Los números también suben al podio

Ma. Cristina Covas y Ana Bressan

Contenidos: Los números metálicos. Propiedades. Presentación en distintos marcos, geométrico, algebraico y de análisis.

> *"…el hecho que los números metálicos aparezcan desde los sistemas usados en el Diseño de sus construcciones por la civilización romana antigua hasta los más recientes trabajos de caracterización de caminos universales al caos, los convierte en instrumentos invalorables para la búsqueda de relaciones viables cuantitativas entre la Matemática y el Arte". Vera Spinadel, 1995*

Cuando trabajamos con los alumnos es interesante mostrarles cómo contenidos de la matemática se relacionan con el mundo físico, social, tecnológico y también, dentro de la matemática misma. En este caso trabajaremos con los números metálicos, cuyo nombre puede ser una real motivación para iniciar el tema. Podemos comenzar por ejemplo, investigando las medidas en la naturaleza o trabajando con el Modulor de Le Corbusier basado en el Número de Oro, o el sistema de proporciones en las construcciones romanas fundado en el Número de Plata (En esta misma página consultar Rabino A., 2017a; Cuello P. y Rabino A., 2010). Esto puede despertar la curiosidad de los alumnos sobre estos números.

En la actualidad algunas propiedades comunes de los números metálicos son fundamentales en campos de la investigación sobre la estabilidad de sistemas físicos, las simetrías en los cristales, la estructura interna del ADN y las galaxias astronómicas (Spinadel, 2004)

Para el nivel secundario, las actividades que presentamos acá consisten en una forma de abordar algunos números irracionales (los metálicos) desde otra perspectiva distinta de la aritmética y estableciendo conexiones dentro de la matemática misma, usando distintos marcos (geométrico, algebraico y del análisis) para una mejor comprensión de sus propiedades.

Los números metálicos forman un conjunto de números irracionales (salvo el de cobre) que reciben nombres especiales relacionados con diferentes metales. Admiten representaciones geométricas, se generan a partir de las raíces positivas de la ecuación general de segundo grado de la forma $\mathbf{x^2 - \mathit{p}\, x - \mathit{q} = 0}$ (donde los parámetros *p* y *q* son números naturales), y su ubicación en coordenadas está dada por los puntos de intersección con el eje x de abscisas de las parábolas correspondientes. Además, coinciden con el límite en el infinito de la razón entre dos términos consecutivos de sucesiones del tipo de la de Fibonacci y se pueden expresar como fracciones continuas.

Entre los más nombrados están el **número de oro, plata, bronce, cobre, níquel y platino**. El siguiente cuadro da el valor aproximado de los mismos y las ecuaciones de donde proceden:

Número de	Valor	Ecuación
Oro (Φ)	1,618033989...	$x^2 - x - 1 = 0$
Plata(Θ)	2,414213562...	$x^2 - 2x - 1 = 0$
Bronce	3,302775638...	$x^2 - 3x - 1 = 0$
Cobre	2,000000000...	$x^2 - 1x - 2 = 0$
Níquel	2,302775638...	$x^2 - 1x - 3 = 0$
Platino	2,732050808...	$x^2 - 2x - 2 = 0$

Cuadro 1

En este artículo solo trabajaremos con los números de oro, plata y bronce que corresponden a la familia de números metálicos dada por la ecuación $x^2 + px + 1 = 0$ (con p natural), sin llegar a verlos como fracciones continuas. Sin embargo, es interesante saber que estos son los únicos números metálicos que admiten fracciones continuas (infinitas) de período puro, aunque acá no estudiaremos esta propiedad.

Actividad 1: Los números metálicos y los rectángulos

1a. Construye los rectángulos de oro, plata y bronce siguiendo las instrucciones que se dan a continuación:

I. Rectángulo de oro

- Construye un cuadrado ABFE en papel milimetrado por ejemplo de lado 1u =10cm (para facilitar la medición).
- Marca el punto medio del BF, lado inferior del cuadrado. Llama M a dicho punto.
- Une M con el vértice superior derecho E.

