LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA Y LOS MODELOS DE ÁREA

María Cristina Covas y Ana Bressan

GPDM

El modelo de área en la enseñanza

El modelo de área para representar cuadrados de binomios y ecuaciones cuadráticas alcanza cierta difusión en la enseñanza escolar en los años 60 y 70 a través del trabajo del Dr. Zoltán Dienes. Este matemático y didacta húngaro, en colaboración con el psicólogo cognitivo Dr. Jerome Bruner, trabaja en un proyecto cuyo objetivo es enseñar estructuras matemáticas a niños de escuela básica (entre 5 y 13 años), en concordancia con el enfoque de la enseñanza de la matemática de la época. Para eso se apoya en el uso de manipulativos (materiales concretos) especialmente diseñados, con los cuales busca representar lo más "puramente" posible los conceptos matemáticos y lógicos que se consideran pueden ser estudiados en esas edades.

Siguiendo el pensamiento del Bruner, quien elabora un modelo evolutivo de desarrollo conceptual que toma en cuenta las formas de representación enactiva (donde los alumnos manipulan materiales directamente), icónica (en que trabajan con imágenes de objetos, sin manipular los mismos) y simbólica (en que estrictamente se manejan símbolos, sin apelar a imágenes ni objetos)[1], Dienes crea materiales y juegos variados para el tratamiento inicial de ideas lógicas y matemáticas.

Entre los primeros están los bloques aritméticos multibase (BAM o bloques Dienes) constituidos por cubos de lado 1, regletas de la forma 1 por x (x toma un valor conocido) y placas cuadradas y cubos de lado x, utilizados para favorecer la comprensión de las propiedades de los sistemas de numeración posicionales y de los algoritmos estándares. Estos materiales adoptan otro uso para la enseñanza del álgebra, interpretándose x como una variable, permitiendo así la materialización de expresiones cuadráticas, y la representación del proceso de factorización de las mismas y viceversa.

A continuación se presenta una figura extraída del libro de L. Resnick y W. Ford: La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos (1990, p. 147), que muestra claramente el uso de los bloques para factorizar ecuaciones cuadráticas.

[1] Bruner (1915), elaboró una teoría cognitiva del desarrollo conceptual que implica una secuencia en la enseñanza (descubrimiento guiado). Tomando la enseñanza de la matemática, como ejemplo, determina que la apropiación de las estructuras de esta ciencia debe hacerse favoreciendo en los alumnos experiencias que le permitan desarrollar representaciones enactivas, icónicas u simbólicas. "Se plantea la hipótesis de que estas representaciones mentales sean las formas o modos en que se recuerdan las experiencias de aprendizaje, y en último extremo, los conceptos" (Resnick L. y Ford W. 1990. p. 155)

