DOS RAREZAS MATEMÁTICAS

Autor: Oscar Bressan

a) ENCONTRAR UN NÚMERO SINGULAR

Vamos a calcular

$$\underbrace{\left(1-\varepsilon+\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\varepsilon+\frac{1}{n}\right)\times\left(1-\varepsilon+\frac{1}{n}\right)\times\ldots\times\left(1-\varepsilon+\frac{1}{n}\right)}_{\text{n veces}}$$

o sea:

$$\left(1-\varepsilon+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

donde ε es un número mucho menor que 1. Supongamos que ε = 0,01.

Si n = 1 ➔ (1 - 0,01 + 1/1)^1 = 1,99

Si n = 2 ➔ (1 – 0,01 + 1/2)^2 = 2,2201

Si n = 3 ➔ (1 – 0,01 + 1/3)^3 = 2,31744

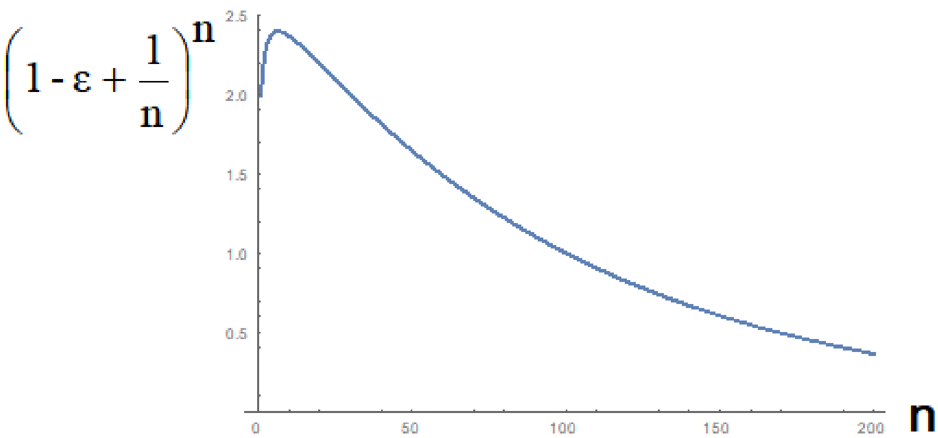
Si n = 5 ➔ (1 – 0,01 + 1/5)^5 = 2,3863

Si n = 10 ➔ (1 – 0,01 + 1/10)^10 = 2,3673

Si n = 50 ➔ (1 – 0,01 + 1/50)^50 = 1,64463

Si n = 200 ➔ (1 – 0,01 + 1/200)^200 = 0.366958

Si n = 1000 ➔ (1 – 0,01 + 1/1000)^1000 = 0.0001184



Observamos que para "n" pequeños la función crece, pero luego decrece y tiende a cero para n grandes. El límite de $(1 - \varepsilon + 1/n)^n$ para n tendiendo a infinito es efectivamente cero. Lo notable es que tiende a cero para cualquier valor de ε< 1, tan pequeño como se quiera, cuando n tiende a infinito.

¿Qué pasa si sumamos un εen vez de restarlo, también menor que 1 y tan pequeño como queramos? O sea:

$$\left(1+\varepsilon+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Probemos de nuevo con ε = 0,01.Los valores con sólo 3 decimales son:

