DEMOSTRACIONES VISUALES

AUTORAS: Patricia Cuello-Adriana Rabino

Contenidos: Expresiones algebraicas - Identidades - Propiedades de los números naturales

Las demostraciones no están allí para convencernos de que algo es verdadero, están allí para demostrar por qué es verdadero.
Andrew Gleason

Una buena demostración es aquella que nos hace más sabios.
Yuri I. Manin

¿Qué son las "demostraciones sin palabras"?. Generalmente son dibujos o diagramas que ayudan al lector a *ver* por qué una proposición matemática en particular puede ser verdadera, como también para ver *cómo* uno puede empezar a demostrar que es verdadera.
Muchos argumentan que las demostraciones sin palabras no son demostraciones verdaderas. Entonces, ¿qué son?

La respuesta no es simple. James Robert Brown en el libro *Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures* (Routledge, Londres, 1999) dice:

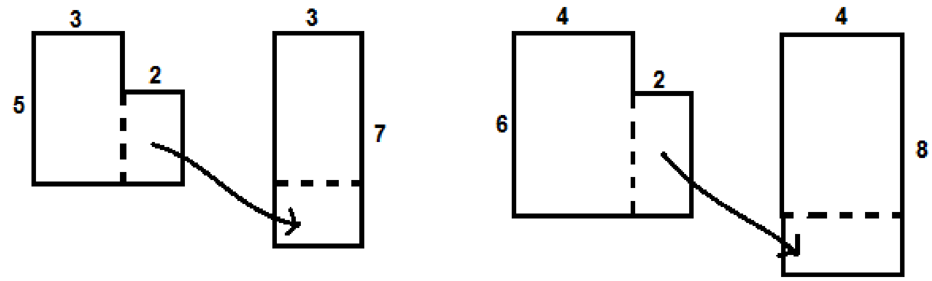
> *"A los matemáticos, como al resto de la gente, les gustan las ideas inteligentes, en particular se deleitan con un dibujo ingenioso. Pero esta apreciación no acalla un escepticismo prevaleciente. Después de todo un diagrama es, a lo sumo, un caso particular, por lo tanto no se puede establecer un teorema general. Aún peor, puede ser categóricamente de falsas apariencias. Aunque no en forma universal, la actitud prevaleciente es que los dibujos no son más que ideas heurísticas; son psicológicamente sugestivas y pedagógicamente importantes, pero no demuestran nada. Quiero oponerme a este punto de vista y decir que los dibujos juegan un rol legítimo en la evidencia y la justificación, un rol que va más allá de lo heurístico. En síntesis, los dibujos pueden demostrar teoremas".*(Citado en la Introducción de "Proofs without words II" de Roger B. Nelsen. Ed. The Mathematical Association of America. 2000).

Los problemas visuales permiten generalizar expresiones y verificarlas a través del dibujo. Si se tuvieran que demostrar estas expresiones desde el álgebra, habría que utilizar métodos de demostración de alto nivel, como es el caso del método de Inducción Completa (contenido que no corresponde a nivel medio). Además, este método permite demostrar igualdades entre expresiones algebraicas pero no así deducir dichas igualdades.

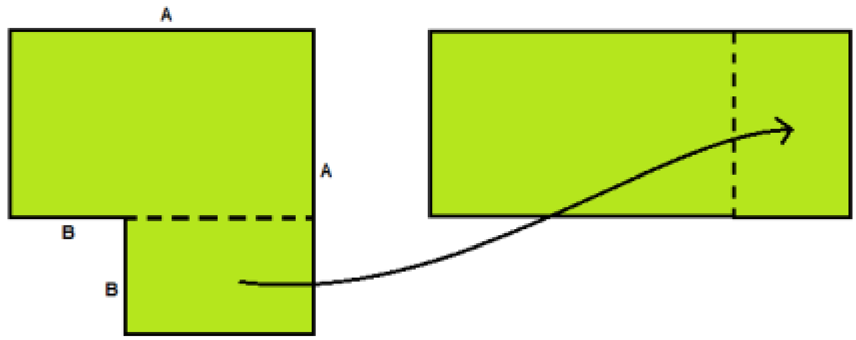
¿Cómo se puede implementar esta metodología?
Teniendo en claro el objetivo se les entrega la imagen a los alumnos y se les pregunta qué les sugiere la situación. Analizada las figuras, pasan al trabajo (individual o en grupos) bajo la consigna de qué me dice este dibujo y de qué forma puedo expresar eso algebraicamente. En la puesta en común, con el aporte de todos y, si es necesario con la guía del docente, se debe llegar a la expresión algebraica planteada.