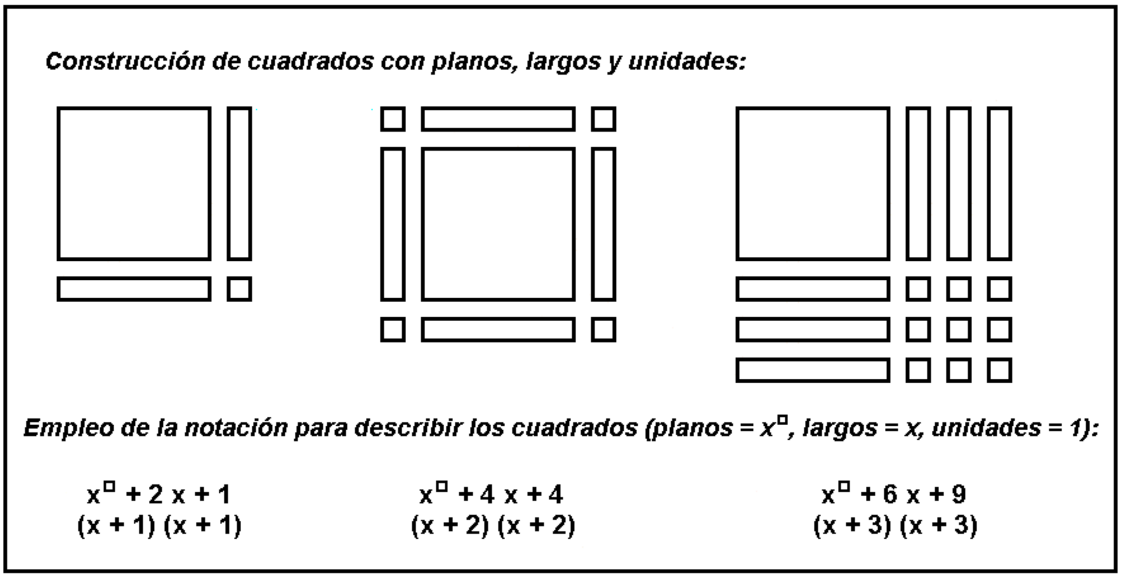


FIG 4.6. Materialización concreta del principio de factorización de una ecuación de segundo grado. (Adaptado de Bruner, 1966.)

Dienes sostiene dos principios esenciales que deben cumplir las diversas materializaciones de que se haga uso en las aulas para enseñar estructuras matemáticas o lógicas: el de *variabilidad perceptual,* que debe permitir al niño "ver" la estructura que se desea enseñar desde distintas concretizaciones del mismo concepto, con el fin de enriquecer la imagen mental que obtenga del mismo. Esto implica que el alumno pueda abstraer las regularidades o propiedades esenciales de la estructura o concepto con independencia de las formas específicas que adopten los materiales; y el de *variabilidad matemática,* que ayuda a la generalización de un concepto a otros contextos, proveyendo a los alumnos de oportunidades de apreciar la idea de variación de la/s variable/s interviniente/s en la estructura o concepto a enseñar.

Dienes (1970) dice al respecto

> "Realmente, carece de objeto que exhibamos ante el niño una variable si antes no la ha visto variar. En cambio, si la variable ha variado de modo efectivo, en la experiencia del niño, la cuestión es bien distinta y no hace falta mucho tiempo para convencerle de que "representar un número cualquiera" por una letra es siempre una economía de expresión.
> …
> El principio de variabilidad perceptual exige abundancia de experiencias concretas sobre la misma estructura conceptual, de modo tal, ahora también, que *todos los niños* puedan extraer la idea abstracta esencial que es inherente a toda fórmula" (Pág. 61)

Estos principios siguen teniendo vigencia hoy día y deberían ser tenidos en cuenta por los docentes al confeccionar materiales (e incluso al elaborar situaciones problemáticas para el aula).

En contraposición con el amplio uso de los BAM en aritmética, que llega incluso hasta nuestros días, el empleo del material Dienes para el álgebra[2] no tuvo la misma

[2] Estos materiales se replican hoy incluyendo otros formatos Ver Mancera Martínez, E., *Matebloquemática, la forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos*; Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1998 y el artículo en Internet del mismo autor: El papel de la geometría como

repercusión. Hoy solo queda en los textos alguna ilustración del modelo cuadrangular aplicado a mostrar, por ejemplo, la no distributividad de la potencia en el caso de binomios al cuadrado con el ánimo de que los alumnos "vean" en la gráfica que $(a + b)^2$ no es igual a $a^2 + b^2$, alejándose totalmente de la intención con que este autor diseñara esos materiales.

Los motivos pueden ser variados:
- los materiales concretos no suelen ser usados en la escuela secundaria y el estudio del álgebra recién se comienza en ella.
- la fuerte impronta analítica de la matemática moderna, mucho más centrada en lo simbólico que en lo perceptual.
- las críticas que sobrevinieron a las experiencias de Bruner y Dienes a las que se les adjudican falta de una evaluación seria. (Resnick y Ford, 1990, p. 142)
- las críticas de varios autores al pensamiento de Dienes quienes advierten que el paso por la concretización nada asegura sobre el descubrimiento y la abstracción *para todos* los niños de los conceptos matemáticos que se supone ella representa. Se pueden trabajar los materiales tan mecánica e incomprensivamente como los propios símbolos matemáticos. Otro argumento sostenido acerca de las limitaciones del uso del material lo dan quienes advierten que no existe un isomorfismo probado entre las acciones mentales y las físicas que realizan los alumnos, por ejemplo al resolver operaciones aritméticas con materiales y por escrito, ni que la matemática subyacente en los modelos materiales sea "concreta" para los alumnos, ya que la misma obvia el conocimiento informal que traen los mismos. (Gravemeijer K., 1994. pág. 77 a 105; Freudenthal H., 1991, pág. 76)

Sin embargo, consideramos hoy que el modelo de área puede brindar otra perspectiva al estudio de propiedades algebraicas a alumnos con dificultades para encontrar el sentido de las mismas con los recursos puramente simbólico-deductivos de esta rama de la matemática.

