Evaluar el conocimiento del alumno sobre la estructura secuencial de los números

David Ellemor-Collins & Robert Wright

Educational & Child Psychology Vol 24 No 2

www.mathsrecovery.org.uk/.../Ellemor-Collins-and-Wright-2007[1]

Resumen

La investigación sobre estrategias mentales de los niños para adición y sustracción con multidígitos identifica dos categorías. Las estrategias basadas en colecciones involucran partir (o descomponer) los números en dieces y unidades, y pueden modelarse con materiales base diez. Las basadas en la secuencia implican mantener un número entero y usar la estructura secuencial de los números; pueden modelarse con saltos sobre una línea numérica vacía (o abierta). También sugieren que estas estrategias y la estructura secuencial no se desarrollan Los estudios han encontrado que las estrategias basadas en la secuencia tienen más éxito y se correlacionan con un conocimiento aritmético más sólido, particularmente entre alumnos de bajo rendimiento, explícitamente en muchas aulas de matemática de primaria. Este informe se basa en los resultados de un proyecto de tres años que tiene el objetivo de desarrollar herramientas pedagógicas para la intervención en el aprendizaje numérico de alumnos de tercer y cuarto grado de bajo rendimiento (8 a 10 años). Estas herramientas incluyen tareas de evaluación para mejorar la intervención. El informe se centra en cuatro grupos de tareas de evaluación que colectivamente permiten la documentación detallada del conocimiento de los alumnos sobre la estructura secuencial de los números. Las tareas y las respuestas de los alumnos se describen en detalle. A continuación, algunos ejemplos. Cuando se les pidió que contaran en forma descendente a partir de 52, los alumnos dijeron: “52, 51, 40, 49, 48, y así sucesivamente”. Cuando se les pidió que contaran en forma descendente de a diez desde 336, los alumnos tuvieron dificultades para continuar después de 326. También, los números *del 11 al 19*[2] en los cientos (316) presentaron dificultades particulares; los alumnos tuvieron complicaciones para decir el número que es diez menos que 306. Además, también las presentaron para ubicar los números 50, 25, 62 y 98 en una línea numérica en la que se marcaron el cero y el 100. El artículo proporciona información sobre la evaluación del conocimiento de la estructura secuencial y sostiene que es un conocimiento numérico básico importante.

La adición y la sustracción con multidígitos son aspectos importantes del sentido numérico y del cálculo mental (Anghileri, 2000; Thompson y Smith, 1999). Además, este tema es importante porque proporciona una base para una aritmética más avanzada. Este artículo se basa en un proyecto actual de tres años que se centra en el desarrollo de herramientas pedagógicas para apoyar la intervención en el aprendizaje numérico de alumnos de tercero y cuarto grado de bajo rendimiento (8 a 10 años de edad). Estas herramientas incluyen programas de tareas de evaluación diagnóstica y procedimientos de instrucción. Este documento se centra en algunas de las tareas que permiten evaluar el conocimiento de la estructura secuencial de los números. El desarrollo de un conocimiento significativo de esta estructura proporciona una base importante para la adición y la sustracción de multidígitos (Beishuizen y Anghileri, 1998). El artículo:

1. elaborará el término "estructura secuencial de los números";
2. revisará la literatura pertinente a la estructura secuencial de los números;
3. establecerá tareas relevantes de evaluación diagnóstica; y
4. describirá el rango de respuestas de los alumnos de bajo rendimiento a esas tareas.

Estructura secuencial de los números

---

[1] Traducción: Ma. Fernanda Gallego para uso del GPDM.

[2] El documento habla de “*teen numbers”* que son los números entre 10 y 20 (11, 12,… y 19).

Este documento discute el conocimiento y el uso de los alumnos de bajo rendimiento de lo que llamamos la "estructura secuencial de los números". Por “estructura secuencial de los números” nos referimos a aquella basada en las décadas en la secuencia lineal 1, 2, 3,..., 99, 100, 101.... Específicamente, esta secuencia de números consta de una secuencia de décadas que se pueden organizar en una secuencia de cientos. Los números década (10, 20, 30,...) son puntos de referencia en la secuencia, a intervalos pares de diez. Cada década sigue el mismo patrón, por ejemplo, “20, 21, 22,... 28, 29, 30”. Por la clara simetría, un par de números como 18 y 28, o 71 y 81, siempre están separados por diez pasos. En referencia a la estructura secuencial de los números, 57 puede considerarse como uno después de 56, siete después de 50, tres antes de 60 o 10 después de 47. También podemos describir las estructuras basadas en colecciones en números multidígitos, que implican pensar en los números en términos de colecciones de unidades, decenas, centenas, etc. Por ejemplo, 57 se puede construir como cincuenta y siete, o como 7 unidades y 5 decenas.

