que d*os puntos determinan una única recta.* O sea, que si solo tenemos dos puntos no vamos a tener inconvenientes en trazar una recta que pase por ellos, pero si agregamos un punto más, ese punto nos puede traer complicaciones a no ser que esté alineado con los otros dos. ¡Mejor quedémonos con dos puntos solamente! (El famoso dicho "Lo que abunda no daña"... ¿es cierto?).

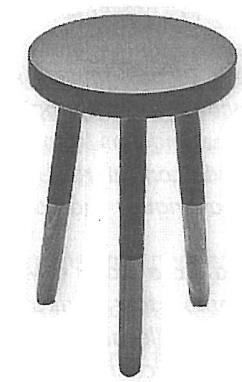

Figura 4.

Con el plano pasa algo similar: tres puntos en el espacio determinan un único plano que pasa por ellos. Si agregamos un punto más, este punto va a estorbar a no ser que sea coplanar (que pertenezca al plano) con los otros tres.

Entonces, imaginemos que el piso es el plano y los extremos de las patas del banco son los puntos. Si solo tengo tres patas (tres puntos), esas patas se van a acomodar perfectamente sobre el piso (realmente plano), aunque el asiento del banco no quede paralelo al piso, pero si tengo una pata más, ese extremo de pata va a tener que estar en una posición perfectamente coplanar con los otros tres, de otra manera va a hacer que el banco "baile".

Otras preguntas que surgieron:

- ¿Será único el triángulo formado por los apoyos de las patas y que dejen equilibrado el banco?

Este tipo de trípode se utiliza para sacar fotos o filmar. Sus patas son regulables. ¿El usuario tiene que comprobar si las patas tienen la misma longitud o es irrelevante para que no se mueva la cámara? *(Figura 5).*

Este problema, además de llevar a comprobar que tres puntos determinan un plano, puede conducir a analizar con los alumnos qué es un axioma o postulado y con qué criterio se usa en la matemática.

Figura 5.

III. "¿CUÁNTO EQUIPAJE PUEDO LLEVAR?"

Este problemas se los presenté a mis alumnos de modo coloquial.

Con el avance de la tecnología se ofrecen servicios a los pasajeros (de avión en este ejemplo) de tal manera que se pueden realizar muchos trámites desde la casa, simplemente contando con Internet (comprar pasajes, realizar el check-in, averiguar cuánto equipaje se puede llevar).

Mi sobrina Tiziana iba a viajar a México y, como es muy meticulosa, intentó hacer todas las averiguaciones con anterioridad para no llevarse una sorpresa.

La cuestión es que se encontró con una traba en donde menos lo esperaba. Era saber cuánto equipaje de mano podía llevar y especialmente el tamaño.

Por su seguridad y comodidad a bordo, el equipaje de mano debe cumplir con ciertas medidas y un peso máximo, de lo contrario será despachado en la bodega del avión.

Los mostradores de check-in cuentan con un sistema de medición de limitación volumétrica, por lo tanto, todo equipaje de mano que exceda el tamaño permitido por dichos medidores deberá ser despachado en la bodega, ya que no podrá ser ubicado ni en los compartimientos superiores de la cabina de pasajeros ni debajo de los asientos.

En dos de las aerolíneas que averiguó no tuvo problemas, ya que la información era por demás explícita. Es más, estaba dada por una ilustración y en algunos casos las medidas estaban en centímetros y en pulgadas y el peso entre 8 y 10 kg por persona (Figuras 6 y 7).

Pero cuando intentó averiguar esta información en otra aerolínea (la que más le convenía por el horario de salida), se encontró con un problema. Los datos que le daban eran los siguientes:

Se permite UNA *pieza de equipaje de mano por cliente pagando tarifa completa.*

> *PESO MÁXIMO: 10 Kg (22 lbs)*
> *DIMENSIÓN MÁXIMA: 114 cm (45 pulg) (alto + ancho + largo)*

El equipaje de mano deberá caber en el medidor localizado en los mostradores del aeropuerto.

Cualquier pieza de equipaje de mano que sobrepase estas medidas tendrá que documentarse.

Ella sentía que le faltaba información. ¿Por qué?

Intentó llamar a las líneas rotativas de la empresa, pero siempre la vocecita odiada que la hacía esperar.

Ansiosa, trató de solucionar el problema por sí misma y empezó a pensar cuáles eran las posibilidades del tamaño de equipaje a llevar.

¿Qué cuestionamientos se puede haber hecho Tiziana?

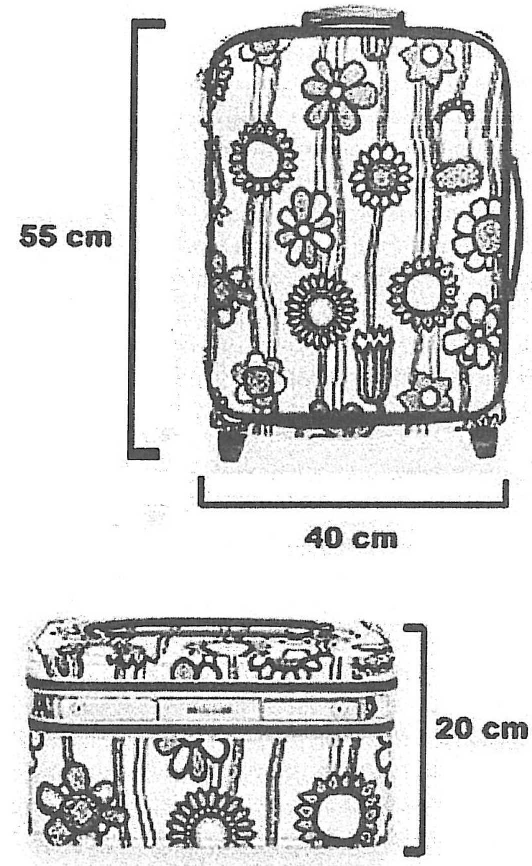

Figura 7.