La historia del álgebra aporta a esta idea como veremos a continuación, aunque en la obra de Dienes no hemos encontrado ninguna referencia al respecto. Si bien, en los textos que vamos a citar no se hace tampoco mención al uso de materiales concretos, sino a representaciones geométricas y expresiones algebraicas con distinto grado de evolución, es posible que en la enseñanza abarquemos estas formas de modelización según las necesidades de nuestros alumnos.

El modelo de área en la historia del álgebra

Es aceptado por numerosos autores que estudiar la historia de un concepto es una buena forma de enseñar ese concepto. En relación a esto, Santiago Fernández Fernández[3] destaca que en las orientaciones didácticas de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria española), se mencionan como aspectos destacables de la utilización de la historia de la matemática:

---

herramienta para la didáctica de la matemática. *Rev. del Comité Interamericano de Educación Matemática.. México*

[3] Fernández Fernández, Santiago; La historia de las matemáticas en el aula en *UNO. Revista de Didáctica de las matemáticas*. Barcelona. 2001. GRAO. pp. 9-10.

- proporcionar contextos apropiados para introducir o afianzar determinados contenidos;
- permitir que los alumnos perciban la evolución temporal de las matemáticas;
- informar sobre cuáles han sido los modos de razonamiento matemático en el transcurso del tiempo, qué conceptos son difíciles, cuáles han servido para afianzar teorías, etc.

También allí se puntualiza que el estudio y el uso de la historia de la matemática deben estar al servicio de la enseñanza y no ser un fin en sí mismo.

La presentación de las matemáticas en el aula se puede realizar a partir de distintos temas: evolución de los principales conceptos matemáticos; surgimiento de las distintas ramas de la matemática (álgebra, geometría, estadística, etc.); los matemáticos más destacados en la historia de la matemática; la evolución y resolución de determinados problemas matemáticos, entre otros.

En relación con la temática de este documento Luis Puig (1997), en su artículo *Análisis Fenomenológico*, expresa que:

> "El álgebra moderna organiza fenómenos que tienen que ver con las propiedades estructurales de conjuntos de objetos arbitrarios en los que hay definidas operaciones. Esas propiedades y esos objetos provienen de la objetivación de medios de organización de otros fenómenos de nivel más bajo y son el producto de una larga historia con sucesivos ascensos de nivel.
> Una manera de recorrer la historia consiste en situarse en el siglo IX en el momento en que al-Khwarizmi escribe el Libro conciso de *al-jabr* y *almuqabala* y tomar ese acontecimiento como nacimiento del álgebra en tanto disciplina claramente identificada entre las matemáticas."[4]

Breve historia del álgebra

Remontarse a la historia del álgebra implica remontarse al concepto de número. Éste era percibido en la antigüedad como una propiedad inseparable de una colección de objetos. Más tarde aparecen las operaciones entre números, y problemas cada vez más complejos.
Antes de la aparición de los símbolos de los números y las fórmulas todo era expresado con palabras. El período comprendido entre 1700 a. de C. y 1700 d. de C. se caracterizó por la invención de los símbolos y la resolución de ecuaciones.

Los egipcios dejaron muchos problemas de tipo aritmético referidos a la vida diaria, en papiros como los de Rhind (1600 a. de C.) y Moscú (1800 a. de C.), como también algunos de tipo algebraico que no se referían a objetos concretos. Ecuaciones del tipo
$x + ax = b$, ó $x + ax + bx = 0$, eran resueltas por los egipcios por el método de la falsa posición o "regula falsi".[5]

---

[4] Puig, Luis; Análisis fenomenológico, en *La Educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE. Universidad de Barcelona. Rico y otros (Coord.) 1997. Editorial Norsori. p.87.
[5] Este método consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probar con él y si se verifica la igualdad ya se tiene la solución, si no, mediante reiterados cálculos se obtiene la solución exacta (Socas, p.46).

