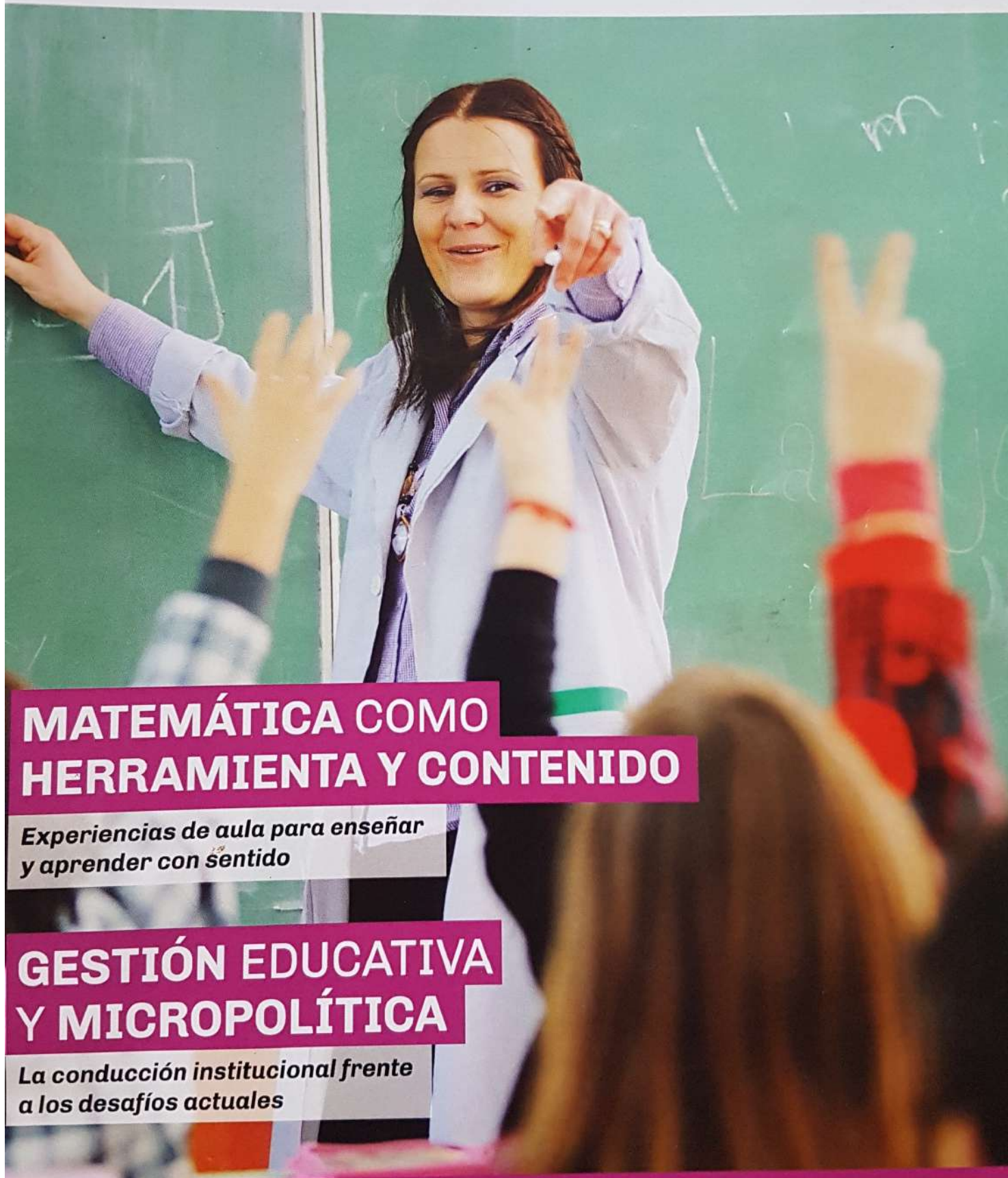




NOVEDADES EDUCATIVAS

MARZO 2017 | #315 | AÑO 29
ARGENTINA \$70 | ISSN 0328-3534
www.noveduc.com



MATEMÁTICA COMO HERRAMIENTA Y CONTENIDO

*Experiencias de aula para enseñar
y aprender con sentido*

GESTIÓN EDUCATIVA Y MICROPOLÍTICA

*La conducción institucional frente
a los desafíos actuales*

⊕ REALIDADES Y MITOS SOBRE EL EMBARAZO EN LAS ADOLESCENTES

Sucesiones: naturaleza, armonía y matemática en espiral

**ADRIANA ZITA
RABINO**
Profesora de
Matemática

Se presenta un camino para introducir el concepto de sucesiones de una manera significativa y atractiva: el reconocimiento de sucesiones aritméticas, geométricas u otras, utilizando como recursos la búsqueda de regularidades y el uso de diagramas (en este caso, espirales) como generador del proceso de matematización¹. Se trabajan así patrones de recurrencia (son aquellos que se repiten con cierta regularidad) que surgen a partir de las siguientes acciones sobre diagramas: observación, experimentación, comparación (con otros diagramas análogos), construcción y/o generalización y que dan lugar a las sucesiones; todo esto ya sea inspirados en la naturaleza, en obras de arte o en la matemática misma. Se proponen actividades sobre las espirales de Arquímedes, logarítmica, de Baravelle, pitagórica, de Dürero y de Fibonacci.