- Con centro en M y radio ME, traza un arco de circunferencia que corte a la prolongación derecha del lado BF. Llama C al punto de intersección del arco con esta prolongación.
-Traza por C una perpendicular a la prolongación del lado BF, hasta cortar a la prolongación derecha del lado AE en el punto D
- Queda así construido el **rectángulo áureo** ABCD. Puedes repetir el procedimiento con cuadrados de lado de diferente longitud.

II. Rectángulo de plata

- Construye dos cuadrados iguales, ABFE y EFHG, en papel milimetrado, de modo tal que el lado EF sea común a ambos. Por ejemplo, cuadrados de lado 1u =10cm (para facilitar la medición).
-Traza la diagonal FG del cuadrado EFHG.
- Con centro en F y radio FG, traza un arco de circunferencia que corte a la prolongación derecha del segmento BH. Llama C al punto de intersección del arco con esta prolongación.
-Traza por C una perpendicular a la prolongación del segmento BH, hasta cortar a la prolongación derecha del segmento AG en el punto D.

Queda así construido el **rectángulo de plata** ABCD. Puedes repetir el procedimiento con cuadrados de lado de diferente longitud.

III. Rectángulo de bronce

- Construye tres cuadrados iguales, ABFE, EFHG y GHJI, en papel milimetrado, de modo tal que el lado EF sea común a los dos primeros cuadrados, y el lado GH sea común al segundo y tercer cuadrado. Por ejemplo, lado de los cuadrados L = 1U= 10cm.
- Marca el punto medio del lado FH del segundo cuadrado. Llama M a dicho punto.
- Une M con I, vértice superior derecho del cuadrado GHJI.
- Con centro en M y radio MI, traza un arco de circunferencia que corte a la prolongación derecha del segmento BJ. Llama C al punto de intersección del arco con esta prolongación.
- Traza por C una perpendicular a la prolongación del segmento BJ, hasta cortar a la prolongación derecha del segmento AI en el punto D.

Queda así construido el **rectángulo de bronce** ABCD. Puedes repetir el procedimiento con cuadrados de lado de diferente longitud.

1b. A partir de la construcción de los rectángulos anteriores:

-¿Puedes establecer una correspondencia entre los lados de los rectángulos mayor y menor obtenidos en cada caso? ¿Por qué? ¿Cómo resultan estos rectángulos? (Prueba dibujándolos por separado, recortándolos y superponiéndolos; midiendo sus lados y relacionándolos; observando la coincidencia de diagonales, etc.).

- ¿Qué proporción puedes plantear entre los lados de los rectángulos mayor y menor en cada caso teniendo en cuenta que el lado de cada cuadrado es 1u? ¿Cuál es la razón de los lados correspondientes en cada caso? Compara con los valores del cuadro 1.

I. Rectángulo de Oro
II. Rectángulo de Plata
III. Rectángulo de Bronce

Actividad 2: Los números metálicos y las ecuaciones

2a. Como planteamos en la introducción, los números metálicos además de admitir representaciones geométricas, se generan a partir de ecuaciones cuadráticas.
Teniendo en cuenta la relación que obtuviste en el ejercicio anterior entre los lados mayor y menor de los rectángulos formados, usa la proporción que corresponde a cada caso y encuentra estas ecuaciones.
Ayuda: Considera en todos los casos $a = 1$; $b = x$ y $m = x-1$

2b. Ahora resuelve cada una de las ecuaciones cuadráticas obtenidas en el punto 2a.

¿Qué observas acerca de sus raíces positivas? (Compara con el cuadro 1). ¿Con qué números coinciden?

2c. Haz las gráficas correspondientes a estas funciones en un mismo par de ejes cartesianos y ubica estas números.

Actividad 3: Los números metálicos y los polígonos

3a. Dibuja un **pentágono regular** y traza sus diagonales (D). Considerando $L = 1$ establece el cociente entre D/L. Mide o calcula el valor de D. ¿Qué número metálico obtienes?

3b. Dibuja un **octógono regular** y considera el cociente entre el doble de su apotema (Ap) y el lado $L = 1$. ¿A qué número metálico corresponde?

Nota: Para el número de bronce no podrás encontrar un polígono regular asociado para el cual la razón entre la longitud de la diagonal y la del lado de ese polígono sea igual a ese número. (Redondo, 2007).

