De la tabla de razones a la regla de tres simple, las proporciones y la función de proporcionalidad directa

Ana Bressan

El concepto de proporcionalidad es solidario con la existencia de un valor que se mantiene constante. Este concepto permea muchos de los contenidos de la matemática correspondientes a la currícula de la educación primaria. Por ejemplo:

- los problemas de multiplicación y división con números naturales (donde se acepta sin discusión que lo que se multiplica *es un valor constante* y que cuando dividimos lo hacemos *en partes iguales,* basta analizar las tablas de estas operaciones para dar cuenta de las relaciones de aumento o decrecimiento proporcional existentes*)*;
- las fracciones como expresiones parte-todo, los porcentajes como fracciones donde el todo es 100 y los modelos con que las representamos;
- nuestro sistema numérico y el sistema métrico decimal que mantienen relaciones constantes;
- las escalas, la semejanza de figuras, la comparación de probabilidades; …

y estos son sólo algunos ejemplos donde podemos apreciar la presencia de la proporcionalidad en la misma matemática, sin detenernos a detallar sus aplicaciones en otras disciplinas como la física, la química, la economía, etc. (Consultar: Bressan A. y Bogisic B: *Una forma de uso de la proporcionalidad: las escalas.* Desarrollo Curricular Nº 2. C.P.Ed. de Río Negro. www.gpdmatematica.org.ar)

En la escuela se acostumbra a comenzar con problemas simples de multiplicación y división y seguir luego con problemas de *regla de tres* (sin hacer notar su vinculación con los anteriores).

Problema de multiplicación: se conoce el valor para una unidad y se pregunta por el valor de un número determinado de las mismas.

Ejemplo: *La entrada sale $3,50, fueron 35 niños. ¿Cuánto se recaudó?*

Problema de división: se conoce el valor para varias unidades y se desea conocer el valor de una.

Ejemplo: *Van a salir de excursión los 36 varones de tercer grado de mi escuela. En cada carpa caben 4. ¿Cuántas carpas deberemos llevar?*

Problema de regla de tres: se conoce el valor para un número determinado de unidades y se desea conocer el valor para otro número diferente de unidades. Estos problemas combinan la multiplicación y la división.

Ejemplo: *Sé que con 32 frascos de dulce completo 8 cajas para regalo. Pienso armar 15 cajas. ¿Cuántos frascos necesito?*

En los grados superiores se suelen tratar la función de proporcionalidad directa (apareciendo las tablas de razones generalmente en posición vertical) y las proporciones, y muchas veces éstas últimas, en contextos numéricos puros y sin conexión con la anterior.

En este documento nos proponemos vincular el modelo de la tabla de razones con los modelos de la regla de tres simple, de las proporciones y de la función lineal, facilitando así que los alumnos deduzcan las propiedades de las tres últimas a partir de la primera.

"La idea básica detrás de la tabla de razones es que se pueden generar razones equivalentes por manipulaciones sucesivas de los números hasta que se llega a la razón que se adecua mejor a una situación concreta" (Middleton y van den Heuvel-Panhuizen, *La tabla de razones*, 1995)[1].

Tanto en su versión horizontal (la que proponemos introducir primeramente y desde tercer grado) como vertical, las tablas resultan ayudas eficaces para que los alumnos organicen datos en problemas multiplicativos (los que incluyen la multiplicación y la división) y calculen mentalmente las respuestas, utilizando de manera informal las propiedades de la proporcionalidad.[2]

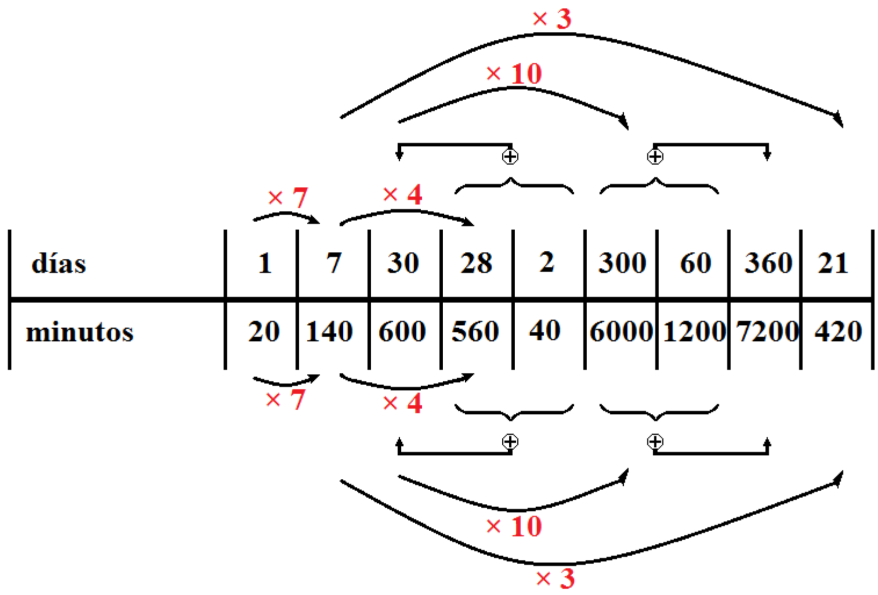
Iniciado el uso de las tablas en problemas de proporcionalidad directa como herramientas flexibles de cálculo, la reflexión sobre los resultados y estrategias de completamiento las tornarán progresivamente en un modelo mental que ayude a los alumnos a razonar proporcionalmente con corrección y a tomar conciencia de las propiedades de esta relación, para poderla expresar en los ciclos superiores con un lenguaje verbal correcto y llegar a su expresión simbólica y al cálculo formalizado.