MARCO TEÓRICO

La búsqueda de regularidades numéricas permite avanzar en una formalización progresiva desde niveles informales hasta conceptualizaciones del análisis matemático, como por ejemplo, el límite de una sucesión. Se considera un contenido procedimental general y de carácter transversal respecto a todos los contenidos de la matemática como de otras disciplinas. De hecho, la ciencia se construye sobre la investigación de regularidades y sus posibilidades de investigación.

La matemática encierra en sí misma regularidades. Ellas se construyen con base en la generalización de patrones. Un ejemplo lo son las sucesiones que explican fenómenos tanto naturales como artificiales.

El descubrimiento de las leyes que rigen los patrones cumple un rol fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, vinculado estrechamente al proceso de generalización que forma parte del razonamiento inductivo.

Por otro lado, la generalización es un paso esencial en el proceso de matematización progresiva para llegar al nivel de formalización en el cual se busca conducir al alumno a procesos de justificación, conjetura y demostración (niveles de la Educación Matemática Realista).

Un patrón es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo una regla (algoritmo). Pueden ser de repetición (en donde un núcleo se repite en forma periódica) o de recurrencia (el núcleo cambia con regularidad). Dentro de los patrones de recurrencia se encuentran las sucesiones, algunas de ellas geométricas o aritméticas.

Las actividades con patrones estimulan la generación de hipótesis, su comunicación y comprobación y la refutación o confirmación de las mismas, y acerca a los alumnos al pensamiento diagramático o razonamiento diagramático.

Los diagramas (junto con la búsqueda de regularidades) juegan un rol muy importante en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Ellos constituyen un recurso esencial del razonamiento matemático.

Un diagrama es una representación externa de relaciones, construido de acuerdo a ciertas reglas y convenciones.

Existen dos concepciones distintas del concepto de diagrama: una amplia que toma como tal a cualquier tipo de inscripción que hace uso del posicionamiento espacial en 2 o 3 dimensiones; otra concepción más restringida requiere poder realizar con dichas representaciones determinadas transformaciones, construcciones y combinaciones según ciertas reglas y convenciones.

Las partes constituyentes de un diagrama pueden ser cualquier tipo de inscripción como letras, numerales, signos especiales o figuras geométricas (que es lo que se usará en este trabajo). Es importante fomentar el pensamiento geométrico como un complemento del pensamiento algebraico en la resolución de problemas.

Rivera (2011) sostiene que "con la ayuda del razonamiento diagramático, el foco cambia hacia la detección, construcción y establecimiento de regularidades y relaciones invariantes que eventualmente toman la forma de conceptos y teoremas que son en sí mismos diagramas en algún formato".

El razonamiento matemático es necesariamente diagramático.

Razonar diagramáticamente implica:

- Construir un diagrama que cumpla ciertas condiciones.
- Experimentar con (o manipular) el diagrama.
- Observar (y tomar nota de) los resultados de los experimentos.
- Probar con otros diagramas que cumplan las mismas condiciones que el inicial.
- Si se obtienen los mismos resultados, expresarlos en términos generales (generalización).

La función primordial de los diagramas es facilitar procesos de pensamiento.

Entonces en esta presentación se trabajarán diagramas utilizando distintas espirales (muchas de ellas conocidas). Al manipular sobre ellas (dibujando, comparando, conjeturando, generalizando, justificando, etc.) se espera que se construya el concepto de sucesión o serie numéricas, sus definiciones y características, y se llegue a intuir lo que sucede en el límite de una sucesión.

Se sugiere acompañar el trabajo con el uso de algún software (Geogebra o Cabrí), para optimizar los tiempos en pro del objetivo del trabajo, aprovechando el dinamismo y la posibilidad de observar muchos casos en forma simultánea, lo que facilita el camino a la conjetura y la generalización.

LA ESPIRAL DE ARQUÍMEDES

Se la conoce así ya que fue este notable físico y matemático griego el primero que, fascinado por su belleza, realizó un estudio profundo sobre las propiedades matemáticas de esta curva en el siglo III antes de Cristo.

Se la puede reconocer en la naturaleza, por ejemplo en una serpiente enrollada o en la trompa de una mariposa

(Figuras 1 y 2). La espiral más simple la podemos encontrar al mirar una cuerda enrollada sobre sí misma.