Actividades iniciales

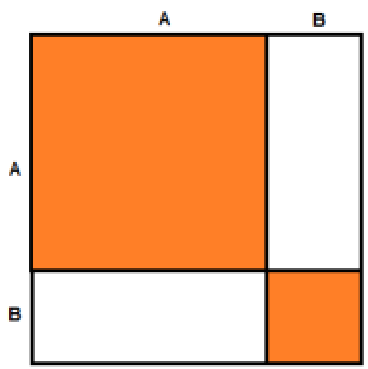
1.



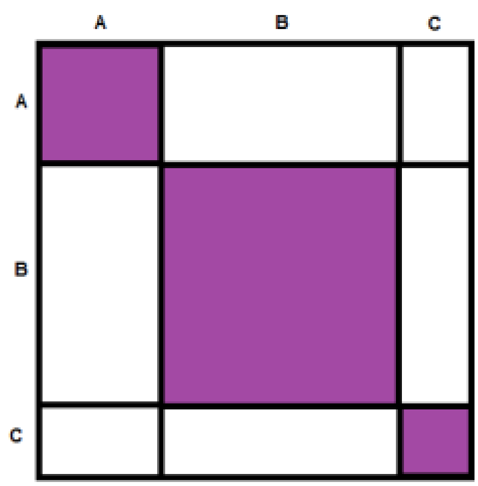
2.



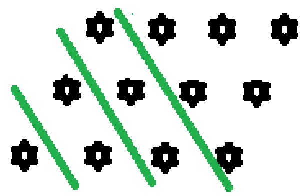
3.



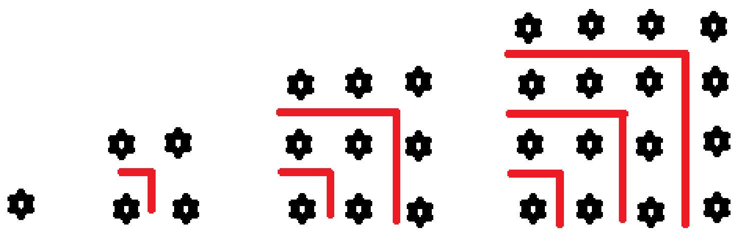
4.



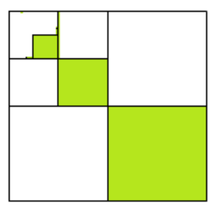
5.



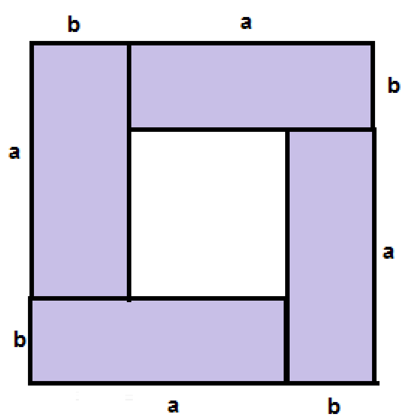
6.



7.

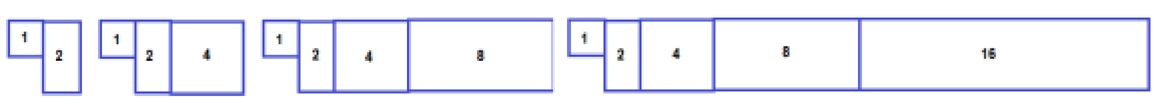


8.

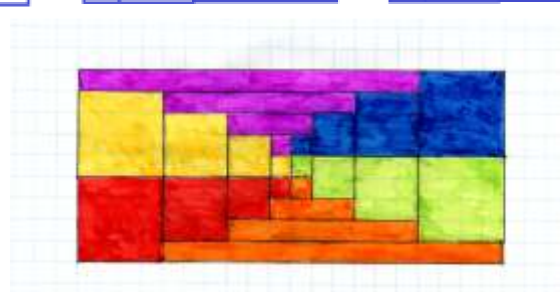


Las siguientes situaciones representan **propiedades de los números naturales**, con un grado mayor de complejidad.