Los babilonios trabajaron principalmente en sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado. La necesidad de resolver problemas prácticos relacionados con la agrimensura y el comercio los llevó a desarrollar métodos para medir y contar. En las tablillas babilónicas se encontraron tablas de raíces cuadradas y cúbicas y enunciados y soluciones de problemas algebraicos, algunos de los cuales equivalen a ecuaciones cuadráticas.
La mayor cantidad de documentos de los babilonios corresponde al período 600 a. de C.- 300 d. de C. En ellos se encontraron soluciones aproximadas de ecuaciones determinadas usando fórmulas del tipo

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \text{y} \qquad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Aunque los griegos se dedicaron más a la geometría, hay interesantes aportes por parte de algunos de ellos, como Pitágoras o Euclides, a conceptos algebraicos.

Con Pitágoras (~ 580 – 520 a. C.) se concibe el primer proyecto de matematizar fenómenos naturales. Los pitagóricos crearon un método de Cálculo Geométrico General conocido como *Álgebra Geométrica*, como vía alternativa para la extensión del dominio numérico de los racionales. La imposibilidad de expresar la diagonal del cuadrado como múltiplo de sus lados los indujo a pensar que hay más segmentos que números.[6] (Pijeira Cabrera, s. f.).

La suma de números era expresada como adición de segmentos y la multiplicación como área de rectángulos de lados a y b, en tanto que la resolución de ecuaciones cuadráticas fue vista como problema de anexar áreas y las identidades algebraicas como conjunto de posiciones geométricas.

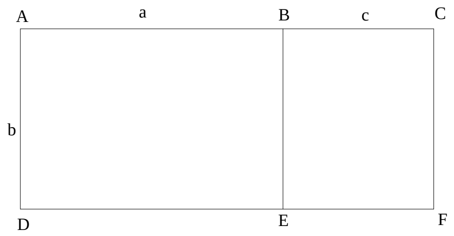
En el libro II de *Los Elementos* de Euclides (300 a. de C.) hay 14 proposiciones para resolver problemas algebraicos con métodos geométricos y los griegos resolvían ecuaciones cuadráticas por medio de los procedimientos conocidos como de "aplicación de áreas", basándose en las mismas (Socas Robaina y otros, 1989).

Por ejemplo, es posible probar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma a partir de la Proposición 1 de los Elementos que expresa:

> "Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores".[7]

---

[6].Pijeira Cabrera, Héctor E.; *Matemáticas: La Época Dorada (600 a.C. – 415 d. C.). El Aporte Científico y Metodológico de los Sabios de la Grecia Antigua*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Matanzas, Cuba, p. 6.
[7] En Socas Robaina y otros; *Iniciación al álgebra*. Madrid. Editorial Síntesis. 1989. p. 42.



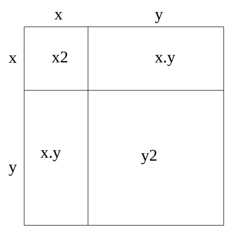
AD . AC = AD . AB + AD . BC

b . (a + c) = b . a + b . c

En tanto, la proposición 4 nos permite verificar la expresión

$$(x + y)^2 + = x^2 + y^2 + 2\ x.y$$

> "Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos." [8]



(x + y)2 = x2 + y2 + 2 x. y

Diofanto de Alejandría (200-284) perfeccionó el aparato aritmético algebraico. Hasta el siglo III las operaciones se describían con palabras. Él hizo evolucionar el álgebra expresada en lenguaje común, conocida como retórica, hacia un álgebra sincopada, utilizando palabras y símbolos, respetando las reglas de la sintaxis gramatical. Se aproximaba así, a nuestros actuales símbolos algebraicos.[9]
No aparece en el texto principal de este autor, la *Aritmética*, relación entre el trabajo algebraico y la geometría griega.

El conocimiento algebraico en Arabia comienza en la segunda mitad del siglo IX a partir de la obra de al-Khuwarizmi (790-850), mientras que en Europa el inicio de este conocimiento se remonta al siglo XII.