3c.Extensión: Prueba ahora con un hexágono regular haciendo el cociente entre una de las diagonales menores y el lado $L = 1$ y súmale 1. ¿Qué número metálico has obtenido? Ver cuadro 1.

Actividad 4: Los números metálicos y las sucesiones de Fibonacci

Los números metálicos son todos límites del cociente de dos números consecutivos de sucesiones del tipo de la de Fibonacci.

I. La sucesión clásica de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,… de modo que $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$. Desarrolla y calcula el límite de la razón entre dos términos consecutivos avanzados de la sucesión de la misma. ¿A qué número aproxima ese límite?

II. Ahora fabrica la sucesión $a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$ con $a_o = a_1 = 1$ y busca el límite para números avanzados de la misma. ¿A qué número aproxima el mismo?

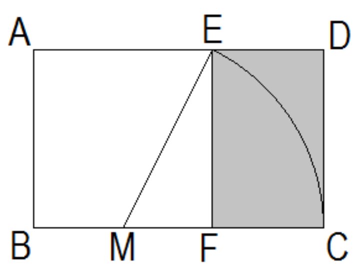
III. Ahora utiliza la sucesión 1, 1, 4,13, 43,142, 469…, conocida como *de Lucas,* matemático francés estudioso de las sucesiones generales de Fibonacci. ¿A qué número aproxima, por ejemplo, el cociente 469/142?

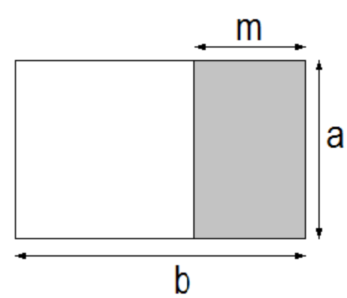
SOLUCIONES

Actividad 1 (por ítem)

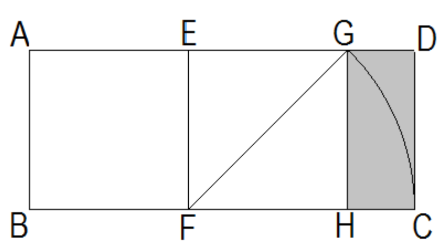
1a. Construcción de los rectángulos

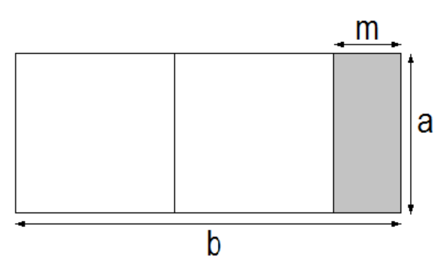
- Rectángulo de Oro





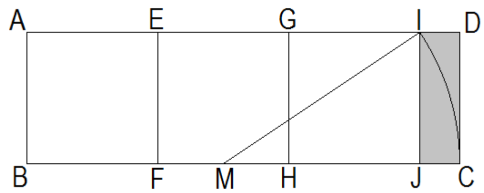
- Rectángulo de Plata

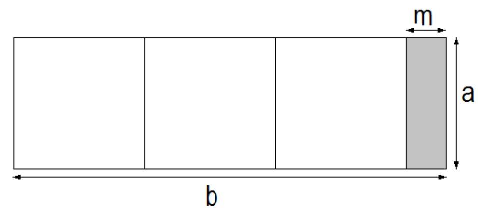




Nota: Si del rectángulo de plata quitamos un cuadrado, lo que nos queda tiene las dimensiones DIN.

- **Rectángulo de Bronce**





En todos los casos el rectángulo mayor resulta semejante al menor (sombreado).

Nota: En general, podemos construir el emésimo rectángulo metálico con proporciones 1:σm (m cantidad de cuadrados) y de forma que si eliminamos m cuadrados de lado 1, el mini-rectángulo que resulta es semejante al original.