Revisión de literatura

Énfasis en el cálculo mental

En los últimos 15 años, la investigación y las reformas curriculares en una variedad de países resaltan un renovado énfasis en el cálculo mental con números multidígitos (Beishuizen y Anghileri, 1998; Thompson, 1997). Un acento temprano en estrategias mentales, en lugar de los algoritmos escritos formales, puede apoyar mejor el sentido numérico y la comprensión conceptual de los números multidígitos, así como el desarrollo de conexiones importantes con otros conocimientos relacionados (Askew, Brown, Rhodes, Wiliam & Johnson, 1997; Hiebert & Wearne, 1996; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Sowder, 1992; Yackel, 2001). El cálculo mental también puede estimular el desarrollo del razonamiento numérico y el cálculo flexible y eficiente (Anghileri, 2001; Treffers, 1991).

Estrategias mentales: "*basadas en la secuencia" y "basadas en colecciones*"

En respuesta al énfasis en el cálculo mental, los proyectos de investigación en varios países se centraron en las estrategias mentales informales de los alumnos para sumas y restas con multidígitos (Beishuizen, van Putten & van Mulken, 1997, Cobb et al., 1997; Cooper, Heirdsfield, & Irons, 1995; Foxman y Beishuizen, 1999; Fuson et al., 1997; Ruthven, 1998; Thompson y Smith, 1999). Varios estudios describieron dos categorías principales de estrategias: basadas en la secuencia y en colecciones (por ejemplo, Beishuizen & Anghileri, 1998; Cobb et al., 1997; Foxman y Beishuizen, 2002; Thompson y Smith, 1999). El ejemplo habitual de una estrategia basada en la secuencia es la de 'salto'. Saltar implica mantener el primer número entero y agregar (o restar) el segundo a través de una serie de saltos. Por ejemplo, un alumno puede sumar 57 y 26 saltando y razonando de la siguiente manera: “57 y diez es 67, y diez más es 77; tres más es 78,79, 80; y tres más hacen 83”. Los investigadores observan que tales estrategias basadas en la secuencia dependen del conocimiento de estructuras secuenciales para saltar de a diez, y para hacer pasos y saltos en la secuencia numérica (Fuson et al., 1997; Treffers & Buys, 2001; Yackel, 2001). El uso en el aula de modelos como una línea numérica que resalta las décadas o un collar de cuentas con las décadas marcadas por color (1-10 es azul, 11-20 es rojo, 21-30 es azul, etc.) están relacionadas con el uso del alumno de la estructura secuencial y de estrategias basadas en la secuencia (Klein, Beishuizen y Treffers, 1998).

El ejemplo usual de una estrategia basada en colecciones es la estrategia de 'partir'. Partir implica descomponer ambos números en decenas y unidades, sumarlas (o restarlas) por separado, y finalmente reagrupar los subtotales de decenas y unidades. Un alumno puede sumar 57 y 26 usando la partición razonando de la siguiente manera: “50 y 20 son 70, 7 y 6 son 13, 70 y 13 hacen 83”. Las estrategias basadas en colecciones utilizan estructuras basadas en colecciones (Fuson et al., 1997; Treffers & Buys, 2001; Yackel, 2001). Materiales como los bloques de base diez están vinculados al uso de estructuras y estrategias basadas en colecciones (Beishuizen, (1993).

Fuson et al. (1997) sugieren que una comprensión avanzada de la adición y sustracción con multidígitos requiere una integración de estrategias basadas en la secuencia y en colecciones. Por ejemplo, un alumno avanzado al que se le pidió que agregara 5 donas a 58 podría usar una estrategia basada en la secuencia saltando de 60 a 63, que es más eficiente que partir en este caso; pero cuando le preguntaron cuántas cajas de diez podía llenar, usó su conocimiento de la estructura basada en colecciones para reconocer 6 decenas en 63.

Infrecuencia de estrategias basadas en la secuencia en alumnos de bajo rendimiento

Los investigadores han encontrado que los alumnos de bajo rendimiento tienden a utilizar estrategias de partir, lo que indica el desarrollo del conocimiento de la estructura basada en colecciones (Beishuizen, 1993; Foxman y Beishuizen, 2002). La investigación también sugiere que muchos alumnos de bajo rendimiento no desarrollan la estrategia de saltar por decenas (o dieces) y, por lo tanto, pueden no desarrollar estructuras basadas en la secuencia (Beishuizen, 1993; Beishuizen et al., 1997; Menne, 2001). Por lo tanto, es poco probable que estos alumnos puedan avanzar hacia estrategias integradas basadas en la secuencia y en las colecciones que, sostenemos, son importantes para el sentido numérico y el cálculo mental.

