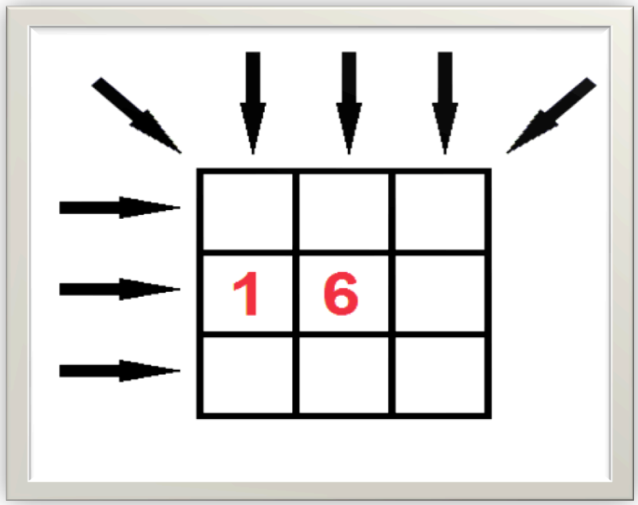
COMPLETAR UN CUADRO MÁGICO MULTIPLICATIVO[1]

Adaptación y solución a cargo de O. Bressan - GPDM

PLANTEO DEL PROBLEMA

Se tiene un cuadro de tres por tres donde nos han colocado dos números, un “1” y un “6”:



y nos piden que completemos el cuadro poniendo números naturales en todos las casillas vacías, de modo que sean iguales los productos de las filas, de las columnas y de las diagonales principales (todas se han señalado con una flecha). Todos los números que pongamos deben ser naturales y ninguno puede repetirse (incluidos el 1 y el 6).

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Para dar la solución paso a paso vamos a llamar (ver Figura 1) a las filas como:

a - b - c

y a las columnas como:

` x - y - z

---

[1] **Un cuadrado mágico de productos** fue un problema presentado en el diario El País de Madrid por Javier Cilleruelo, el 01-04-2011. Cilleruelo es profesor de la Universidad Autónoma de Madrid y miembro del Instituto Ciencias Matemáticas (ICMAT).
http://www.elpais.com/articulo/sociedad/Cuadrado/magico/productos/solucionado/elpepusoc/20110405elpepusoc_2/Tes

Esto nos permite identificar los números que van a ir en cada casilla. Por ejemplo la casilla que está en la fila “b” y la columna “x” la llamaremos: (b,x) y es el número 1. De igual modo, (b,y) es el número 6.

El producto de los tres números que haya en la fila “b” debe ser igual al producto de los tres números que haya en la columna “z”, o sea:

$$1 \times 6 \times (b,z) = (a,z) \times (b,z) \times (c,z)$$

Cancelando (b,z) de ambos miembros:

$$1 \times 6 = (a,z) \times (c,z)$$

Como todos los números son naturales y distintos nos encontramos con dos alternativas:

$(a,z) = 2$ y $(c,z) = 3$

o bien

$(a,z) = 3$ y $(c,z) = 2$

Vamos a tomar la primera alternativa y esta es la que hemos escrito en la Figura 2.

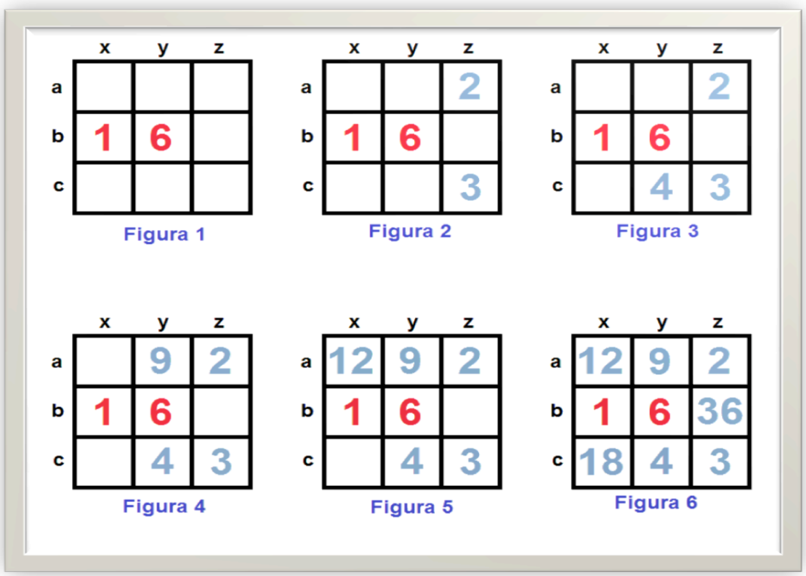


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

También se cumple que:

$$(a,z) \times (b,y) \times (c,x) = (c,x) \times (c,y) \times (c,z)$$

Reemplazando por los valores que ya conocemos y cancelando (c,x) nos queda:

$$2 \times 6 = (c,y) \times 3$$

En consecuencia (c,y) = 4, tal como hemos escrito en Figura 3.