Consideremos el siguiente problema*: Me he propuesto hacer 20 minutos de ejercicio físico diarios. ¿Cuántos minutos de mi tiempo emplearé en ello en una semana? ¿Y en un mes? ¿Y en año?*
No soy muy constante y no suelo durar más que tres semanas en mis propósitos de vida saludable. ¿Cuántos minutos habré empleado en ejercitarme en ese caso?

Organicemos los números en una tabla y operemos sobre ellos para obtener las respuestas buscadas (existen múltiples maneras de llegar a esas respuestas, solo damos un ejemplo):

[1] La tabla de razones consiste en un esquema de filas y columnas que definen casilleros para colocar, en ellos, los números que son datos y las respuestas. Las filas se etiquetan indicándose el significado de los números y, si es necesario, también las unidades que se utilizan. El orden es indistinto en cuanto a qué se coloca en cada una de las filas.

[2] Resulta interesante ver cómo los niños resuelven problemas de división con la tabla acudiendo a la multiplicación, lo que permite que el maestro los oriente a reflexionar sobre la relación entre ambas operaciones.



De la tabla a la regla de tres

Si nuestro problema hubiese sido, por ejemplo: *En una semana empleo 140 minutos en ejercicios, ¿cuántos minutos emplearé en 30 días?*, reconoceríamos un clásico problema de *regla de tres simple*, el que resolveríamos en la forma más tradicional de la siguiente manera:

7 días -------------- 140 min

1 día-------------- 140 min/ 7

30 días-------------- (140 min/7 días) x 30 días = 600 min

¿Dónde se aprecia este razonamiento en la tabla de razones?

Puedo usar operadores escalares (sobre valores de una misma magnitud):

días	7	1 (7:7)	30 (1 x 30)
minutos	140	140 : 7 =	(140 : 7) x 30 = 600

O bien, puedo usar razones entre ambas magnitudes pensando en lo escrito en la tabla: Si a 7 días le corresponden 140 minutos, a 1 día le corresponden 20 minutos (140 minutos:7 días), o sea haré 20 minutos/día y a 30 días le corresponderá ese valor multiplicado por 30 días, o sea 600 min.

Luego, no cuesta mucho fundamentar este procedimiento tradicional en base a la tabla estableciendo relaciones variadas, si es que algún alumno lo trae a la clase.

De la tabla a las proporciones

Como expresáramos anteriormente, una vez que los alumnos manejan fluidamente las tablas de razones es necesario que comiencen a explicitar las propiedades que utilizan en su completamiento para modelizarlas, generalizarlas y simbolizarlas usando lenguaje matemático.

Para ello se les harán preguntas acerca de las relaciones que pueden establecer entre los números que figuran en las tablas que hayan completado (en principio, de proporcionalidad directa).

Por ejemplo, se les puede preguntar: *Si en la tabla anterior se toman 2 números cualesquiera de la fila superior y sus correspondientes de la fila inferior, ¿encuentran alguna relación entre ellos?*

Jugando con los 4 números es muy factible que los alumnos lleguen por sí mismos a notar varias igualdades, justificándolas con expresiones tales como:

a) $\frac{1}{20}=\frac{30}{600}$ “porque dan el mismo resultado”, “porque son fracciones equivalentes”, “dan el mismo cociente”, etc.

b) $\frac{20}{1}=\frac{600}{30}$ “porque pasa lo mismo que antes”, “porque diste vuelta las fracciones y los resultados son iguales”, “porque la primera da 20 y la segunda también”, etc.

c) $\frac{1}{30}=\frac{20}{600}$ “acá intercambiaste el denominador de la primera por el numerador de la segunda, pero sigue pasando lo mismo que antes” (refiriéndose al punto a).