Ventajas de las estrategias basadas en la secuencia

Las estrategias de salto pueden desarrollarse como abreviaturas de las estrategias informales de conteo de los alumnos (Beishuizen & Anghileri, 1998; Olive, 2001). Siguiendo la visión de que el conocimiento de los alumnos debería basarse en sus estrategias informales (Anghileri, 2001; Resnick, 1989), algunos investigadores recomiendan enseñar estrategias de salto (Klein et al., 1998). Una dificultad común con la suma y resta de multidígitos surge para los alumnos cuando separan los dígitos en el lugar de las decenas de los dígitos que están en el lugar de las unidades y no los reagrupan adecuadamente. Por ejemplo, 57+ 26 se encuentra que es “73” o incluso “713”. Estas dificultades surgen en el caso de las estrategias de partir, pero no surgen en el caso de las estrategias de salto (Beishuizen & Anghileri, 1998; Cobb, 1991; Fuson et al., 1997). Beishuizen y sus colegas encontraron que los alumnos cometieron muchos más errores al usar estrategias de partir que cuando usaban estrategias de salto. Es importante destacar que, incluso dentro de un grupo de alumnos identificados como de bajo rendimiento, las estrategias de salto fueron mucho más exitosas (Klein et al., 1998). Estos resultados fueron confirmados por Foxman (2002). Los estudios que compararon el uso de estrategias de partir y de salto encontraron que la primera, de descomposición, condujo a más dificultades para lograr la independencia de materiales concretos (Beishuizen, 1993), más confusión procedimental y conceptual (Klein et al., 1998) y tiempos de respuesta más lentos, sugiriendo una carga sobre la memoria de trabajo (Wolters, Beishuizen, Broers y Knoppert, 1990). Las tareas de resta son una fuente de dificultades particulares en la aritmética con multidígitos y las posibles confusiones de esta operación usando una estrategia de descomposición están bien documentadas. Las respuestas confusas que usan partición sugieren que la estructura basada en colecciones ofrece una representación problemática en las tareas de resta (Fuson et al., 1997). El éxito con la descomposición requiere un fuerte sentido de los números y una percepción sutil del procedimiento en sí, mientras que el éxito con el salto requiere principalmente saber cómo saltar diez desde cualquier número (Beishuizen, 1993).

Desarrollar flexibilidad con las estrategias

Un objetivo importante para mejorar el sentido numérico con multidígitos es la flexibilidad con las estrategias, que incluyen el reconocimiento de atajos eficientes y la adaptación para nuevos problemas (McIntosh et al., 1992). Los estudios indican que los alumnos adoptan más fácilmente la estrategia de salto para tomar decisiones de cálculo eficientes. Según Beishuizen et al., esto se debe a "la representación mental subyacente de la serie numérica a 100" (1997). Es decir, el uso de la estructura secuencial permite una visión estratégica de las tareas de cálculo. En resumen, los alumnos con dificultades aritméticas tienden a no desarrollar la estructura secuencial ni estrategias basadas en la secuencia, como el salto. Es probable que esto les niegue un enfoque integrado para la suma y resta con multidígitos, y el acceso a las estrategias que prefieren los alumnos exitosos en aritmética. Además, el desarrollo de una estructura y de estrategias secuenciales podría resolver una serie de dificultades típicas con multidígitos, que prevalecen con las estrategias basadas en colecciones.

Grupos de tareas de evaluación y respuestas

Como parte del proyecto (mencionado anteriormente en este artículo), 204 alumnos de bajo rendimiento fueron entrevistados dos veces durante el año escolar para evaluar su conocimiento numérico. Los alumnos estaban en tercero y cuarto grado (de 8 a 10 años de edad) de un amplio rango demográfico en el estado de Victoria, y fueron seleccionados para el estudio en base a los bajos resultados en las pruebas diagnósticas. Se utilizó un método que involucraba una entrevista dinámica individual, en la que se plantean tareas numéricas al alumno y el entrevistador presta mucha atención a su proceso de pensamiento (Wright, Martland & Stafford, 2006). Las evaluaciones de la entrevista se grabaron en video para su posterior análisis. Usamos el término "grupo de tareas" para referirnos a una serie de tareas estrechamente relacionadas, que se utilizan para investigar el conocimiento de los alumnos sobre un tema específico. En este trabajo, discutimos cuatro grupos de tareas que encontramos particularmente valiosos para evaluar el conocimiento de los alumnos de la estructura secuencial:

1. Secuencias de palabras numéricas por unidades (de uno en uno).
2. Secuencias numéricas por decenas (de diez en diez).
3. Incrementar y disminuir diez.
4. Ubicar números.

Para cada uno, describimos la gama de respuestas y dificultades de los alumnos, evidentes a partir del análisis de las entrevistas grabadas en video.

Grupo de tareas 1: Secuencias de palabras numéricas por unidades (de uno en uno)

Enfoque
Secuencias cortas de palabras numéricas, hacia atrás y hacia adelante; anterior y posterior de un número; y pasando por décadas y cientos.

Ejemplos
"Contá desde 97. Te diré cuándo detenerte". Pará en 113. "Contá hacia atrás desde 103". Pará en 95. "Decí el número que viene justo después de 109". "Decí el número que viene justo antes de 100". Del mismo modo, pasando por 40, 210, 300, 990, 1000, 1100 hacia adelante y hacia atrás.