Figura 1

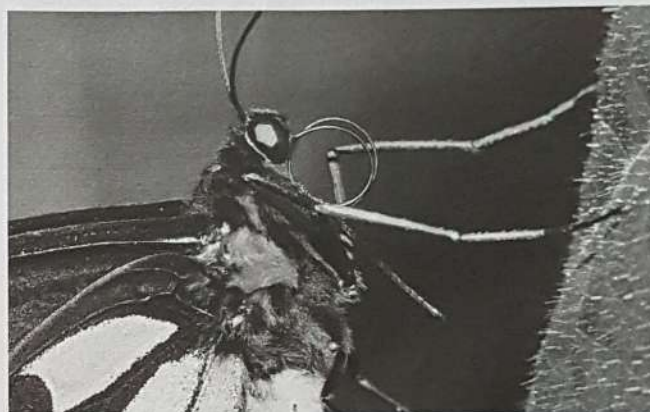


Figura 2

Al ser una espiral muy sencilla de construir hace que aparezca como motivo ornamental desde las épocas más remotas. La encontramos ya en la Edad del Bronce y en vasijas griegas y etruscas y en la cerámica popular, como motivo decorativo de muchos platos, ya que se la puede dibujar fácilmente sobre el torno del alfarero. Basta con ir desplazando el pincel en una dirección determinada, desde el centro hacia el borde, con una velocidad constante (Figura 3).

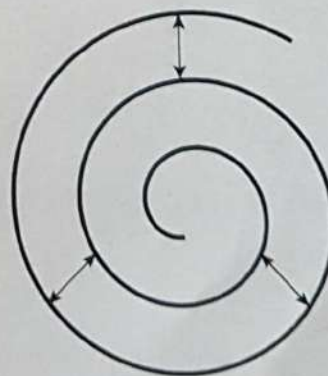


Figura 3

La espiral de Arquímedes se puede trazar dentro de una circunferencia y conforme va creciendo se va alejando un arco de otro.

Las vueltas sucesivas de la misma tienen distancias de separación constantes, o sea que si trazamos un radio desde el centro hacia afuera se podrá observar que los brazos de la espiral intersectan el radio a distancias iguales.

La espiral de Arquímedes tiene dos brazos, uno para $\theta > 0$ y otro para $\theta < 0$. Los dos brazos están discretamente conectados en el centro (Figura 4).



Figura 4

Esta espiral tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, se emplean bombas de compresión o compresores rotativos, hechos de dos espirales de Arquímedes del mismo tamaño intercaladas, para comprimir líquidos y gases.

Los surcos de los discos de vinilo (de hace muchos años pero que están de moda nuevamente) forman una espiral de Arquímedes, haciendo los surcos igualmente espaciados y maximizando el tiempo de grabación (Figura 5).

Pedirle a un paciente que dibuje una espiral de Arquí-



Figura 5

medes es una manera de cuantificar el temblor humano; esta información ayuda en el diagnóstico de enfermedades neurológicas.

Matemáticamente la espiral de Arquímedes se define como el lugar geométrico de un punto del plano que, partiendo del extremo de una semirrecta, se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira también uniformemente sobre uno de sus extremos. Es lo que se denomina una curva mecánica. Para definirla necesitamos recurrir al movimiento.

"El área barrida por el radio de la espiral en su primera revolución es la tercera parte del área del círculo cuyo radio es el radio final de esta revolución..."

"El área barrida por el radio en la segunda vuelta es 6 veces el área de la primera vuelta".

"El área barrida en la segunda revolución está en razón 7/12 con el círculo cuyo radio es la posición final del radio vector" (conclusiones de Arquímedes).

Arquímedes va mucho más allá y demuestra que las áreas de los sucesivos anillos vienen dada por esta fórmula

$$R_{n+1} = \frac{n}{n-1} R_n$$

donde R_n es el área barrida en la vuelta n . De esta manera se forma una sucesión que está definida por *recurrencia*, ya que cada término se define en base al anterior, por lo tanto, conociendo el primer elemento, se pueden conocer los restantes. ¿Por qué decimos que aparece una sucesión aritmética?

En la Figura 6, en los sectores circulares que se van generando, los radios de los mismos están en progresión aritmética. Al responder a la definición de esta espiral, crecen un valor constante de cada uno al consecutivo (como se puede ver en la imagen, a cada radio se le suma el mismo segmento para obtener el radio del sector siguiente).