De igual modo:

$$(a,x) \times (a,y) \times (a,z) = (a,x) \times (b,y) \times (c,z)$$

Reemplazando por los valores que ya conocemos y cancelando (a,x) nos queda:

$$(a,y) \times 2 = 6 \times 3$$

Así que (a,y) = 9, tal como hemos escrito en Figura 4.

De esta forma hemos completado la columna "y", y vemos que el producto vale:

$$9 \times 6 \times 4 = 216$$

que debe ser igual para todas las filas, columnas y diagonales. En particular, para la fila "a":

$$(a,x) \times 9 \times 2 = 216$$

Lo que implica que (a,x) = 12, lo que se escribió en la Figura 5.

De igual modo se completan los números que faltan y el resultado final es la Figura 6. Compruébese que el producto de todos los números de las filas, columnas y diagonales es igual a 216.

Si en vez de elegir (a,z) = 2 y (c,z) = 3 hubiéramos elegido (a,z) = 3 y (c,z) = 2 tendríamos también una solución equivalente que es el resultado de intercambiar la fila "a" con la fila "b", y todos los productos seguirían siendo iguales a 216. (Ver figura de abajo).

	x	y	z
a	18	4	3
b	1	6	36
c	12	9	2

El problema se puede variar tomando siempre la (b,x) = 1, y la (b,y) igual a un número que sea el producto de dos números primos distintos, como es el caso del 6 (igual a 2 × 3). Por ejemplo, podríamos haber tomado:

(b,y) = 10 (igual a 2 × 5)

(b,y) = 14 (igual a 2 × 7)

(b,y) = 15 (igual a 3 × 5)

(b,y) = 21 (igual a 3 × 7)

Conclusión: Si llamamos α a uno de esos números primos (por ejemplo, el factor 2 del número 6) y β al otro número primo (el factor 3 del 6), entonces encontramos que siempre el producto de las filas (columnas o diagonales) va a ser:

Producto = $\alpha^3 \times \beta^3$

Cuando (b,y) = 6, entonces $\alpha = 2$ y $\beta = 3$ y el producto es $2^3 \times 3^3 = 216$, como ya sabíamos.

Cuando (b,y) = 10, entonces $\alpha = 2$ y $\beta = 5$ el producto es $2^3 \times 5^3 = 1000$.

PARA GENERALIZAR, y siguiendo el mismo razonamiento numérico, si partimos de los siguientes datos (en función de **α** y de **β**):

		α
1	**α . β**	
		β

$1 \times (\boldsymbol{\alpha . \beta}) . bz = az . bz . cz$
Cancelando bz resulta: $\boldsymbol{\alpha . \beta} = az . cz$
Supongamos que **α** = az y que **β** = cz (es indistinto hacerlo en el otro orden pues no varía el resultado), comparando la segunda diagonal con la tercera fila se tiene: $\boldsymbol{\alpha} . (\boldsymbol{\alpha . \beta}) . cx = cx . cy . \boldsymbol{\beta}$
cancelando cx y **β** resulta: $\boldsymbol{\alpha}^2 = cy$.

		α
1	**α . β**	
	α^2	**β**

Comparando la primera fila con la primera diagonal se tiene:
$ax . ay . \boldsymbol{\alpha} = ax . (\boldsymbol{\alpha . \beta}) . \boldsymbol{\beta}$, cancelando ax y **β** resulta: $ay = \boldsymbol{\beta}^2$

	β^2	**α**
1	**α . β**	
	α^2	**β**

De la segunda columna **se deduce** que ay.by.cy = $\boldsymbol{\alpha^3 . \beta^3}$
Como el producto de los elementos de todas las filas, columnas y diagonales principales debe dar ese mismo resultado ($\boldsymbol{\alpha^3 . \beta^3}$) , entonces:
$bz = \boldsymbol{\alpha^2 . \beta^2}$; $ax = \boldsymbol{\alpha^2 . \beta}$; $cx = \boldsymbol{\alpha . \beta^2}$

Y así llegamos a completar el cuadrado dado para cualquier número descomponible en dos números primos distintos, **α y β, respetando el valor 1 para la casilla bx**

$\alpha^2 . \beta$	**β^2**	**α**
1	**α . β**	**$\alpha^2 . \beta^2$**
$\alpha . \beta^2$	**α^2**	**β**