Dificultades de los alumnos de bajo rendimiento

La Tabla 1 presenta ejemplos de errores de los alumnos con secuencias de palabras numéricas. Los errores desde 50 hacia atrás indican que no han construido completamente la secuencia de palabras numéricas. Por el contrario, conocen series separadas como 41-49 y 51-59, y las vinculan incorrectamente al retroceder (Skwarchuk y Anglin, 2002). En el intervalo de 100 a 1000, los errores en la secuencia de palabras numéricas eran comunes (Tabla 1). En muchos de los casos en que los alumnos respondieron correctamente a estas tareas, sus respuestas indicaron una falta de certeza, en particular al pasar por décadas o cientos. Todos nuestros alumnos de bajo rendimiento cometieron errores con secuencias de palabras numéricas que pasan por 1000. Las dificultades de los niños pequeños para establecer la secuencia de palabras numéricas están bien documentadas (por ejemplo, Fuson, Richards & Briars, 1982; Wright, 1994). Hemos encontrado como llamativo los persistentes errores e incertidumbres en estos niños mayores. Nuestra conclusión es que las tareas de evaluación descriptas anteriormente son indicativas de áreas de conocimiento que deben ser enseñadas explícitamente, al menos en el caso de alumnos de bajo rendimiento.

Grupo de tareas 2: Secuencias de palabras numéricas por decenas (de diez en diez)

Enfoque
Secuencias de palabras numéricas por decenas (de diez en diez), hacia adelante y hacia atrás, dentro y fuera de la década.

Ejemplos
"Contá por decenas". Pará en 120". Contá por decenas desde 24. Te diré cuándo detenerte". Pará en 104. "Contá por decenas hacia atrás desde 52". Pará en 2. "Contá por decena desde 167". Pará en 237.

Pasar por *50 o 40* hacia atrás
'52, 51, **40**, 49, 48…'
'52, 51, ^ 49, 48…'
'52, 51, 50, **89**, 88…'
'42, 41, 40, **49**, 48…'

Pasar por *100*
'98, 99, 100, diez cientos'
'102, 101, ^ 99, 98…

Pasar por *110* hacia adelante
'108, 109, **1000**, 1001…'
'108, 109, **200**, 201, 202…'
Número siguiente a 109: **'1000'**

Pasar por *200*
'198, 199. Es todo lo que sé.
'198, 199, **1000**, 1001…'
'198, 199, ^ 201, 202…'
'202, 201, ^ 199, 198…'

Tabla 1: Errores de los alumnos en secuencias orales de palabras numéricas.
Nota: los errores están señalados en negrita, las omisiones están marcadas con "Λ".

Respuestas y dificultades de los alumnos de bajo rendimiento

Los patrones de las secuencias de palabras numéricas por decenas son inherentes a la estructura secuencial del sistema de numeración de base diez. Las estrategias de salto provienen de estos patrones. Los investigadores han sugerido que los alumnos pueden tener dificultades para producir secuencias de palabras numéricas por decenas fuera de la década y, por lo tanto, no pueden desarrollar una estrategia de salto (por ejemplo, Beishuizen, 1993).

Sin considerar el conteo por decenas en la década, todos los alumnos entrevistados pudieron producir la secuencia de los números década '10, 20, 30,... ', aunque algunos tuvieron dificultades para continuar más allá de 90.

No poder contar por decenas desde 24
Algunos alumnos no pudieron contar por decenas desde 24. Las respuestas incluyeron: (a) "24, 25, 20" y nuevamente "24, 25, ¿20?"; y (b) "24, 30, 34, 40". Un alumno no pudo contar por decenas desde 24, pero pudo hacerlo desde 25 – "25, 35, 45,... ". Parece que la imposibilidad para dar sentido a la tarea surge de una falta de familiaridad con las secuencias de decenas fuera de la década en comparación con las secuencias de cincos y dieces en la década. De hecho, algunos de estos alumnos podían contar por decenas en décadas hasta 1000.

Contar de a 1
Cuando se les pidió contar por decenas a partir de 24, algunos alumnos contaron cada diez de a uno. Esto podría ser laborioso y en ocasiones no tener éxito. A veces, un alumno parecía tomar conciencia del patrón que estaba produciendo, y su secuencia se volvía más fluida, tal vez reduciendo el conteo de a uno.

Dificultades con los números del 10 al 20 (11, 12, 13,…19)

Muchos alumnos no pudieron coordinar los números década con una secuencia numérica más larga. Al contar por decenas hacia atrás desde 52 (52, 42, 32,...), algunos alumnos tuvieron dificultades después del 22. Las respuestas incluyeron: (a) "... 22, 2"; (b)"… 22, 14, 4"; y (c) "... 22, 10, 1". Algunos tuvieron éxito, pero su respuesta implicó contar hacia atrás de a uno desde 22.