Si n = 1 → (1 + 0,01 + 1/1)^1 = 2,01

Si n = 2 → (1 + 0,01 + 1/2)^2 = 2,280

Si n = 3 → (1 + 0,01 + 1/3)^3 = 2,424

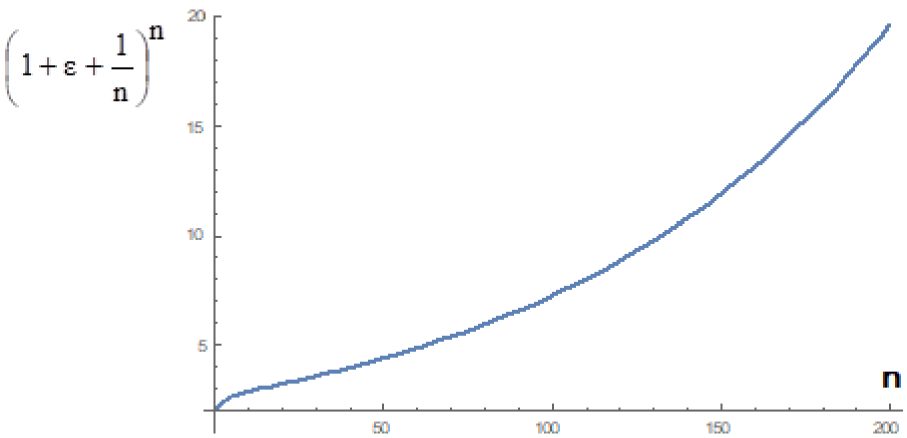
Si n = 5 → (1 + 0,01 + 1/5)^5 = 2,594

Si n = 10 → (1 + 0,01 + 1/10)^10 = 2,839

Si n = 50 → (1 + 0,01 + 1/50)^50 = 4,384

Si n = 200 → (1 + 0,01 + 1/200)^200 = 19,643

Si n = 1000 → (1 + 0,01 + 1/1000)^1000 = 56383,962\



Ahora los resultados divergen, o sea que el producto n veces de (1 + ε + 1/n) tiende a infinito si n tiende a infinito, y esto ocurre para cualquier ε< 1, tan pequeño como se quiera.

Entonces el límite tiende a cero si se resta εtan chiquito como uno quiera y va a infinito si se suma. La pregunta que nos queda es: ¿Qué pasa si no se resta ni se suma un ε? En este caso tendremos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Si n = 1 → (1 + 1/1)^1 = 2

Si n = 2 → (1 + 1/2)^2 = 2,25

Si n = 3 → (1 + 1/3)^3 = 2,370

Si n = 5 → (1 + 1/5)^5 = 2,488

Si n = 10 → (1 + 1/10)^10 = 2,5937

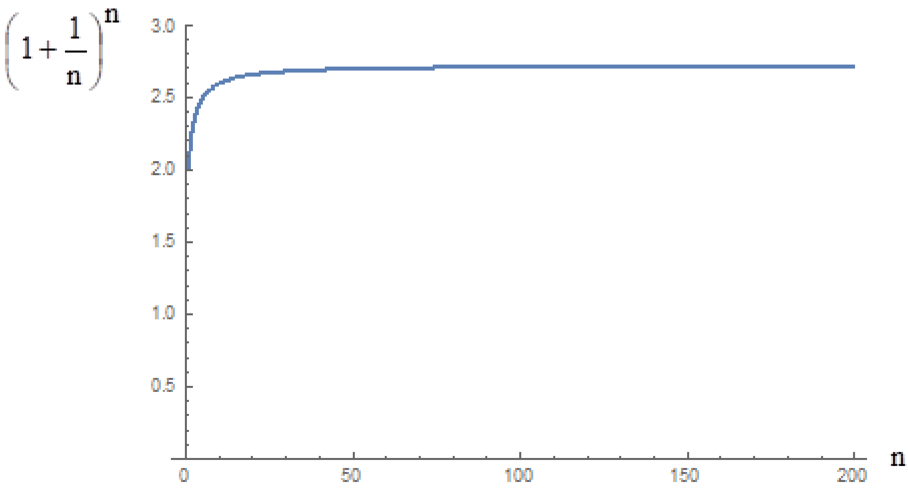
Si n = 50 → (1 + 1/50)^50 = 2,6916

Si n = 200 → (1 + 1/200)^200 = 2,7115

Si n = 1.000 → (1 + 1/1000)^1000 = 2,71692

Si n = 1.000.000 → (1+1/1.000.000)^1.000.000 = 2,71828

Si n →∞ → (1 + 1/∞)^∞ = 2,7182818284…= *e*

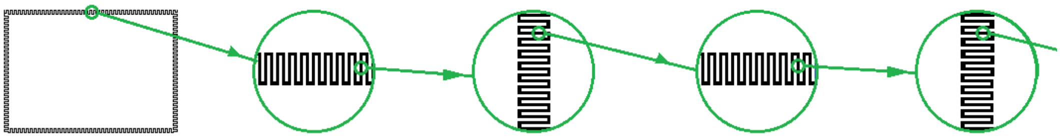


Este límite para n tendiendo a infinito es la definición del importante número *e*. Los números 1, 0, π, i, *e* constituyen los cinco números más importantes de las matemáticas. Tanto "*e*" como "π" son números irracionales, y ambos se pueden obtener como límites. (Pi se puede obtener como el límite del perímetro de un polígono regular de infinitos lados dividido su diámetro).

Resulta realmente curioso que restando o sumando un número "ε" **tan pequeño como se quiera** los límites vayan a cero o a infinito y si no se suma ni se resta nada se obtiene el número e.