Al-Khwarizmi, siendo alumno de la Casa de la Sabiduría de Bagdag, realizó tareas que incluían la traducción de manuscritos científicos griegos y estudios sobre álgebra, geometría y astronomía. Escribió un texto sobre álgebra y un tratado sobre astronomía. El tratado de álgebra *Hisab al-jabr w'al-muqabala* fue el más famoso e importante de todos los trabajos de al-Khwarizmi. Es el título de esta obra el que nos ha dado la palabra 'álgebra' y se lo considera el primer libro escrito sobre esta rama de la matemática.

---

[8] En Socas Robaina y otros; *Iniciación al álgebra*. Madrid. Editorial Síntesis. 1989. p. 42.
[9] El álgebra moderna es totalmente simbólica con una sintaxis propia, distinta de la construcción gramatical lingüística.

Al describir el propósito de su libro dice que intentó enseñar

> "... lo que es más fácil y útil en aritmética, tal como los hombres necesitan constantemente en casos de herencias, repartos, pleitos y comercio y todos los tratos entre ellos, ó donde se necesita la medida de tierras, la excavación de canales, cálculos geométricos y otros objetos de varios tipos."[10]

Al-Khwarizmi en su libro de álgebra intentaba ser sobre todo práctico; el álgebra era introducida para resolver problemas de la vida real que eran parte del día a día en el imperio islámico de ese tiempo. En realidad, sólo la primera parte del libro es una discusión de lo que hoy reconoceríamos como álgebra. En ésta se presentan los números naturales, estableciendo "todos los tipos de números que son necesarios para los cálculos", tesoros (cuadrados), raíces y simples números (dírhams).

A continuación establece todas las combinaciones posibles de esos tipos de números, y un algoritmo para resolver cada uno de los tipos y hallar su tesoro (raíz). Cualquier problema podía ser reducido, por medio de su traducción, en términos de cuadrados, raíces y números.

Estas combinaciones dan lugar a ecuaciones lineales ó cuadráticas. Estas ecuaciones están compuestas, entonces, por números, raíces (x) y cuadrados (x^2). Vale aclarar que una particularidad de las matemáticas de al-Khwarizmi era que no utilizaba símbolos; estaba expresada totalmente con palabras.

Las combinaciones con los tres tipos de números las reducía a una de las seis formas o modelos estándar siguientes:

1) Cuadrados igual a raíces	$Ax^2 = Bx$
2) Cuadrados igual a números	$A x^2 = C$
3) Raíces igual a números	$A x = C$
4) Cuadrados y raíces iguales a números	$x^2 + B x = C$
5) Cuadrados y números iguales a raíces	$x^2 + C= B x$
6) Raíces y números iguales a cuadrados	$B x + C = x^2$

Para nosotros estos seis modelos, no son sino casos particulares de la misma ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$. Pero hay que tener en cuenta que, dado que en la antigüedad era grande el prejuicio frente a los números negativos, al-Khwarizmi evita este tipo de números, considerando sólo las soluciones positivas de las ecuaciones cuadráticas.

La reducción a las formas mencionadas se hace usando las dos operaciones de *al-jabr* y *al-muqabala*. Aquí, 'al-jabr' significa 'completar' y es el proceso de eliminar términos negativos de una ecuación. En uno de los ejemplos del propio al-Khwarizmi, la operación 'al-jabr' transforma

$$x^2 = 40x - 4x^2 \quad \text{en} \quad 5x^2 = 40x.$$

---

[10] F Rosen (trs.), Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi : *Algebra* (London, 1831). Tomado del artículo *Biografía de Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi*, de J. J. O' Connor y E. F. Robertson. Traductor: José Manuel García Estevez. MacTutor History of Mathematics Archive. p. 2.

El término 'al-muqabala' significa 'equilibrar' y es el proceso de reducir los términos positivos de la misma potencia cuando se dan a ambos lados de una ecuación. Por ejemplo, dos aplicaciones de 'al-muqabala' reducen

$$50 + 3x + x^2 = 29 + 10x \quad a \quad 21 + x^2 = 7x.$$

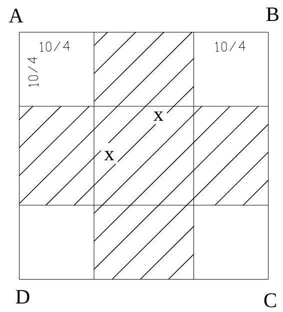
aplicándose primero a números y luego a raíces.