Conociendo el primer término a_1 y la diferencia d , se puede calcular el n -ésimo término de la progresión mediante

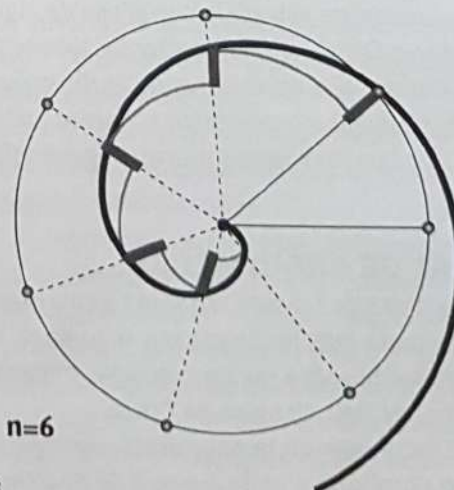


Figura 6

sustitución sucesiva en la relación de recurrencia, obteniendo así la fórmula general:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Supongamos esta situación:

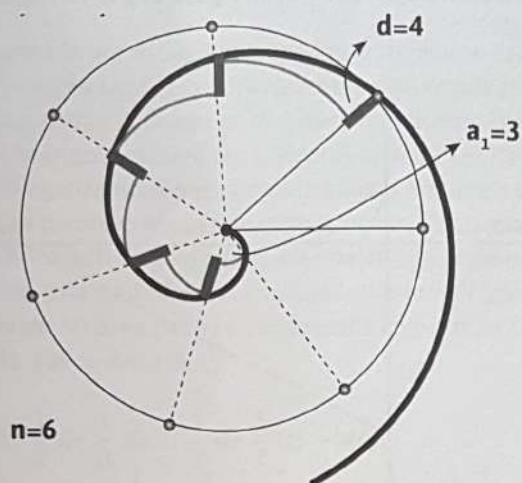


Figura 7

la sucesión que se va formando con las longitudes de los radios a medida que crece la espiral es:

3+4, 3+4.2, 3+4.3, 3+4.4,...

7, 11, 15, 19, 23, ...

LA ESPIRAL LOGARÍTMICA

Se puede pensar como una curva de vida ya que aparece en la forma de los caparazones de los animales de mar (como el Nautilus), en los cuernos de ciertos animales, en los brazos de las galaxias espirales (como la nuestra, la Vía Láctea), en los brazos de los ciclones tropicales, en las telas de araña (véanse Figuras 8 a 12).

Por ejemplo, cuando un cuerno crece más rápido del lado externo que del interno, se forma una espiral logarítmica



Figura 8



Figura 9



Figura 10



Figura 11



Figura 12

Se encuentran otros ejemplos en la naturaleza. Por ejemplo, el halcón se aproxima a su presa según una espiral logarítmica: su mejor visión está en ángulo con su dirección de vuelo. Los insectos se aproximan a las luces artificiales según una espiral aproximadamente logarítmica, porque están acostumbrados a volar con un ángulo constante a las fuentes luminosas.

Podríamos imaginarnos bloques de madera puesto uno en contacto con el otro pero formando un cierto ángulo, de esta manera el patrón de crecimiento es helicoidal.

Una espiral logarítmica de grado 0 ($b = 0$) es una circunferencia; el caso límite es una espiral logarítmica de grado 90 ($b = 0$ o $b = \infty$) es una línea recta desde el origen.

En la espiral logarítmica las distancias entre sus brazos se incrementan en progresión geométrica (o sea multiplicados por un factor).

Cómo se construye (véase Figura 13):

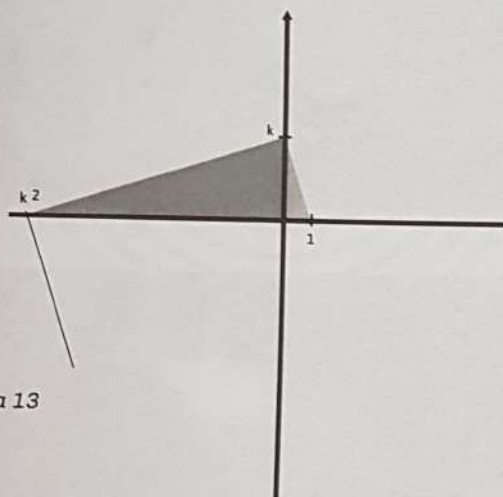


Figura 13

Ubicar la unidad 1 en el rayo correspondiente a 0° de un sistema de ejes de coordenadas polares (o en el semieje positivo de abscisas en coordenadas cartesianas), y ubicar un número cualquiera k en el rayo correspondiente a 90° (semieje positivo de ordenadas). Crear un triángulo (rectángulo) uniendo 1 con k . Desde el vértice k trazar una línea perpendicular hasta que intersecte el rayo de 180° en r (o semieje negativo de abscisas). Este valor r es igual a k^2 , y esto se debe a una cuestión muy sencilla: los triángulos que se van generando son rectángulos y son semejantes (se puede demostrar fácilmente que tienen sus 3 ángulos homólogos congruentes), por lo tanto sus lados correspondientes son proporcionales (de razón k). Entonces es $1/k = k/k^2$.