Así siguiendo, si el docente se los propone, podrán lograr escribir las cinco proporciones restantes que se pueden formar con esos cuatro números, intercambiando valores o invirtiendo las fracciones, lo cual no deja de maravillarnos cada vez que lo hacemos.

Si además, reflexionan en cómo se completó la tabla del ejemplo anterior, podrán concluir que también existen igualdades como las siguientes:

d) $\frac{1+30}{20+600}=\frac{1}{20}$; $\frac{28+2}{560+40}=\frac{30}{600}$; $\frac{30\pm 2}{600\pm 40}=\frac{30}{600}$. ; etc. donde intervienen sumas y restas ligando los valores correspondientes entre ambas filas.

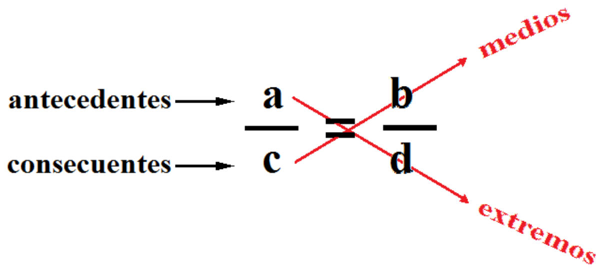
e) Puede también que varios alumnos lleguen a notar que **1 x 600 = 20 x 30,** explicando que *el primer número por el cuarto resulta igual que el primero por el tercero,* refiriéndose, respectivamente, a los extremos y medios de la proporción a).

Comprobadas estas relaciones con varias razones extraídas de una tabla y de otras tablas provenientes de problemas de proporcionalidad directa (donde intervengan distintos tipos de números -naturales, fracciones, decimales y porcentajes), se les podrá proponer que usen letras para representar en general esas relaciones en algunas de ellas.

Por ejemplo, en la tabla anterior ubicamos las letras de la siguiente manera para que los alumnos expresen las relaciones (proporciones) encontradas en forma general, en base a ellas:

Días	1 a	7 c	30 e	28	2	300	60	360	21	x
Minutos)	20 b	140 d	600 f	560	40	6000	1200	7200	420	y

En esta instancia se ha de definir qué es una proporción[3] y denominar sus componentes con los términos correspondientes, para evitar confusiones: *antecedentes, consecuentes, medios* y *extremos*.



Aunque ya a esta altura los alumnos deberían distinguir fracciones de razones, se da aquí otra oportunidad para que vean sus diferencias: las razones poseen antecedente y consecuente, los cuales pueden ser <u>cualquier tipo de números</u>, mientras que en las fracciones se habla de numerador y denominador y <u>siempre</u> son números enteros.

En base a las relaciones que extrajeron anteriormente, los alumnos escribirán simbólicamente:

a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots=\frac{x}{y}$ y podrán explicar que e*n una proporción, el antecedente de la primera razón es a su consecuente como el antecedente de la segunda razón también es a su consecuente, lo que equivale a decir que las razones son iguales o mantienen la misma relación, etc.*

b) También podrán expresar que *invirtiendo las razones de una serie de razones igual se obtiene otra serie de razones iguales*: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e}=\ldots=\frac{y}{x}$

c) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{c}{e}=\frac{d}{f}$;... ; $\frac{e}{x}=\frac{f}{y}$; ... y que en *una proporción, intercambiando los medios (o los extremos) entre sí se obtiene otra proporción.*

y así siguiendo, se pueden formar las siete proporciones a partir de la primera (a) al cambiar el orden de sus componente y comprobar que, en todos los casos, se verifica la **propiedad fundamental de las proporciones**: *En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios* (propiedad que nos ayudará a buscar un medio o un extremo

[3] Cuatro números cualesquiera: a, b, c y d tomados en ese orden, forman una proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos.

desconocido de una proporción dada en donde son conocidos los valores restantes). Simbólicamente **a.d = c.b**[4]

Una propiedad muy utilizada por los alumnos en las tablas de proporcionalidad es la que liga, por operaciones de suma o resta, los antecedentes y los consecuentes de las razones intervinientes: $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ … Ello los llevará a comprobar y demostrar en base a la propiedad anterior que: *La suma o diferencia de los antecedentes de una proporción es a la suma o diferencia de sus consecuentes como cada antecedente es a su consecuente.*

De la tabla a la función de proporcionalidad directa

Si ponemos la tabla anterior verticalmente y continuamos representando con *x,* los valores de la variable *días*, y con *y,* los de la variable *minutos*, obtendremos:

X (*días*)	**y (*minutos*)**
1	20
7	140
30	600
…	…
270	?
4	?