1b. Relaciones entre los lados en los rectángulos mayor y menor

I. Rectángulo de Oro

A los efectos de simplificar las expresiones llamaremos *a* al lado menor y *b* al lado mayor del Rectángulo de Oro ABCD, y *m* al lado menor del rectángulo EFCD. Se obtiene la proporción: *b*/*a*=*a*/*m*= 1,618033989…).
Utilizando el teorema de Pitágoras, verificaremos que la relación entre el lado mayor y el lado menor, en ambos rectángulos, es igual al Número de Oro. (*b*/*a*=*a*/*m*= 1,618033989…)

$$b = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + a^2} = 1/2(1 + \sqrt{5}).\ a$$

b/a = ½ (1+√5) = 1,618033989…

m= $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$
a/m = 2/($\sqrt{5}$ -1) = 1,618033989…

II. **Rectángulo de Plata**

A los efectos de simplificar las expresiones llamaremos *a* al lado menor y *b* al lado mayor del Rectángulo de Plata ABCD, y *m* al lado menor del rectángulo GHCD.
Verificaremos que la relación entre el lado mayor y el lado menor, en ambos rectángulos, es igual al Número de Plata. (*b*/*a*=*a*/*m*= 2,414213562….)

$$b = a + \sqrt{(a^2 + a^2)} = \left(1 + \sqrt{2}\right)a$$

b/a = (1+$\sqrt{2}$) = 2,414213562….

m= ($\sqrt{2}$-1). a
a/m = 1/($\sqrt{2}$-1)= 2,414213562…

III. **Rectángulo de Bronce**

A los efectos de simplificar las expresiones llamaremos *a* al lado menor y *b* al lado mayor del Rectángulo de Bronce ABCD, y *m* al lado menor del rectángulo IJCD.
Verificaremos que la relación entre el lado mayor y el lado menor, en ambos rectángulos, es igual al Número de Bronce. (*b/a =a/m*= 3,302775638...)

$$b= \frac{3}{2}\ a\sqrt{(\frac{3}{2}a)^2 + a^2}\ = (3/2+½\ \sqrt{13}).a$$

b/a = 3/2+½$\sqrt{13}$= 3,302775638...

m= ½ $\sqrt{13 - \frac{3}{2}}\ . a$
a/m = 2 /$\sqrt{13 - \frac{3}{2}}$= 3,302775638…

Actividad 2

2a. Ecuaciones cuadráticas

Tendremos en cuenta las proporciones entre los lados de los rectángulos que analizamos en la actividad 1b.

I. **Rectángulo de oro.**

Si a=1 y b=x, determinaremos el valor de x, para el que se verifica la relación

x/1 = 1/(x-1) $\Rightarrow$ **x^2 - x - 1 = 0**.

II. **Rectángulo de plata**

Si a = 1 y b = x, determinaremos el valor de x, para el que se verifica la relación

x/1 = 1/(x-2) $\Rightarrow$ **x^2 - 2x - 1 = 0**.

III. **Rectángulo de bronce**

Si a=1 y b=x, determinamos el valor de x, para el que se verifica la relación

$x/1 = 1/(x-3) \Rightarrow$ $\mathbf{x^2 - 3x - 1 = 0.}$

2b. Solución ecuación cuadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

I. $x^2 - x - 1 = 0$
$x_{1.2} = (1 \pm \sqrt{1+4})/2$

La raíz positiva es **$x_1 = (1 + \sqrt{5})/2 =$ 1,618033989…**

II. $x^2 - 2x - 1 = 0$
$x_{1.2} = (2 \pm \sqrt{4+4})/2$

La raíz positiva es **$x_1 = (2 + \sqrt{8})/2 =$ 2,414213562…**

III. $x^2 - 3x - 1 = 0$
$x_{1.2} = (3 \pm \sqrt{9+4})/2$

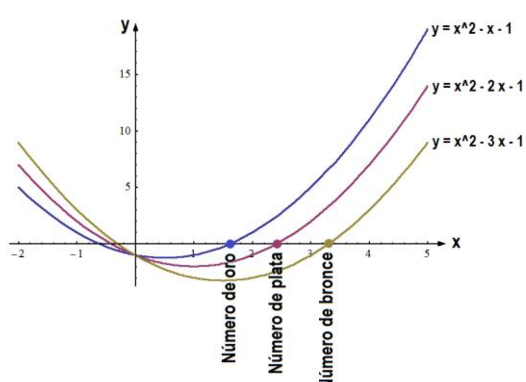
La raíz positiva es **$x_1 = (1 + \sqrt{13})/2 =$ 3,302775638…**