Unir k con k^2 . Seguir trabajando ángulos rectos desde k^2 hasta la intersección con el eje (270° o semieje negativo de ordenadas) en k^3 y así sucesivamente. La secuencia se puede seguir también hacia adentro.

El cociente entre cada nuevo vértice y el anterior es una constante, con lo cual estos elementos forman una *progresión geométrica* (a medida que se va formando la espiral).

Suponiendo $k = 2$, la sucesión sería:

$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

La fórmula general es $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$

Para nuestro ejemplo (véase Figura 14), la fórmula sería

$$a_n = 1 \cdot 2^{(n-1)}$$

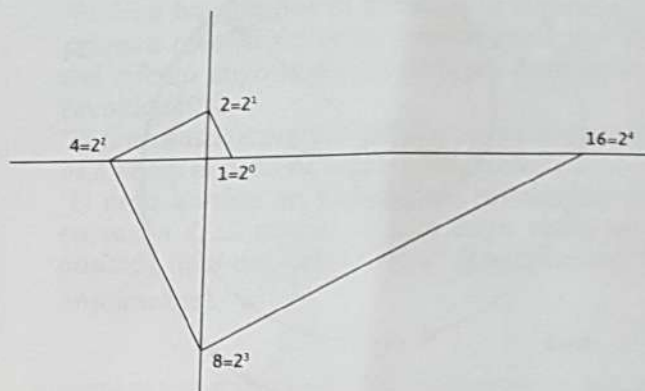


Figura 14

LA ESPIRAL DE BARAVELLE

También genera una progresión geométrica. A ver, ¿qué sugiere este diagrama? (véase Figura 15).

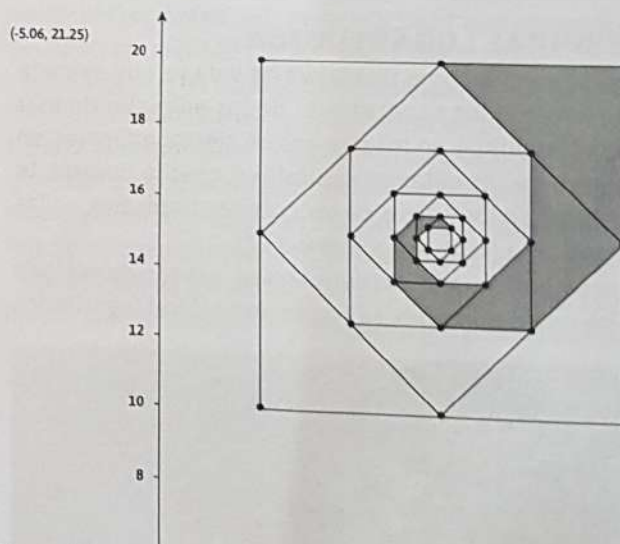


Figura 15

¿Cómo se describiría?

¿Cómo reproducirlo?

¿Pueden decir algunas cuestiones matemáticas de lo que se ve?

Este diagrama está formado por cuadrados (uno circunscrito en el siguiente) de tal manera que los vértices de

cada uno son los puntos medios de los lados del cuadrado anterior. Este proceso se puede seguir ¿hasta infinito? ¡Sí! Tanto hacia adentro (según el procedimiento descrito) o hacia afuera (haciendo cuadrados circunscritos y con las mismas condiciones).

Hay una parte sombreada. ¿Qué se puede decir de esa parte?

Está formada por triángulos isósceles rectángulos. El área de cada uno es $1/8$ del cuadrado donde está emplazado.

Además, cada cuadrado es la mitad del anterior (por lo tanto el triángulo rectángulo isósceles es $1/2$ de $1/8$ del anterior). Si analizamos en su conjunto el área pintada o sombreada, podemos crear la siguiente sucesión, relacionando el área de cada triángulo con el área del triángulo anterior, y a su vez comparándola con el cuadrado mayor (que no conocemos su área pero lo tomaremos como referencia diciendo que su área es 1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{ de } 1; \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{8} \text{ de } 1; \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{8} \text{ de } 1; \dots \dots \dots \\ = \frac{1}{8} \cdot 1; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}; \dots = \\ = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0; \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1; \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots; \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \end{aligned}$$

Es una progresión geométrica de la forma

$$a_n = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

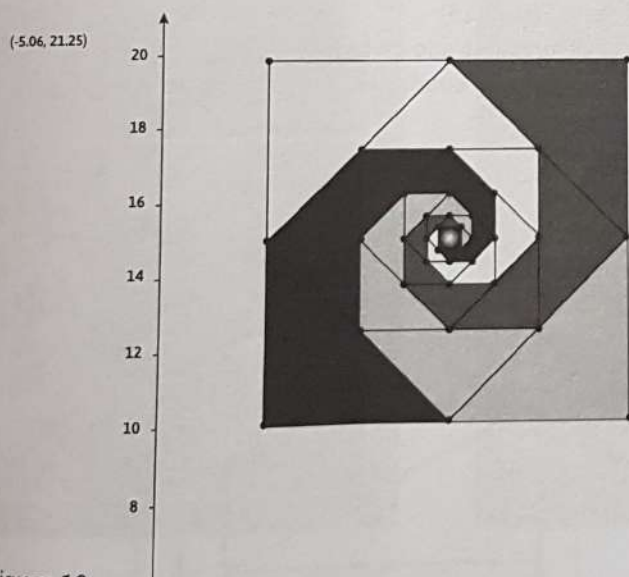


Figura 16

¿Cuántas espirales se pueden formar en el diagrama? (véase Figura 16).