Dificultades en el intervalo de 100 a 1000

Los alumnos que podían contar de a diez en décadas en el intervalo de 1 a 100 experimentaron dificultades para conectar el cien o los cientos más grandes. Un alumno dijo "177, 187, 197, **cien** y luego "297", luego "207, 217...". Cuando cuentan de a diez en décadas, algunos alumnos produjeron una secuencia como "430, 420, 410, **300**, 390, 380...". Esto es análogo a un error común entre los alumnos más jóvenes en los números década cuando cuentan hacia atrás, por ejemplo, cuando se cuenta desde 45, el alumno dice: "45, 44, 43, 42, 41, **30**, 39, 38 …". Los alumnos que cometieron un error cuando contaron saltando a 300 como el número diez menos que 410, no cometieron el error correspondiente cuando contaron saltando de a diez fuera de las décadas, pero hubo dificultades con los *cientos* tales como "336, 326, 316, 297" luego corregido a "296", omitiendo así el 306. Otra dificultad fue discriminar el número nuevo de centenas (o cientos) del número de decenas, por ejemplo, un intento de saltar contando de a diez a partir de 167 fue "267, 367, 467". Cuando contaron de a diez hacia atrás desde 336, una respuesta fue: "326, 316, **312**" (pausa), "326, **226**, 206, **doscientos y cero**, 196, 186, 176". Esta secuencia ilustra una dificultad persistente con los números *del 11 al 19* dentro de los cientos, y confusión cuando pasan por 200. Está claro que el conocimiento de las secuencias de decenas más allá de 100 es una extensión significativa de este conocimiento a 100.

Las respuestas descriptas anteriormente son indicativas de debilidades en el conocimiento de los alumnos de la estructura secuencial de los números. Creemos que es importante abordar estas debilidades a través de la intervención.

Grupo de tareas 3: Incrementar y disminuir 10

Enfoque

Diez más y diez menos, dentro y fuera de la década y pasando por décadas y cientos.

Ejemplos

Muestre "20" en una carta. Pregunte "¿Qué número es diez más que este?" De manera similar para 79, 356, 195, 999. Muestre "30" en una tarjeta. Pregunte "¿Qué número es diez menos que este?". Del mismo modo para 79, 356, 306, 1005.

Relación con el conocimiento de la estructura decimal de la secuencia numérica

Nos interesó saber si los alumnos podían resolver las tareas del Grupo 3 sin contar de a uno o tratando de usar un algoritmo para sumar o restar. Consideraríamos que tales alumnos tienen conocimiento de la estructura decimal de la secuencia numérica. Las tareas de (a) incrementar y disminuir diez y (b) contar saltando diez, parecieron estar relacionadas en el sentido de que los alumnos mostraron niveles similares de avance en sus respuestas a estos grupos de tareas. Sin embargo, las tareas que implican incrementar o disminuir diez son distintas de las de contar saltando de a diez. Hubo incongruencia en las respuestas de los alumnos en estos dos grupos de tareas. Por ejemplo, un alumno contó saltando de a diez a partir de 167 con éxito: "177, 187, 197, 297" se corrigió "207, 217...", pero no pudo resolver diez más que 195: "ciento y..." cambió a "¿220?", cambió a "225".

Los alumnos pueden interpretar la tarea de incrementar como una tarea de adición en lugar de una actividad basada en una secuencia numérica con incrementos de diez (decimal). Por lo tanto, no pueden considerar diez más como un aumento en una secuencia decimal. Incluso si pueden considerar diez más como un incremento en una secuencia decimal, aparentemente son incapaces de aumentar la secuencia desde el comienzo, cuando el incremento implica pasar por los cientos (100, 200, 300,…). Alternativamente, podríamos decir que un alumno que puede incrementar diez pasando por los cientos ha construido una estrategia basada en la secuencia para la operación de sumar diez.

Progresiones en aumentar y disminuir diez

El éxito de los alumnos con tareas que implican incrementar o disminuir diez tendió a progresar de la siguiente manera:
● 2 dígitos fuera de la década: "diez más / menos que 79",
● 3 dígitos fuera de la década: “diez más / menos que 356”,
● hacia adelante a través de los *cientos*: “diez más que 195”,
● hacia atrás a través de los *cientos*: “diez menos que 306”,
● hacia adelante a través de 1000: “diez más que 999”,
● hacia atrás a través de 1000: “diez menos que 1005”.

Por lo tanto, un alumno que tuvo éxito en la tercera progresión (comenzando desde la progresión más alta) probablemente tendrá éxito con las tareas de las dos primeras progresiones y no lo tendrá con las tareas de la cuarta en adelante. Algunos alumnos no podían aumentar diez fuera de la década en absoluto. Las dificultades con la secuencia de los números *del 11 al 19* también fueron evidentes en estas tareas, por ejemplo, un alumno podía encontrar diez más que 356, pero no diez más que 306. Las tareas que incluyen el 1000, es decir, diez más que 999 y diez menos que 1005, fueron especialmente difíciles para prácticamente todos los alumnos.

'¿Qué número es diez menos que 306?'