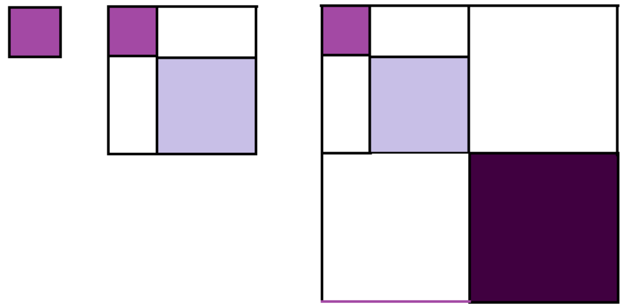
9.



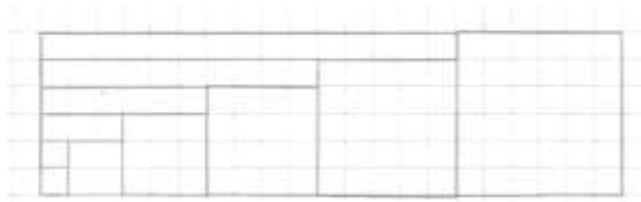
10. a.



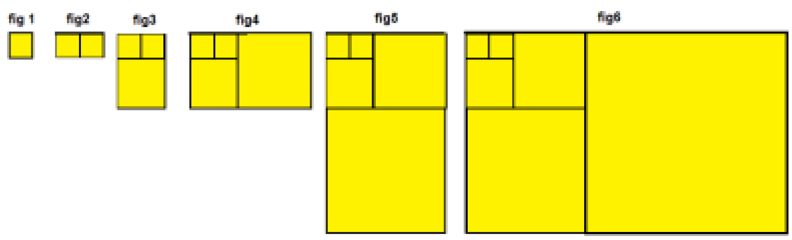
10. b.



11.



12.



RESPUESTAS

1. Propiedad distributiva ⇔ factor común

5x3 + 2x3 = (5+2) x 3

4x6 + 4x2 = 4 x (6+2)

a.b + a.c = a. (b + c)

2. Diferencia de cuadrados

$A^2 – B^2 = (A + B) . (A – B)$

3. Binomio al cuadrado

$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2 A.B$

4. Desarrollo del trinomio al cuadrado

Sumando las áreas de los rectángulos se tiene que:

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

Se ve claramente que:

$(A + B + C)^2 > A^2 + B^2 + C^2$, o sea que la operación de potenciación no es distributiva respecto de la operación de suma.

5. Suma de los n primeros números naturales:

Si se mira en cada diagonal, la cantidad de puntos se corresponde con los números naturales. En este caso llegan hasta 3 pero se podría seguir indefinidamente. Así se completa en forma simétrica un paralelogramo (hacer que los alumnos extiendan el número de puntos y la construcción de diagonales) y se halla el área utilizando como unidad cada punto, luego se divide por 2 porque la suma de los naturales es hasta la diagonal del paralelogramo. En este caso sería: 1 + 2 + 3 = (4 . 3) : 2.

Generalizando: 1 + 2 + 3 +…….+n = (n + 1).n / 2

6. Suma de los números impares:

$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots + (2n - 1) = n^2$

La suma de los n primeros números naturales es igual a n^2.

7. Tomando el lado del cuadrado mayor como la unidad y analizando de afuera hacia adentro, el área de la parte sombreada se puede expresar como:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}$$

8. Suma y diferencias de áreas

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$ (la suma del área de los 4 rectángulos)

Se llega a la equivalencia por dos caminos diferentes: diferencia de áreas y suma de áreas.

9. Se va duplicando el área al pasar de un rectángulo a otro. Tomando el área del primer cuadradito como unidad, esa área mide $1 = 2^0$, el área del segundo rectángulo es $2x1 = 2 = 2^1$, el tercero es $2x2 = 4 = 2^2$, el siguiente es $4x2 = 8 = 2^3$ y así sucesivamente. Entonces el área de cada rectángulo es de la forma 2^n. Si se quiere calcular el área de todos los rectángulos, la suma de todos es:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$$

Comparando la sumatoria anterior con el área del dibujo en general (un rectángulo de 2.($2^0+2^1+ \ldots\ldots+2^{n-1}$) más un cuadradito de área 1 se tiene:

$2^0+2^1+ \ldots+2^n = (2^0+2^1+ \ldots\ldots+2^{n-1}) \times 2 + 1 = (2^0+2^1+ \ldots\ldots+2^{n-1} + 2^n) \times 2 + 1 - 2^{n+1}$ (utilizando la estrategia de agregar dentro del paréntesis 2^n que, como está multiplicado por 2 fuera del paréntesis, para compensar este "agregado" hay que restar $2^n . 2 = 2^{n+1}$)

Despejando queda: $2^{n+1} - 1 = [(2^0+2^1+\ldots+2^{n-1} + 2^n) \times 2]-(2^0+2^1+ \ldots+2^n) \Rightarrow 2^0+2^1+ \ldots+2^n$ (la suma de las potencias de 2) $= 2^{n+1} - 1$

Esta serie diverge.

Se puede relacionar este problema con otro marco que no sea el geométrico o el algebraico, por ejemplo con la función exponencial.

10. a. 4 . $(1^2 + 2^2 +...+ n^2)$ (es la suma de todos los cuadrados) + 2 . (1.1 + 1.4 + 1.9 + ...+ $1.n^2$) (es la suma de todos lo rectángulos) = 6 . $(1^2 + 2^2 + ...+ n^2)$

Por otro lado, si se analiza el área del rectángulo como b . h = $(n^2 + n) . (2n + 1)$
y comparando el área por dos caminos diferentes (suma de áreas y área del rectángulo total) se tiene que: 6 . $(1^2 + 2^2 + ...+ n^2) = (2n + 1) . (n^2 + n)$
Entonces la suma de los n primeros números cuadrados es:

$$(1^2 + 2^2 + ...+ n^2) = [(2n + 1) . (n^2 + n)]/6$$

Esta serie también es divergente.

10. b. Calculando la parte sombreada se tiene la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales: $1^2 + 2^2 + ...+ n^2 = [(2n + 1) . (n^2 + n)]/6$

El área del cuadrado total es: $(1 + 2 + 3 +...+ n)^2$

Se puede querer saber, por ejemplo, qué parte del total está sombreado:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2} = \frac{\frac{(2n+1).(n^2+n)}{6}}{\left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2} = \frac{4n+2}{3n.(n+1)}$$

Esta serie converge a cero. Utilizando la no distributividad de la potenciación respecto de la suma, comparando numerador con denominador, se tiene que el numerador (suma de cuadrados) es menor que el denominador (cuadrado de una suma). Efectivamente, se puede ver en el dibujo que la parte no sombreada se hace cada vez mayor respecto de la sombreada.

También se puede querer saber qué parte del cuadrado no está sombreada:

$$[n . (n+1) / 2]^2 - [(2n + 1) . (n^2 + n)]/6$$

11.

$1^2 + 2^2 + ...+ n^2 + 1.1 + 3.1 + 6.1 + 10.1 + ...= 1^2 + 2^2 + ...+ n^2 + 1 + 3 + 6 + 10+$ .... = $[(2n + 1) . (n^2 + n)]/6$ (ver ejercicio 10) + $\sum_{i=1}^{n} i.(i+1)/2$ (es la sumatoria de la sumatoria de los primeros n números naturales, dado que 1=1;
3 = 1+2 ; 6= 1+2+3........)

Si se analiza el área del rectángulo como un todo, su área es:
b . h = (1+2+3+...+n). n = [n (n+1)]/2 .n

$\Rightarrow [(2n + 1) . (n^2 + n)]/6 + \sum_{i=1}^{n} i.(i+1)/2 = \{[n (n+1)]/2\} .n$

Por lo tanto 1 + 3 + 6 + 10+ ... (la suma de los números triangulares) =

= $\sum_{i=1}^{n} i.(i+1)/2$ = $[n^2 . (n+1)]/2 - [(2n + 1) . (n^2 + n)]/6 = [(n + 1)^2 . n]/6$

12. Sobre uno de los lados se agrega un cuadrado ...
El área de los rectángulos es 1.1 = 1 ; 1.2 = 2 ; 2.3 = 6 ; 3.5 = 15.......
Los primeros factores conforman los términos de la sucesión de Fibonacci
$a_n = a_i . a_i + 1$

También esos rectángulos son áureos, ya que las fracciones que se forman con cada término de la sucesión de Fibonacci y el anterior tienden al número de oro. Por lo tanto este puede ser un procedimiento para construir rectángulos áureos.