A partir de estas operaciones al-Khwarizmi demostró cómo resolver los seis tipos de ecuaciones. Para esto usó métodos de solución tanto algebraicos como geométricos. Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$ escribe:

> “...un cuadrado y 10 raíces son igual a 39 unidades. La cuestión, por tanto, en este tipo de ecuación, es la que sigue: ¿cuál es el cuadrado que combinado con diez de sus raíces dará una suma total de 39? La manera de resolver este tipo de ecuación es tomar una mitad de las raíces mencionadas. Las raíces en el problema que vimos eran 10. Por tanto tomamos 5, que multiplicado por sí mismo da 25, una cantidad a la que sumamos 39, dando 64. Habiendo tomado después la raíz cuadrada de éste, que es 8, le restamos la mitad de las raíces, 5, quedando 3. El número tres por tanto representa una raíz de este cuadrado, que él mismo es, naturalmente, 9. Nueve por tanto da el cuadrado.”[11]

La prueba geométrica utilizada por al-Khwarizmi consistía en el completamiento del cuadrado (modelo 4).

Comienza con un cuadrado de lado x, que representa x^2. A este cuadrado, le suma el equivalente a un rectángulo 10.x y lo hace sumando cuatro rectángulos, cada uno de una anchura de 10/4 y longitud x. La zona rayada tiene un área de $x^2 + 4. (10/4.x)$, que es igual a 39. Ahora completamos el cuadrado sumando los cuatro pequeños cuadrados, cada uno de un área de $5/2 \times 5/2 = 25/4$. De aquí que el cuadrado exterior tiene un área de $4\times 25/4 + 39 = 25 + 39 = 64$. El lado del cuadrado es por tanto 8.
Pero el lado tiene una longitud de $5/2 + x + 5/2$, o sea, $x + 5 = 8$, resultando que $x = 3$.



Pareciera que al usar soluciones geométricas al-Khwarizmi estaba familiarizado con la geometría griega. Se supone que pudo haberlo estado ya que siendo joven, su compañero al-Hajjaj, de la Casa de la Sabiduría, había traducido los Elementos de Euclides al árabe.

[11] F. Rosen (trs.), Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi: Algebra (London, 1831).

Aunque no hay mayores indicios del conocimiento de al-Khwarizmi sobre la obra de Diofanto, se considera al *Álgebra*, como la transición entre los trabajos de Diofanto y los de matemáticos italianos del Renacimiento como Nicolás de Cusa, Regiomontano y Luca Pacioli, entre otros.

Las seis formas de ecuaciones (lineales y cuadráticas) de al-Khwarizmi

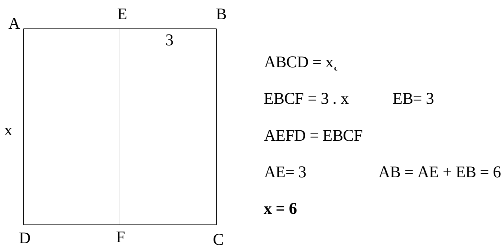
El método geométrico de al-Khwarizmi para resolver ecuaciones cuadráticas consiste en considerar que tanto la variable como la constante son lados de rectángulos. La multiplicación de variable por variable, variable por número o número por número, es considerada como un área. Para la resolución de las ecuaciones se parte de un cuadrado, anexando o restando áreas según corresponda. Es importante cómo se disponen esas áreas.

A continuación se desarrollan las posibles soluciones de las seis formas o modelos de ecuaciones propuestas por al- Khwarizmi.

1- Cuadrados iguales a raíces ($Ax^2 = Bx$)

Por ejemplo, sea $x^2 = 6x$

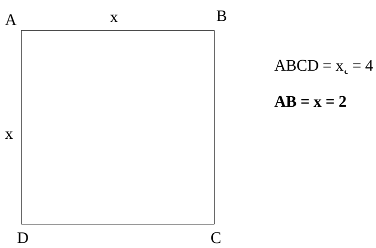
Dado que $x^2 = 6x$, se puede escribir como $x . x = 3 . x + 3 . x$. Esto asegura que el área del cuadrado puede expresarse como la suma de las áreas de dos rectángulos iguales.
Se parte de un cuadrado de lado x y en él se consideran dos rectángulos de lados 3 y x.