Figura 6.

Les pedimos a los alumnos que analizaran si la información era suficiente o si podrían presentarse inconvenientes, como presentía Tiziana. En este segundo caso, ¿cuáles serían los inconvenientes y de qué modo se podrán solucionar?

He aquí algunas preguntas que se pueden hacer ellos mismos (o se les pueden hacer en caso de que no surjan):

1) ¿Hay más de un tamaño que responde a las dimensiones requeridas?

2) De ser así, ¿habrá un equipaje que tenga un volumen máximo?

3) A pesar de haber respetado las dimensiones sugeridas, ¿esto me asegura que las dimensiones parciales elegidas quepan en el sistema de medición de limitación?

4) Si se determina un equipaje con un volumen máximo, ¿qué hay de cierto en esta estrategia?: *"Reparto ese volumen en pequeños paquetes y me facilitaría que los paquetitos entren en el sistema de medición de limitación"*, ¿es correcto este razonamiento?

5) El equipaje que parece óptimo ¿podría ser guardado en el compartimento superior para equipaje del avión? (El compartimento superior tiene alrededor de 16 pulgadas de profundidad y 10 pulgadas de altura. Esto sí lo pudo averiguar Tiziana por Internet.)

6) ¿Qué sucedería si soy uno de los últimos pasajeros en subir al avión y veo que todos los compartimentos altos están llenos con equipaje de mano de otros?

7) ¿Podría el equipaje en cuestión ser colocado debajo de mi asiento en el avión? (El espacio debajo de los asientos tiene más o menos 21 pulgadas de largo, 16 de ancho y 8 de alto.)

Respuestas

1) Sí, hay más de un tamaño, en rigor hay infinitos, dado que desde el punto de vista matemático la longitud es una magnitud continua, por lo tanto se mide utilizando números reales. Pero, en la práctica, se tiende a redondear o aproximar a números enteros o a lo sumo al décimo. A pesar de ello, siguen siendo muchas las opciones.

Ejemplos de dimensiones podrían ser:

20 cm x 50 cm x 44 cm o 32,7 cm x 41,4 cm x 39,9 cm

2) El equipaje debería tener forma cúbica para tener el volumen máximo, con una arista de 38 cm.

3) No.

4) No es correcto. Las dimensiones lineales pueden variar y alejarse muchísimo de las establecidas legalmente, a pesar de seguir teniendo ese volumen.

5) No cabría, ya que una de las dimensiones es de 40cm (16 pulgadas).

6) y 7) No cabría por el alto, ya que 8 pulgadas equivalen a 20 cm.

Animarse a crear, probar, compartir y cambiar

Buscar problemas que movilicen a los alumnos con distintos niveles de producción según sus posibilidades no es empresa fácil. Personalmente, me ayudó mucho compartir esta tarea con los participantes del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática desde el año 2001. Nos llevó muchos años de probar en las aulas, corregir, volver a probar, discutir y tener en cuenta los aportes del grupo, hasta llegar a tener un cambio de postura o actitud en la manera de enseñar. Es alentador ver cómo los alumnos se comprometen y cambian su proceder frente a este tipo de problemas. NE

Notas

1. Dice Freudenthal: *"Entendemos como **realidad** aquello que el sentido común experimenta como real dentro de un cierto escenario"* (1991, p.17). Es decir, desde este enfoque la realidad abarca no solo el mundo sensible, sino también el mental, virtual, de fantasía, etc., que el alumno considere como razonable e imaginable.
2. *"**Contexto** significa ese dominio de la realidad, el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado"* (Freudenthal, 1991, p. 73).
3. Para Freudenthal, la exploración fenomenológica didáctica consiste en: la búsqueda de fenómenos ricos, significativos y no pre-estructurados, con vías a desarrollar en los alumnos nociones intuitivas que los lleven a la formación de objetos matemáticos (Freudenthal, 1991).

INFORMACIÓN ADICIONAL

Bibliografía

Bressan, A. y Zolkower, B. (2005),"Los principios de la Educación Matemática Realista", en Alagia, N. y otros, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*, Buenos Aires, del Zorzal.

Charnay, R. (1994), "Aprender por medio de la resolución de problemas". En Parra, C. y otros, *Didáctica de la Matemática. Aportes y Reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.

Bressan, Ana y otros (2006-2007), *Las escuelas situadas en contextos culturales diversos*, Consejo de Educación Provincia de Neuquén, postítulo Área Matemática.

Freudenthal, H. (1991), *China Lectures. Revisiting Mathematics Education*, Holanda, Kluwer Publisher.

Roodhart. A.; Mieke, A. y otros (1999), *Triángulos y Retazos*, EE.UU., Universidad de Wisconsin-Madison e Instituto Freudenthal, Colección Las Matemáticas en Contexto, Enciclopedia Británica.

Van Den Heuvel; Panhuizen, M. (1998), *Realistic Mathematics Education* Noruega, norma-Lecture. 5-9 June.

Adriana Zita Rabino es profesora de matemática (Universidad Nacional del Comahue). Docente de nivel secundario. Profesora regular por concurso (Instituto de Formación Docente Continua, San Carlos de Bariloche). Integrante del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM) coordinado por Betina Zolkower y Ana María Bressan. Colaboradora de la página www.gpdmatematica.org.ar.

Todos estos problemas están publicados en la página www.gpdmatematica.org.ar, junto a otros en la carpeta: Recursos para el aula. Problemas.