Se forman cuatro espirales congruentes. Si sumamos todos los términos de esta sucesión (lo que conforma una serie geométrica de razón $1/2$ y primer término $1/8$) y multiplicamos esta serie por 4, siguiendo este procedimiento

hasta infinito, se tiene que en el límite este resultado es 1 (el área total de cuadrado original):

$$4 \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots \right] = 1$$

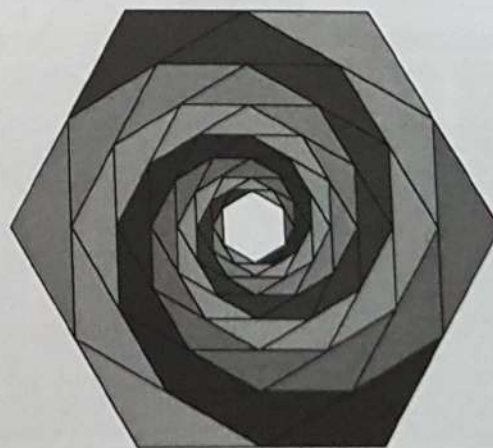
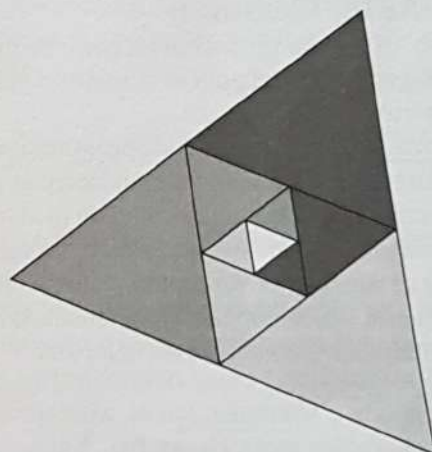
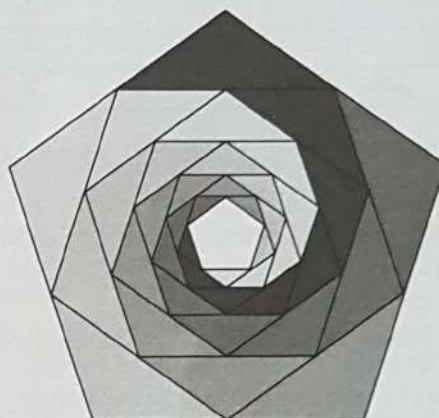


Figura 17

Se ejemplificó la espiral de Baravelle sobre una figura regular como lo es el cuadrado. La pregunta es: ¿se podrán construir estas espirales en otros polígonos regulares? ¿Cuál es la relación que hay entre las sucesiones que aparecen? (véase Figura 17).

Probemos un poco más a ver si podemos conjeturar (siempre suponemos que el área de la figura original es 1 y que son polígonos regulares. Verificar los datos de la tabla).

Lados	1° término	Razón	Espirales
3	1/4	1/4	3
4	1/8	1/2	4
5	2867/198	*	5
6	1/24	3/4	6

*La razón entre las áreas de los triángulos consecutivos no son constantes, por lo tanto no forman una sucesión geométrica.

¿Qué pasó con el pentágono?

¿Sucederá lo mismo con otros polígonos regulares?

LA ESPIRAL PITAGÓRICA (O ESPIRAL DE TEODORO)

Se denomina así porque se construye a partir de triángulos rectángulos, generando (al aplicar la relación pitagórica) ciertos números.

Se comienza a construir sobre un segmento unidad, se levanta en un extremo otro segmento unidad y se cierra un triángulo rectángulo. Sobre un extremo de la hipotenusa, se vuelve a trazar un segmento de 1 unidad en forma perpendicular y se vuelve a cerrar un triángulo rectángulo. Y así sucesivamente. ¿Cuánto miden las hipotenusas de todos esos triángulos rectángulos? (véase Figura 18).