2- Cuadrados iguales a números ($A x^2 = C$)

Por ejemplo, sea $x^2 = 4$

Como $x^2 = 4$ se puede expresar como $x . x = 2 . 2$, se parte de un cuadrado de lado x. El problema se reduce a encontrar el lado del cuadrado cuya área sea 4.

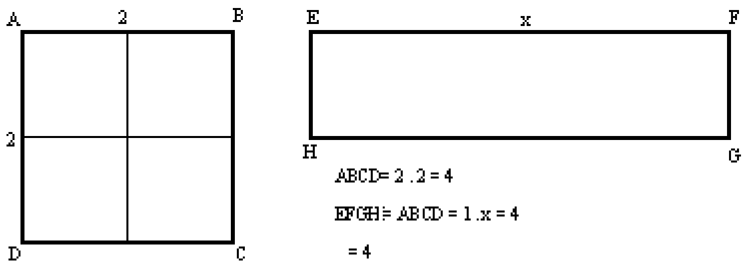


3- Raíces iguales a números (A x = C)

Por ejemplo, sea x = 4 donde A vale 1

x = 4, se puede expresar como 1 . x = 2 . 2

a) Una solución posible es trabajar con rectángulos equivalentes. Se parte de un cuadrado de lado 2 y sabiendo que su área debe ser igual a la de un rectángulo con un lado igual a 1, se encuentra la medida del otro lado, tal que el área sea 4.



Nota: Las ecuaciones del tipo A x = C, se podrían resolver también, operando con longitudes en vez de áreas. En este caso A x = C quedaría expresado como:

$$\underbrace{x + x + x + x + \ldots\ldots\ldots + x}_{A.x} = C$$

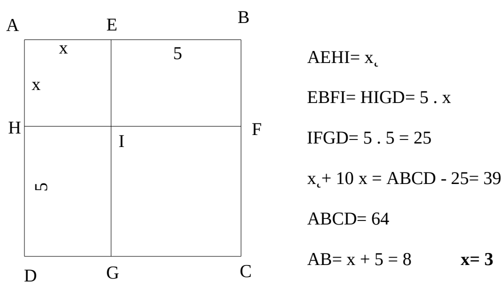
La pregunta que resuelve el problema así enfocado es: ¿Qué longitud debe tener el segmento x, para que sumado A veces, dé un segmento de longitud C?.

4- Cuadrados y raíces iguales a números (x^2 + B x = C)

Por ejemplo, sea **$x^2 + 10x = 39$**

La solución dada por al- Khwarizmi de esta ecuación ya fue presentada en el apartado anterior. A continuación se presenta otra solución posible.

Dado que $x^2 + 10x = 39$ se puede expresar como x . x + 5 . x + 5 . x = 39, podemos partir de un cuadrado de lado x (AEHI) al que se anexan los rectángulos de lados 5.x (EBFI y HIGD) y se completa el cuadrado ABCD.

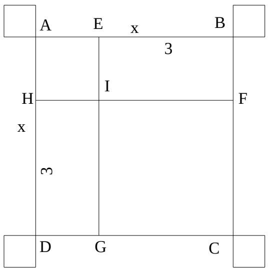


5- Cuadrados y números iguales a raíces (x^2 + C= B . x)

Por ejemplo, sea $x^2 + 5 = 6\ x$

$x^2 + 5 = 6$ x, se puede expresar como x . x + 4 . 5/4 = 3 . x + 3 . x

Se parte de un cuadrado de lado x (ABCD) y se consideran los rectángulos de lados 3 y x (EBCG y HFCD) que se interceptan en un cuadrado de área 3 . 3 dado que IF = IG = 3 Se anexan entonces, cuatro cuadrados de área 5/4.



ABCD = x^2

EBCG = HFCD = 3 . x

IFCG= 3 . 3= 9

AEIH + 4 . 5/4 = 9

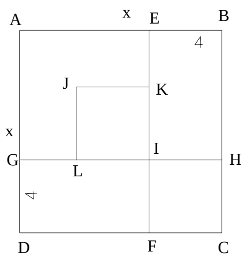
AEIH= 4

AE = 2 **AB= x = AE + EB = 2 + 3 = 5**

6- Raíces y números iguales a cuadrados ($B \cdot x + C = x^2$)

Por ejemplo, sea $8x + 20 = x^2$

$8x + 20 = x^2$, se puede expresar como x . x = 4 . x + 4 . x + 20.
Se parte de un cuadrado de lado x (ABCD) y se consideran los rectángulos de lados 4 y x (EBCF y GHCD).



