APILADOS DE NARANJAS

Autora: Ana Ma. Bressan

En las verdulerías se suelen ver distintos apilados de frutas o verduras que llaman la atención. ¿Qué conoce el verdulero para lograr tales apilamientos? La experiencia le dice cómo hacerlo de modo que no caiga la mercadería. Observemos, por ejemplo, el apilado más llamativo que es el de las naranjas, manzanas o frutos aproximadamente esféricos.

1) Prueba a distribuir las naranjas (o esferas cualesquiera) para que te quede una pirámide como la de la foto, pero terminada, es decir que tenga como cúspide 1 naranja solamente. Te ayuda observar la base
2) Si quieres anticipar cuántas naranjas (esferas) necesitas para hacer pirámides de 3 ó 5 pisos, ¿cómo lo harías?
3) ¿Cuántas naranjas necesitas para completar la pirámide de la foto?
4) Ahora trata de apilar las naranjas de modo que la base sea un triángulo equilátero. ¿Qué forma has obtenido?
5) ¿Podrías calcular cuántas naranjas completan una pirámide triangular cuyo triángulo de la base tiene 3, 5 o 9 naranjas de lado?
6) **¿Cuántas esferas (o cuántas naranjas) tendremos si tenemos "n" capas (o "n" pisos) de esferas para un arreglo de base cuadrada y uno de base triangular?**

Soluciones

Una torre de esferas (o de naranjas) puede hacerse básicamente de dos modos diferentes.

a) Que cada esfera se encuentre apoyada sobre cuatro esferas (figura 3 y 4). Le vamos a llamar **caso cuadrado**.
b) Que cada esfera se encuentre apoyada sobre tres esferas (figura 1 y 2). Le vamos a llamar **caso triangular**.

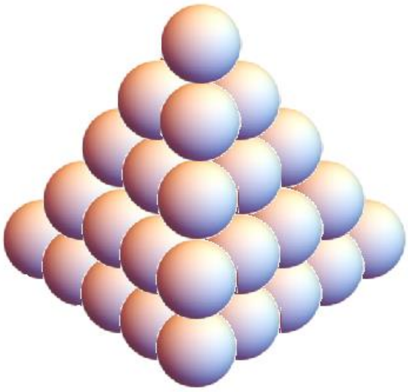

Figura 1

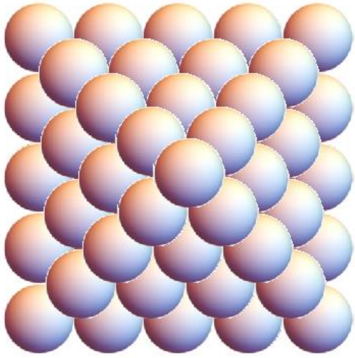

Figura 2

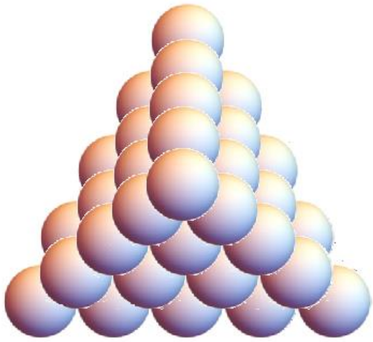

Figura 3

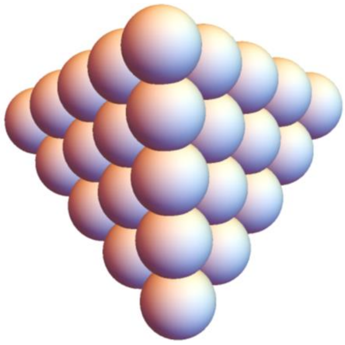

Figura 4

Respuestas:

<u>Para el caso cuadrado</u>

Si el cuadrado tiene 3 esferas de lado, la base tendrá 9, la siguiente capa 4 y la restante 1. Total: 14 esferas

Si tiene 5 esferas de lado, tendrá 25 en la base y 16, 9, 4 y 1 en las capas siguientes. Total: 55 esferas

Para n capas, tendremos para el caso **<u>cuadrado</u>**:

- en la primera capa: $n + n + \ldots + n =$n veces $n = n^2$
- en la segunda: $(n - 1) + (n - 1) + \ldots + (n - 1) = (n - 1)^2$
- en la tercera capa: $(n - 2) + (n - 2) + \ldots + (n - 2) = (n - 2)^2$
- …
- en la anteúltima capa :… $= 2^2$

- en la última capa: 1

El total de esferas es la suma de todas las capas:

Suma = (1/6) n (n + 1) (2 n + 1) = n/6 + n^2/2 + n^3/3

<u>Para el caso triangular</u>

Si el triángulo tiene 3 esferas de lado, la base tendrá 6, en la capa siguiente 3 y en la restante 1. Total: 10 esferas

Si tiene 5 esferas de lado, tendrá 15 en la base y en las la siguientes 10, 6, 3 y 1 respectivamente. Total: 35 esferas

Para n capas, tenemos entonces que la cantidad de esferas será

- en la primera capa : 1 + 2 + … + (n – 1) + n = (1/2) n (n + 1)
- en la segunda capa : 1 + 2 + … + (n – 2) + (n – 1) = (1/2) (n – 1) n
- en la tercera capa: 1 + 2 + …+ (n – 3) + (n – 2) = (1/2) (n – 2) (n – 1)
- …
- en la anteúltima capa: …= 3
- en la última capa: 1

El total de la suma de todas las capas es:

Suma = (1/6) n (n + 1) (n + 2) = n/3 + n^2/2 + n^3/6

¿Qué observas entre las fórmulas de suma en ambos casos?

Vale la pena destacar cuán parecidas son las sumas en uno y otro caso.

Nota: Estos arreglos triangulares o cuadrados de objetos son de especial interés en el campo de la física porque los átomos de los cristales se ordenan conforme a estructuras con gran simetría, y entre la gran cantidad de diferentes arreglos se encuentran los dos que hemos visto. La que hemos llamado triangular se la conoce como **"hexagonal compacto"** y es el ordenamiento de los átomos de berilio, magnesio, escandio, titanio, itrio, cobalto, zinc, zirconio, tecnecio, rubidio, cadmio, lantano, hafnio, renio, osmio y talio. La cuadrada se llama técnicamente como **estructura "cúbica centrada en el cuerpo"** es el arreglo que muestran los cristales de los elementos alcalinos (litio, sodio, potasio, rubidio, cesio y francio) y los metales bario, radio, vanadio, niobio, tantalio, cromo, molibdeno, wolframio y el hierro en el estado alfa.

Para saber más:

https://www.investigacionyciencia.es/blogs/matematicas/66/posts/apilando-naranjas-12705