Los alumnos podrán constatar que se verifican las mismas relaciones que en la tabla horizontal, pero que existe una opción que les permite completar los valores de *y* muy rápidamente, cualquiera sea el valor que tome *x.*

$$\frac{20}{1} = \frac{600}{30} = \frac{140}{7} = \Lambda = \frac{y}{x}$$

Este valor resulta ser 20min/1día, ya que multiplicando cualquier valor de *x* por el mismo se puede obtener el correspondiente de *y*, siendo por ello justamente que se la denomina constante de proporcionalidad (y se la suele generalizar bajo la expresión k = *y/x*).

Este valor permite sintetizar en una fórmula la relación de proporcionalidad existente en nuestro problema:

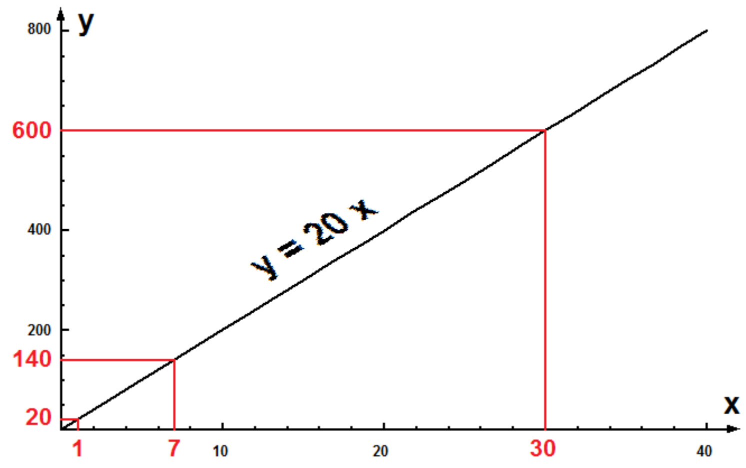
y = 20 min/día . x

Si representamos esta función en un gráfico de coordenadas cartesianas, obtendremos una recta que pasa por el origen de los ejes[5], gráfico que caracteriza a toda función de proporcionalidad directa y que en términos generales se expresa como:

---

[4] Esta igualdad es fácilmente demostrable. Si partimos de a/b = c/d y multiplicamos por d/d la primera razón y por b/b la segunda (siendo estos cocientes iguales a 1) la igualdad se sostendrá quedando ad/bd = bc/bd, de modo que simplificando los consecuentes obtenemos a.d = b.c.

y = k x o bien f(x) = k . x (siendo k un número distinto de cero, llamado constante o coeficiente de proporcionalidad)



<u>Conclusión</u>:

A través de nuestras investigaciones y experiencias de aula, hemos comprobado que la tabla de razones constituye un recurso muy valioso para el tratamiento inicial de la proporcionalidad (utilizable desde 3º grado, en tanto los alumnos están accediendo a los conceptos de multiplicación y división), que permite fundamentar la teoría de las proporciones, tanto como la *regla de tres* simple y la expresión funcional de la proporcionalidad directa (o inversa)[6].

Sin embargo, es oportuno advertir que dada la captación rápida que los alumnos tienen de este modelo suelen acomodar a él todos los problemas de proporcionalidad (¡y en algunos casos, los que no lo son también!). Es necesario que este modelo evolucione y que los alumnos, en el último ciclo del nivel primario y en los primeros años de enseñanza secundaria, puedan resolver situaciones directamente con las proporciones y sus propiedades, y con la expresión funcional general. Para ello será el docente quien oriente el trabajo de los mismos para que elaboren y utilicen comprensivamente las formas matemáticas más sintéticas y eficientes, que pueden llegar a construir en este tema.

No obstante, es de tener en cuenta que siempre que se siga una trayectoria de comprensión progresiva, los alumnos que tengan dificultades con los modelos más formales podrán significarlos volviendo a los modelos más sencillos, como la tabla de razones.

[5] Nótese que en este caso se usan escalas diferentes en los ejes en razón del tamaño de los números intervinientes.
[6] Para el desarrollo de la proporcionalidad inversa se usará un criterio similar al aquí propuesto para la proporcionalidad directa, teniendo en cuenta que la proporción en este caso será a/b = d/c , la constante de proporcionalidad será igual a x.y = k, la función y= k/x, y su gráfica una hipérbola.