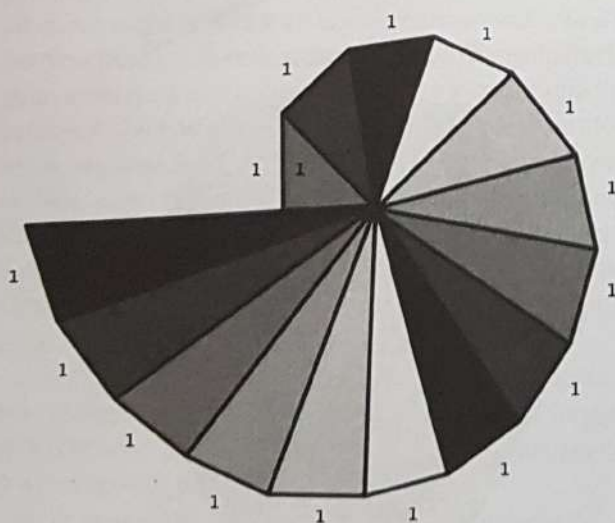


Figura 18

Con las longitudes de las hipotenusas se forma una sucesión cuyos elementos son las raíces cuadradas de los números naturales, algunos de ellos son números naturales (como por ejemplo $\sqrt{4}$) y los demás son números irracionales:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5},$$

Como se podrá comprobar, esta sucesión no es aritmética ni geométrica, ya que no es constante la diferencia entre dos términos consecutivos como tampoco lo es su cociente. ¿Qué significa esta otra sucesión?:

$$\frac{1}{2} (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5} \dots)$$

Ya que estamos con números irracionales, vamos a ver cómo se construye la espiral dorada o de Durero.

LA ESPIRAL DORADA O DE DURERO

Asimismo veamos cómo aparece el número que está involucrado en la proporción más armoniosa: la *proporción áurea*. Es importante y asombrosa, no solo por la importancia de su uso en obras de arte y arquitectónicas, sino también porque aparece en la naturaleza de diversas formas.

Esta espiral se va formando al ir construyendo rectángulos áureos, que son aquellos cuya relación entre dos lados consecutivos es el número de oro, un número irracional.

Empecemos por ver cómo se construye el rectángulo áureo (véase Figura 19).

Partir de un cuadrado de lado 1 unidad:

Se construye un cuadrado de lado unidad ABCD (línea punteada).

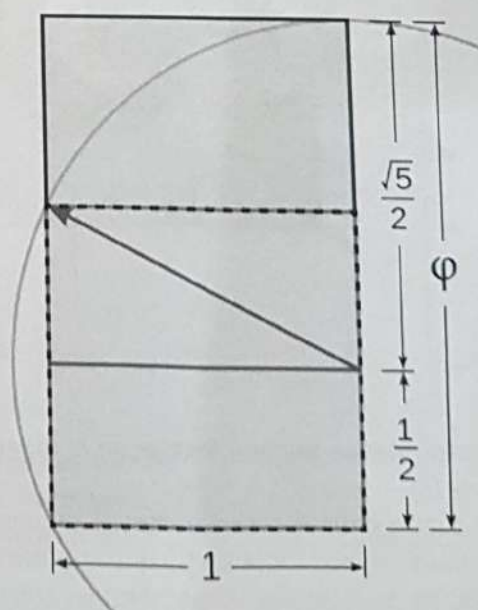


Figura 19

Trazar un segmento desde la mitad del lado del cuadrado hasta una de sus esquinas (como indica la flecha).

Empleando este segmento como radio, se coloca la punta del compás en la mitad del cuadrado y se abate hasta cortar la prolongación del lado del cuadrado.

Se completa el rectángulo.

Así, los lados del rectángulo miden 1 y $1/2 + \sqrt{5}/2$ (se deduce fácilmente este último valor aplicando el teorema de Pitágoras) y la razón entre estos dos lados es el número áureo $\phi = 1/2 + \sqrt{5}/2$. De esta manera se aprecia que el rectángulo tendrá una forma "armoniosa".

Estos dos segmentos (los lados consecutivos del rectángulo áureo) cumplen una propiedad muy interesante:

$$\frac{\text{suma de los dos segmentos}}{\text{segmento mayor}} = \frac{\text{segmento mayor}}{\text{segmento menor}} = \phi$$

Leonardo da Vinci (véanse Figuras 20 y 21), tomando como figura al ser humano, fue el autor de un canon de las proporciones, considerando el rostro femenino "matemáticamente hermoso" si la línea C de los ojos divide a la medida total AB en media y extrema proporción:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$



Figura 20

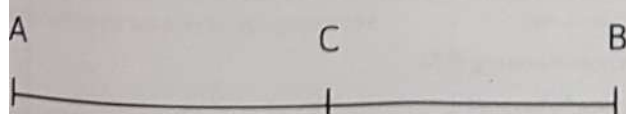
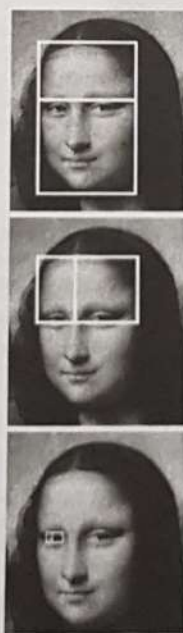


Figura 21

Construir la espiral áurea es muy sencillo (véase Figura 22):



Figura 22

Dibujar un rectángulo áureo y sobre el lado mayor dibujar un cuadrado. Se obtiene así otro rectángulo áureo. Repetir el procedimiento. Este procedimiento se puede hacer también para "adentro". En ambos casos se puede seguir hasta infinito.