I. La raíz positiva de la ecuación I es x_1 =1,618033989…, coincidente con el **Nº de Oro.**

II. La raíz positiva de la ecuación II es x_1 =2,414213562…, coincidente con el **Nº de Plata**.

III. La raíz positiva de la ecuación III es x_1 = 3,302775638…, coincidente con el **Nº de Bronce.**

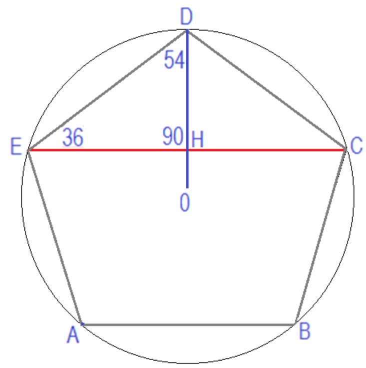
2c. Gráficas



Actividad 3

3a. Dibuja un pentágono regular y traza sus diagonales D. Considerando el L = 1 establece el cociente D/L. ¿Qué número metálico obtienes?

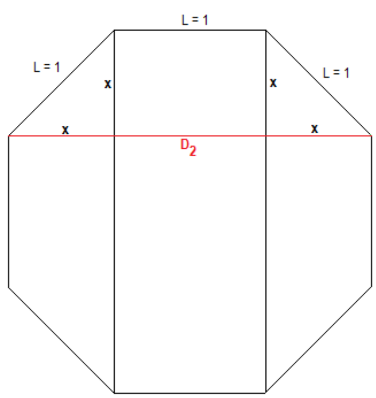
El valor de D lo puedes obtener en forma aproximada midiéndolo en tu dibujo o calculándolo teniendo en cuenta las propiedades de un pentágono regular.
(¡atención, vas a necesitar trigonometría!)



L= ED = 1 EH/ED= cos 36° = EH EC = 2 EH = 2. cos 36° = 2. 0,844327925…

D/1= 1,618033989…/1= 1,618033989…, coincidente con el **Número de oro.**

3b. Dibuja un octógono regular y traza sus diagonales. Considerando L= 1 establece el cociente de la segunda diagonal y el lado: $D_2/L=D_4/L$. ¿A qué número metálico corresponde?



Suponemos L= 1.Considerando los triángulos rectángulos de las esquinas de catetos igual a *x* e hipotenusa L = 1, obtenemos que

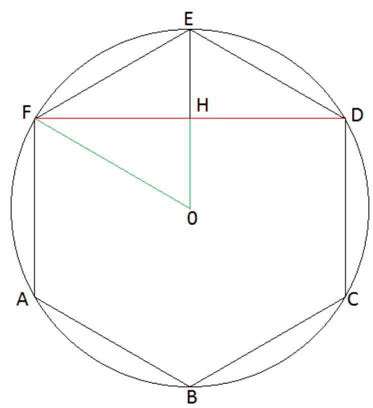
$x = \sqrt{1/2}$ y siendo

$D_2 = L + 2x$ obtenemos $D_2 = 2{,}414213562\ldots$

$D_2/L = D_4/L = 2{,}414213562\ldots$, coincidente con el **Número de Plata**

3c. Para el número de bronce no podrás encontrar un polígono regular asociado para el cual la razón entre la longitud de la diagonal y la del lado de ese polígono sea igual a ese número. (Redondo, 2007).

Extensión: Prueba ahora con un hexágono regular. ¿Qué número metálico has obtenido?



Sea L= 1. Dado que en el hexágono los radios son iguales al lado, se generan triángulos equiláteros donde la diagonal D_1 (FD)o D_3 son ejes de simetría. Usando el teorema de Pitágoras obtenemos que

$$D_1 = FD = 2\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$D_1 = D_3 = \sqrt{3} = 1{,}732050808\ldots$. Por lo tanto,

$D_1/L = D_3/L = 1{,}732050808\ldots\ldots$

Resulta así que el **Número de Platino** es $L + D_1 = 1 + 1{,}732050808\ldots = 2{,}732050808\ldots$

Actividad 4

I. Sucesión de Fibonacci asociada al Número de Oro

$a_{(n+1)} = a_{(n-1)} + a_n$, con $a_0 = a_1 = 1$

Calculamos los primeros términos de la sucesión S= {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...}.