ABCD = x^2

EBCF = GHCD = 4 . x

IHCF= JKIL= 4 . 4

DGLJKI = 4 . x

ABCD= EBFC + GIDF + JKIL + AEKJLG

AEIG = AEKJLG + JKIL = 20 + 16 = 36

AE = AG = 6 **x= AE + EB = 6 + 4 = 10**

Se puede ver otra solución en Socas Robaina (1989, pág. 24).

Cierre

Gandz (1932) da esta opinión del álgebra de Al-Khwarizmi:

> "El álgebra de al-Khwarizmi es reconocida como el fundamento y la piedra angular de las ciencias. En cierto sentido, al-Khwarizmi debería ser llamado 'el padre del álgebra', y no Diofanto, porque al-Khwarizmi es el primero en enseñar álgebra de una manera elemental y por sí misma. Diofanto está preocupado más que nada con la teoría de los números."[12]
>
> Esto nos lleva a reflexionar si como docentes, y conociendo las dificultades de nuestros alumnos para el tratamiento de identidades y ecuaciones algebraicas, no sería bueno

[12] S. Gandz (ed.), The geometry of al-Khwarizmi (Berlin, 1932). Tomado del artículo *Biografía de Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi*, de J. J. O' Connor y E. F. Robertson. Traductor: José Manuel García Estevez. MacTutor History of Mathematics Archive. p. 4.

comenzar su enseñanza de una “manera elemental”, al modo de al-Khwarizmi, con los aportes que hasta aquí mencionamos, desarrollando la posibilidad de un trabajo simultáneo en dos marcos, geométrico y algebraico, e incorporando el modelo de área bajo distintas representaciones. Sabemos que la modelización material y gráfica tiene sus limitaciones, pero justamente resulta interesante que los mismos alumnos las descubran y reconozcan la potencialidad del lenguaje del álgebra para sortearlas.

BIBLIOGRAFÍA

- Bruner J., *Toward a theory of instruction*. Cambridge, Mss. Harvardt University. 1966
- Dienes, Z.; Conceptos algebraicos. Cap. 4 en *La construcción de las matemáticas*. Ed. Vicens-Vives. Barcelona. Págs 60 a 90. 1970.
- Dienes, Z.; *El aprendizaje de las matemáticas*. Ed. Angel Estrada y Cía. S. A. S. Argentina; Dienes y Golding. 1971
- Fernández Fernández, Santiago; La historia de las matemáticas en el aula en *UNO. Revista de Didáctica de las matemáticas*. Barcelona. GRAO. 2001.
- Freudenthal, H.; *Revisiting Mathematics Education*. Ed. Kluwer Academic Publishers. London. 1991.
- Gandz, S. (ed.); *The geometry of al-Khwarizmi*. Berlin. 1932.
- Gravemeijer K.; Mediating between concrete and abstract. En *Developing realistic mathematics education*. Cap. 3, pág. 77 a 105. 1994.
- O' Connor, J. J. y Robertson, E. F.; *Biografía de Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizm.* Tr. José Manuel García Estevez. MacTutor History of Mathematics Archive.
- Pijeira Cabrera, Héctor E.; *Matemáticas: La Época Dorada (600 a.C. – 415 d. C.). El Aporte Científico y Metodológico de los Sabios de la Grecia Antigua*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Matanzas, Cuba.
- Puig, Luis; Análisis fenomenológico, en *La Educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE. Universidad de Barcelona. Rico y otros (Coord.) Editorial Norsori. 1997.
- Puig, Luis; *Componentes de una historia del álgebra. El texto de al- Khwarizmi restaurado*. Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València
- Rashed, R.; *The development of Arabic mathematics: between arithmetic and algebra* . London. 1994.
- Resnick L. y Ford W.; *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos.* Paidós. 1990.
- Rosen, F. (trs.); *Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi : Algebra*. London. 1831.
- Socas Robaina y otros; *Iniciación al álgebra*. Madrid. Editorial Síntesis. 1989.