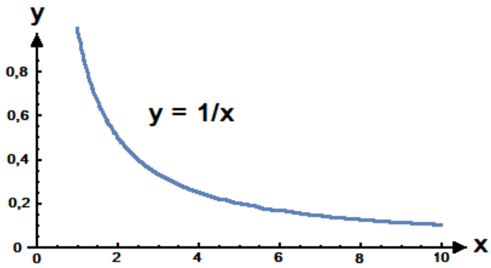
b) UN CUERPO CON VOLUMEN FINITO PERO CON SUPERFICIE INFINITA

Es fácil imaginarse una **superficie** finita con un perímetro infinito si el perímetro es infinitamente rugoso. En la figura siguiente se muestra un rectángulo cuyo borde mirado microscópicamente semeja una guarda tipo griega, la que si volvemos a mirar con mayor cuidado también es una guarda griega y así sucesivamente:

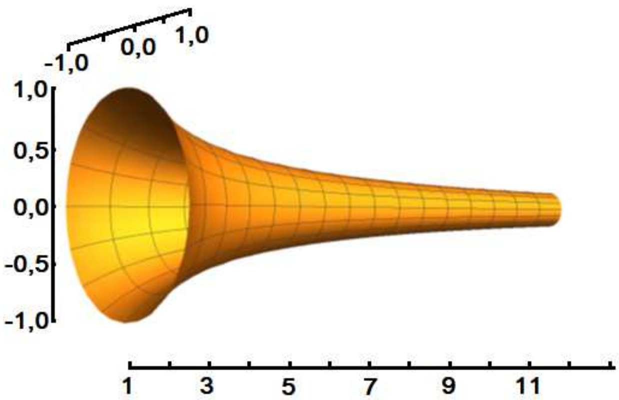


Entonces la superficie será finita, pero el perímetro tiende a divergir.

No resulta fácil imaginarse un **volumen** finito limitado por una superficie suave (no rugosa) pero que sea infinita. Sin embargo tal cosa existe. Consideremos la función y = 1/x, que es una hipérbola cuadrática:



La rotación alrededor del eje x de esta función genera una superficie que se extiende hasta el infinito llamada la trompeta de Gabriel:



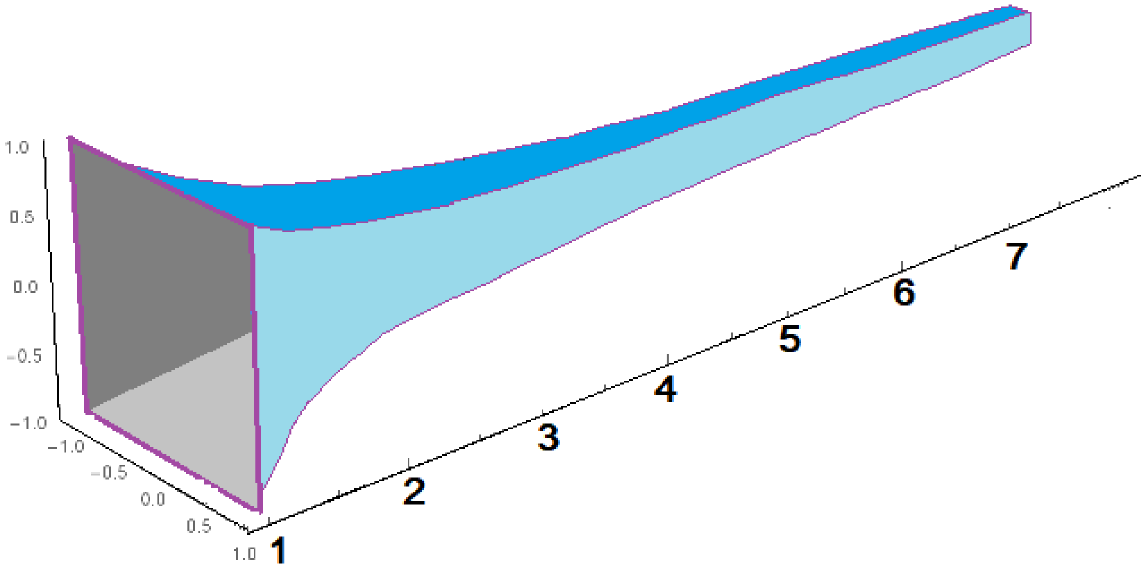
Trompeta de Gabriel

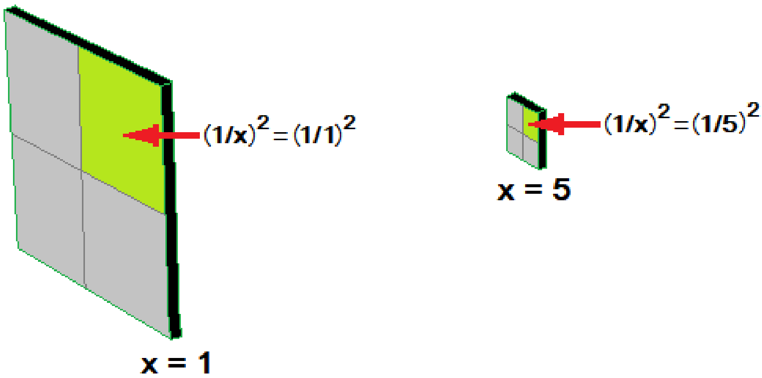
El físico y matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647) descubrió que la trompeta de Gabriel encierra un volumen finito, que si se lo calcula desde x = 1 hasta x = ∞ es igual a π, mientras que la superficie, calculada dentro de los mismos límites, es infinita.

En 1672 el filósofo inglés Thomas Hobbes dijo que uno debería estar loco para creerle a Torricelli, y aún hoy en día este resultado provoca discusiones entre los estudiantes. No obstante el resultado de Torricelli es correcto.

Vamos a considerar un cuerpo más sencillo, un tubo de cuatro caras, cada una de las cuales tiene como perfil la hipérbola equilátera y que se extiende desde x = 1 hasta infinito.

Si dividimos este cuerpo con cortes perpendiculares al eje x y separados unos de otros a una distancia Δx pequeña, obtenemos placas cuadradas cuya superficie es cuatro veces 1/x al cuadrado y por supuesto de espesor Δx:



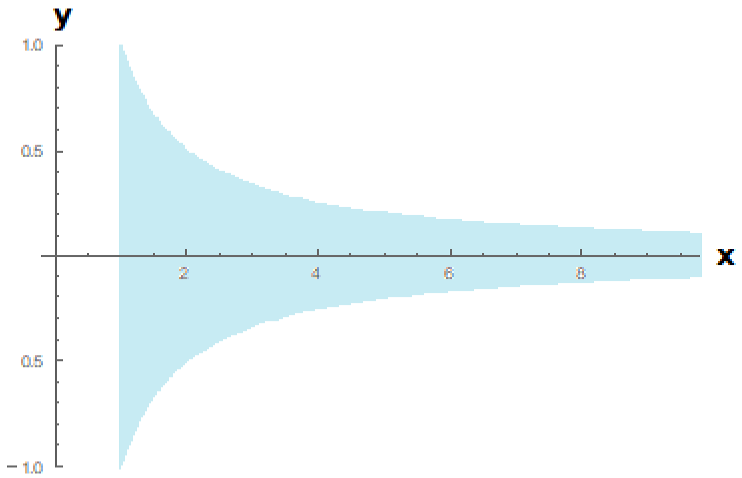


El cálculo del volumen se hace mediante la integral:

$$V = \int_1^\infty \frac{4}{x^2}\,dx = -\frac{4}{x}\Big|_1^\infty = -\frac{4}{\infty} + \frac{4}{1} = 4$$

El volumen resulta ser cuatro unidades cuadradas. Si la unidad fuera 1 centímetro el volumen sería 4 cm^3.

Pasamos al cálculo de la superficie. Para ello solo nos hace falta calcular la superficie de una cara y multiplicar por cuatro. Cada cara es curva y por lo tanto su superficie es mayor que si fuera plana. Si fuera plana cada cara tendría dos veces la superficie comprendida entre la hipérbola y el eje x, o sea la integral entre x = 1 y x = ∞ de 1/x (el dos es porque está reflejada para las "y" negativas):



$$S = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)\,\Big|_1^{\infty} = \ln(\infty) - \ln(1) = \ln(\infty) = \infty$$

donde n es la función logaritmo natural. Pero la superficie de cada cara, como ya dijimos es mayor por ser curva. Además debemos tener en cuenta que son cuatro caras, o sea cuatro veces infinito, que obviamente sigue siendo infinito.

Resumiendo, la superficie es infinita para el volumen es finito. Pregunta para pensar: Supongamos que la unidad es cm, y quiero pintar este tubo: ¿Si lo pinto por fuera necesito infinita pintura, pero si le pongo pintura por dentro con 4 cm^3 me alcanza? ¿Cómo me explico la paradoja?