Tomando de a dos términos consecutivos suficientemente alejados, obtenemos:

55/34 = 1,617647…
89/55 = 1,618181…
144/89 = 1,617977…
233/144 = 1,618055…

Entonces diremos que: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1{,}618\ldots$ aproxima **al número áureo.**

Φ (phi) = (1 + √5)/ 2 =**1, 618…** (Ver Rabino, 2017b)

II. Sucesión de Pell asociada al Número de Plata

$a_{(n+1)} = a_{(n-1)} + 2\,a_n$, con $a_0 = a_1 = 1$

Calculamos los primeros términos de la sucesión S= {1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, 1393, 3363,...}.

Tomando de a dos términos consecutivos suficientemente alejados, obtenemos:

239/99 = 2,4141414...
577/239 = 2,4142259…
1393/577 = 2,4142114…
3363/1393 = 2,4142139…

Entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1{,}3247179\ldots$ aproxima al **número de plata**.

Θ (theta) = 1 + √2 = **2, 4142…**

III. Sucesión de Lucas está dada por

$a_{(n+1)} = 3a_n + a_{(n-1)}$, con $a_1 = a_2 = 1$

Calculamos los primeros términos de la sucesión S= {1, 1, 4, 13, 43, 142, 469, 1549, 5116, 16897, 55807...}

Tomando de a dos términos consecutivos suficientemente alejados, obtenemos:

1549/469 = 3,3027718...
5116/1549 = 3,3027759…
16897/5116 = 3,3027756…
55807/16897 = 3,3027756…

En el límite el cociente de dos valores sucesivos aproxima a 3,302775638...que es el **Número de bronce**

Referencias

Rabino A. (2017a): ¿*La naturaleza sabe matemática o el hombre encuentra matemática en la naturaleza?* Ver en gpdmatematica.org.ar/recursos/problemas

Rabino A. y Cuello P. (2010). *Un número que no alumbra pero deslumbra*. Septiembre 2010. htpp//: gpdmatematica.org.ar/recursos/problemas/secundaria

Rabino, A. (2017 b) *Sucesiones: Naturaleza, Armonía y Matemática en Espiral.* Novedades Educativas. Marzo 2017. #315 año 29.

Redondo, A. (2007). *Polygons, diagonals and theBronze Mean.* Nexus Network Journal, Architecture & Mathematics, Vol. 9, nº2, pp.321-326. https://www.academia.edu/9505197/Polygons_Diagonals_and_the_Bronze_Mean?auto=dowload

Spinadel V. (2004). *La familia de números metálicos y el diseño.* Centro de Matemática y Diseño MAyDI Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. https://cumincad.architexturez.net/system/files/pdf/4856.content.pdf

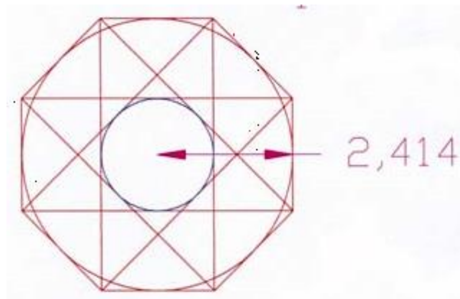
Recursos

Para construir y probar online:
http://agrega.educacion.es/repositorio/10062011/7b/es_2011061012_9194505/secundaria_metalicos8/metalicos8/actividad.html

ANEXO

El número de plata y el octógono

El número de plata está asociado a √2 y presenta una serie de propiedades.
√2 = 1,414213562
tg 22,5° = 0,414213562
tg 61,5° = 2,414213562
1/(2,4142...) = 0,4142...
2,4142... x 1,4142... = 3,4142...



En la figura se observa la relación de la circunferencia en color azul sobre la de color rojo.
Si el radio de la circunferencia azul es 1 el de la de color rojo es 2,4142....
Si el radio de la circunferencia azul es 0,4142... el de la roja es 1.
Contesta:

¿El número de oro está asociado a √5? ¿Y el de bronce? Justifica