La tarea de encontrar diez menos que 306 fue particularmente difícil para muchos alumnos. Las respuestas de los alumnos incluyeron:
● "No sé".
● Conteo incorrecto: "¿210?", "299", "300".
● Contar de a uno con una secuencia incorrecta, y usar los dedos para controlar los conteos de 10: “305, 304, 303, 302, 301, 330, 329, 328, 327, 326!”
● Contar de a uno y responder “295”.
● Contar de a uno hacia atrás con éxito.
● Retroceder diez con éxito.

Para resolver esta tarea retrocediendo diez, es necesario saber que la década anterior a 301 es la del 290s. Muchos de estos alumnos no lo sabían o no podían aplicar este conocimiento para resolver la tarea, es decir, carecían del conocimiento de la estructura secuencial de los números. Además, muchos de ellos no contaron de a uno para resolver esta tarea. Aparentemente, estos alumnos no pudieron construir una representación de este problema que estaba incluido en la secuencia numérica. Aquellos alumnos que intentaron contar tuvieron más éxito en otras tareas que implicaban incrementar diez que los alumnos que no lo hicieron.

Grupo de tareas 4: Ubicar números en una línea numérica

Enfoque
Ubicar números en una representación lineal de la secuencia numérica de 0 a 100.

Ejemplo
Se da al alumno un bolígrafo y una línea en papel con solo los extremos marcados 0 y 100 (ver la Figura 1). Se le pide que “Marque dónde está 50 en la línea” y luego “Lo nombre como 50”. Del mismo modo, marque y nombre 25; 98; 62.

Figura 1: Línea numérica en blanco para la tarea de ubicar números

Respuestas y dificultades de los alumnos de bajo rendimiento

Una tarea de ubicar números requiere el conocimiento de la secuencia numérica. Ubicar los números de manera eficiente requiere el uso de ideas tales como:

- 50 a mitad de camino;
- 25 a mitad de camino a 50;
- 98 a dos pasos antes de 100; y
- 62 justo después de 60, que es diez después de 50.

Para hacer bien la tarea también se requiere el conocimiento de medida y proporción lineal que puede ser algo distinto del conocimiento de la secuencia numérica. Las dificultades de los alumnos con esta tarea indican una falta de conocimiento de la estructura secuencial y también de una medida lineal. Hemos encontrado que las respuestas de los alumnos son interesantes y revelan el conocimiento de su secuencia numérica. Cuatro ejemplos se discuten a continuación.

La respuesta de Reneé, que se muestra en la Figura 2, es típica. Parece que hay un cierto sentido de ubicación global: 50 está ubicado en la mitad; 25 está ubicado quizás a partir de un sentido de las décadas, o como la mitad de 50; 98 está probablemente cerca de 100, pero con un sentido débil de la medida de la separación de 2 pasos.

La respuesta más débil puede ser muy reveladora. Helen (ver Figura 2) encuentra 50 como "a mitad de camino", pero para ubicar 25, marca todas las unidades de 0 a 25. No cuenta en decenas, aunque sí enfatiza su punto "20". Su 25 termina casi en 50, y no está claro si lo considera problemático. Ubica 98 a dos pasos antes de 100, pero los pasos son demasiado grandes. Helen está usando un aspecto de la estructura numérica, pero no lo está comparando con otro aspecto, que es 98 como “8 más que 90”. Ella no parece tener un sentido global o incorporado de las estructuras de la secuencia. Para ubicar 62, Helen nuevamente cuenta de a uno. Cuenta desde 50 y enfatiza el punto “60” en el camino, mostrando cierta apreciación de cómo la estructura numérica puede apoyar su solución, pero no acorta el conteo de a uno.

Nate encuentra cada uno de sus números contando y marcando cincos (ver Figura 2). Ubica 98 después de contar hasta 95, y ubica 62 justo después de 60. No cuenta de a uno, pero no considera las décadas como puntos de referencia. Por el contrario, cuenta de cinco en cinco. Tal vez lo más llamativo es que, a diferencia de Helen, Nate encuentra 62 y 98 contando de cinco en cinco. Marca 98 justo antes de 100, pero no usa el 100 como referencia para ubicarlo. Parece preocupado por alinear los conteos sucesivos a 50 en la misma marca de 50, pero no cuenta desde 50, comienza de nuevo desde cinco cada vez. Su enfoque es análogo a contar todo, en lugar de *contar a partir de* para resolver una tarea de suma. Tanto Helen como Nate con frecuencia contaron de a uno con sus dedos para resolver tareas de suma, y ninguno pudo contar saltando de a diez fuera de las décadas. Sus respuestas en este grupo de tareas indican una falta de conocimiento de las estructuras de la secuencia numérica. Ambos alumnos recibieron instrucción intensiva de intervención individual después de estas evaluaciones. La instrucción no se enfocaba en tareas de ubicación de números, sino que involucraba una atención significativa en el conteo de a uno y de a diez, y en registrar en una línea numérica vacía, sumas usando una estrategia de salto. Cuando se evaluó la tarea de ubicar números después del período de intervención, Helen ya no marcaba los números y ubicó 25 de manera apropiada. La respuesta posterior a la evaluación de Nate se muestra en la Figura 2. Su lápiz se mueve en saltos de diez y de uno. Este aprendizaje que Nate demostró en su evaluación posterior se puede atribuir a la instrucción que se centró en registrar sumas con la estrategia de salto en la línea numérica. Él muestra un uso claro de la estructura de las décadas y ya no trabaja desde uno. Curiosamente, su conocimiento de la medida y proporción lineal también ha avanzado.