Observar en la figura cómo se va creando la espiral.

Ya sabemos que la razón entre los lados de cada uno de estos rectángulos es el número ϕ por ser rectángulos áureos. Pero ¿qué relación existe entre los lados mayores de todos estos rectángulos? ¿Qué sucesión se forma?

Si empezamos por un rectángulo áureo cuyo lado menor es 1, se tiene:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}, \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}, \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}, \dots$$

¿Cuál/es (son) las regularidad/es que se encuentra/n? ¿Qué tipo de sucesión es?

Se trata de una progresión geométrica ya que la razón entre un término y el que le sigue es siempre el mismo número ϕ . La proporción áurea se encuentra en la naturaleza (por ejemplo, la oreja humana o el crecimiento de una rosa donde se observa claramente la espiral dorada) (ver Figuras 23 y 24).



Figura 23



Figura 24

Y el hombre aprovechó también esta razón armoniosa para las obras de arte o en arquitectura (¡y hasta para darle forma a las tarjetas de crédito!) (ver Figuras 25 y 26):

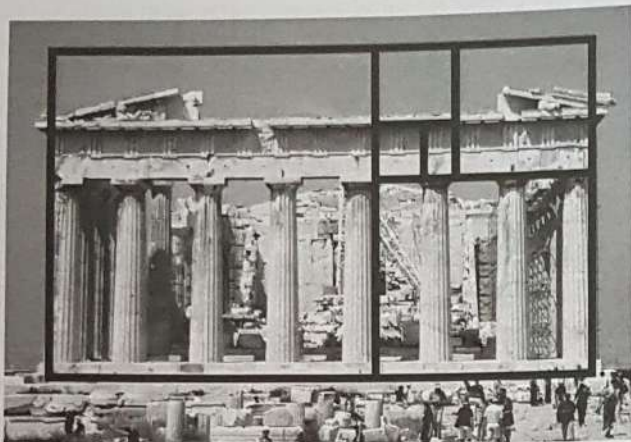


Figura 25



Figura 26

LA ESPIRAL DE FIBONACCI

Se construye de manera muy similar a la de Durero. Se comienza colocando dos cuadraditos contiguos de lado 1 unidad. Queda un rectángulo de 2×1 . Sobre el lado mayor se coloca un cuadrado (que será de lado 2), queda conformado un rectángulo cuyos lados miden 3 y 2, y así sucesivamente (ver Figuras 27 y 28).

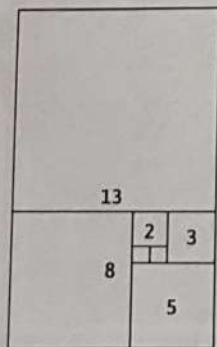


Figura 27

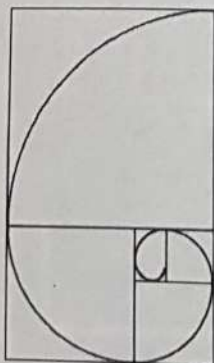


Figura 28

Luego se dibuja la espiral como indica la figura. Los lados de estos cuadrados que se van agregando miden longitudes que siguen la sucesión de Fibonacci: ¿Por qué?
Recordar: en la sucesión de Fibonacci cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

NOTA

1. Esto último se encuentra inspirado en el curso dictado por la doctora Betina Zolkower en San Carlos de Bariloche (Río Negro), en octubre de 2016 que se denominó "El diagrama como generador de procesos de matematización: ¿cómo planificar clases centradas en diagramas-problemas?".

BIBLIOGRAFÍA

- Bressan, A. y Bogisic, B. (1996). *Las regularidades. Fuente de aprendizajes matemáticos*. Desarrollo Curricular N° 3. Provincia de Río Negro. Disponible en <https://goo.gl/Hj3v3A>
- Bressan, A. y Gallego, F. (mayo, 2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. *Correo del Maestro*, 168. Disponible en <https://goo.gl/TAjYJA>
- Driscoll, M. (2007). *Fomentar el pensamiento geométrico*.
- Espiral logarítmica. Definición. Disponible en <https://goo.gl/jLH6e4>
- Godino, J. y otros (s.f). *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático*. Disponible en <https://goo.gl/zRqRrV>
- Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

RECURSOS EN LA RED

gaussianos.com
www.nrich.maths.org/6522
web.njit.edu/kappraff
www.thalescica.es