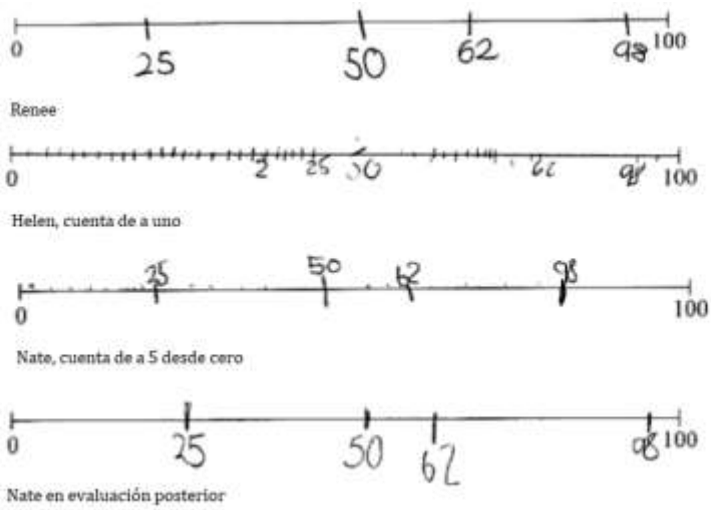

Figura 2: Ubicar números en la línea numérica

Por lo tanto, sin instrucción explícita sobre la ubicación de números, su amplio desarrollo del conocimiento de la secuencia numérica ha hecho diferencias significativas en sus respuestas en el grupo de tareas de ubicar números. Este grupo de tareas es muy útil porque puede revelar el conocimiento de la estructura de la secuencia numérica, diferenciar los niveles de comprensión y permitir documentar el aprendizaje a lo largo del tiempo.

Conclusión

Afirmamos que la estructura secuencial de los números es un conocimiento numérico básico importante. Abogamos para que el aprendizaje numérico de los alumnos incluya un foco en secuencias numéricas a 1000, contar “saltando” e incrementar diez fuera de las décadas y ubicar números en el intervalo de 1 a 100. Es sorprendente que muchos alumnos de tercer y cuarto grado (de 8 a 10 años) no tienen éxito en las tareas de evaluación descriptas en este informe. En nuestra opinión, una atención en la estructura secuencial ejemplifica un abordaje indicado para afrontar las dificultades de la aritmética (Dowker, 2005). Los estudios sugieren que la debilidad en estas tareas basadas en la secuencia es característica de los alumnos de bajo rendimiento (Beishuizen et al., 1997; Menne, 2001). Nuestro estudio está de acuerdo con esto. Recomendamos que estos alumnos sean evaluados en el conocimiento de la estructura secuencial y que la intervención incluya una atención explícita su desarrollo. Los cuatro grupos de tareas de evaluación discutidos en este informe pueden colaborar con la evaluación detallada de los alumnos respecto de su conocimiento de la secuencia numérica. Estamos desarrollando actividades de enseñanza para este tema en nuestro proyecto de investigación actual con alumnos de bajo rendimiento, probando, por ejemplo, incrementos y disminuciones flexibles de a diez y de a uno (Wright, Martland, Stafford y Stanger, 2002) y saltos en una línea numérica vacía (Menne, 2001). También estamos desarrollando actividades dirigidas al desarrollo de las estrategias mentales para sumar y restar basadas en la secuencia.

Ha habido una discusión considerable sobre las elecciones de los alumnos y del currículo entre estrategias basadas en colecciones y en la secuencia para sumar y restar (Beishuizen, 2001). Los estudios sugieren que los alumnos de bajo rendimiento pueden tener más éxito con las estrategias de suma basadas en la secuencia, como el salto, que con las estrategias basadas en colecciones, como la partición (descomposición) (Beishuizen, 1993). Es importante destacar que, si los maestros eligen enfatizar el “saltar”, es requisito que los alumnos desarrollen el conocimiento de la estructura secuencial (Menne, 2001). Además, independientemente de la elección de la estrategia aritmética (salto o descomposición) nuestro plan de estudios debe reconocer la importancia de la estructura secuencial como un aspecto básico del número.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo para este proyecto del Australian Research Council bajo la concesión LP0348932 y de la Comisión de Educación Católica de Victoria. Asimismo, los autores agradecen las contribuciones de Gerard Lewis y Cath Pearn (investigadores asociados) a este proyecto. Finalmente, los autores expresan su sincero agradecimiento a los profesores, alumnos y escuelas que participaron en el proyecto.

Dirección para correspondencia

Escuela de Educación, Southern Cross University, PO Box 157, Lismore NSW 2480, Australia Correo electrónico: Bob.Wright@scu.edu.au

Referencias

- Anghileri, J. (2000). *Teaching number sense*. London: Continuum.
- Anghileri, J. (2001). Intuitive approaches, mental strategies and standard algorithms. In J. Anghileri, J. (Ed.), (2001). *Principles and practices in arithmetic teaching – Innovative approaches for the primary classroom.* Buckingham: Open University Press.
- Askew, M.; Brown, M.; Rhodes, V.; Wiliam, D. & Johnson, D. (1997). *Effective teachers of numeracy: Report of a study carried out for the Teacher Training Agency*. London: King's College, University of London.
- Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch Second Grades. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(4), 294–323.
- Beishuizen, M. (2001). Different approaches to mastering mental calculation strategies. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arith metic teaching* (pp. 119–130). Buckingham: Open University Press.
- Beishuizen, M. & Anghileri, J. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal*, 24(3), 519–538.
- Beishuizen, M.; Van Putten, C. M. & Van Mulken, F. (1997). Mental arithmetic and strategy use with indirect number problems up to one hundred. *Learning and Instruction*, 7(1), 87–106.
- Cobb, P. (1991). Reconstructing elementary school mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(2), 3–22.
- Cobb, P.; Gravemeijer, K.P.E.; Yackel, E.; McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing: the emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D. Kirshner & J.A. Whitson (Eds.), *Situated Cognition Theory: Social, semiotic and neurobiological perspectives* (pp. 151–233).
- Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. Cooper, T.J., Heirdsfield, A. & Irons, C.J. (1995). Years 2 and 3 children's strategies for mental addition and subtraction. In B. Atweh & S. Flavel (Eds.), *Proceedings of the eighteenth annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 195–202). Darwin: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Hove, UK: Psychology Press.
- Foxman, D. & Beishuizen, M. (1999). Untaught mental calculation methods used by 11-year-olds. *Mathematics in School*, 5–7.
- Foxman, D. & Beishuizen, M. (2002). Mental calculation methods used by 11-year-olds in different attainment bands: A reanalysis of data from the 1987 APU Survey in the UK. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1–2), 41–69.
- Fuson, K.C.; Richards, J. & Briars, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. In C.J. Brainerd (Ed.), P*rogress in Cognitive development: Vol. 1 Children's logical and mathematical cognition* (pp. 33–92). New York: Springer-Verlag.
- Fuson, K.C.; Wearne, D.; Hiebert, J.; Murray, H.; Human, P.; Olivier, A.; Carpenter, T.P. & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, 130–162.

- Hiebert, J. & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 14(3), 251–283.
- Klein, A.S.; Beishuizen, M. & Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), 443–464.
- McIntosh, A.; Reys, B.J. & Reys, R.E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense*. For the Learning of Mathematics*, 12, 2–44.
- Menne, J. (2001). Jumping ahead: an innovative teaching program. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching – Innovative approaches for the primary classroom* (pp. 95–106). Buckingham: Open University Press.
- Olive, J. (2001). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational number of arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11(1), 4–9.
- Resnick, L.B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, 44, 162–169.

Ruthven, K. (1998). The use of mental, written, and calculator strategies of numerical computation by upper primary students within a 'calculator aware' number curriculum. *British Educational Research Journal*, 24(1), 21–42.

- Skwarchuk, S. & Anglin, J.M. (2002). Children's aquisition of the English cardinal number words: A special case of vocabulary development. *Journal of Educational Psychology*, 94(1), 107–125.
- Sowder, J.T. (1992). Making sense of numbers. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R.A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1–51). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Thompson, I. (Ed.) (1997). *Teaching and learning early number.* Buckingham: Open University Press.
- Thompson, I. & Smith, F. (1999). Mental calculation strategies for the addition and subtraction of 2-digit numbers (Report for the Nuffield Foundation). Newcastle upon Tyne: University of Newcastle upon Tyne.
- Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 21–56). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Treffers, A. & Buys, K. (2001). Grade 2 and 3– Calculation up to 100. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Children learn mathematics. The Netherlands: Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Wolters, G.; Beishuizen, M.; Broers, G. & Knoppert, W. (1990). Mental arithmetic: Effects of calculation procedure and problem difficulty on solution latency. *Journal of Experimental Child Psychology*, 49, 20–30.
- Wright, R.J. (1994). A study of the numerical development of 5-year-olds and 6-year-olds. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 25–44.
- Wright, R.J.; Martland, J. & Stafford, A.K. (2006). *Early numeracy: Assessment for teaching and intervention* (2nd ed.). London: Paul Chapman Publishing.
- Wright, R.J.; Martland, J. Stafford, A.K. & Stanger, G. (2002). *Teaching number: Advancing children's skills and strategies*. London: Paul Chapman Publishing.
- Yackel, E. (2001). Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of America. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching – Innovative approaches for the primary classroom* (pp. 15–31). Buckingham: Open University Press.