GENERALIZACIÓN DE PATRONES: LA TENSIÓN ENTRE EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y LA NOTACIÓN ALGEBRAICA

Rina Zazkis y Peter Liljedahl

Educational Studies in Mathematics **49**: 379–402, 2002.

(Traducción realizada por María Fernanda Gallego. GPDM. 2007)

Abstract. Este estudio explora los intentos de un grupo de docentes principiantes[1], de escuela elemental de generalizar un patrón numérico visual repetitivo. Discutimos el pensamiento algebraico emergente y la variedad de formas en las cuales ellos generalizan y simbolizan sus generalizaciones. Nuestros resultados indican que la habilidad de los estudiantes para expresar generalidad verbalmente no estuvo acompañada por, y no depende de, la notación algebraica. Sin embargo, los participantes a menudo percibieron como inadecuadas sus soluciones completas y correctas que no incluían simbolismo algebraico.

1. *INTRODUCCION*

Los patrones son el corazón y el alma de la matemática. Sin embargo, a diferencia de la resolución de ecuaciones o la manipulación de enteros, la exploración de patrones no siempre se establece propiamente como un tópico curricular o actividad. Algunos docentes ven tal actividad como un enriquecimiento recreativo más que un núcleo curricular. Nosotros adoptamos la visión que el "álgebra, y de hecho toda la matemática, es sobre la generalización de patrones" (Lee, 1996, p.103). Por consiguiente creemos que es esencial en un estudio de matemática dirigir la atención de los estudiantes a los patrones subyacentes en una amplia variedad de temas matemáticos.

En este artículo describimos los intentos de un grupo de docentes principiantes de escuela elemental de generalizar un patrón numérico visual. Analizamos los caminos seguidos o abandonados por estos participantes, hacia expresar la generalidad y los obstáculos encontrados en estas rutas. De esta forma extendemos la investigación existente sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en general y sobre la aproximación de la generalización de patrones al álgebra, en particular.

1.1. ***Patrones***

Hay varios intentos para desarrollar en los estudiantes estrategias a diferentes niveles para encontrar patrones, desde jardín hasta la escuela secundaria (Ishida, 1997; Iwasaki y Yamagushi, 1997; Orton y Orton, 1999; Radford, 2000). La investigación distingue diferentes tipos de patrones - patrones numéricos, patrones pictóricos/geométricos, patrones en procedimientos de cálculo, patrones lineales y cuadráticos, patrones repetitivos, etc. En lo siguiente comentamos acerca de patrones repetitivos y patrones lineales.

Threlfall (1999) se focalizó en patrones repetitivos de una dimensión en los primeros años de la primaria. Patrones repetitivos son patrones con un ciclo repetido y reconocible de elementos, mencionado como "unidad de repetición". Por ejemplo, ABCABCABC...puede ser visto como un patrón repetitivo con 3 atributos y un ciclo de repetición, o unidad de repetición, de longitud 3; ABCabABCabABCab puede verse como un patrón repetitivo más complejo, con 3 atributos y un ciclo de longitud 5, en el cual no solo la letra sino también el caso es variado. Variar algunos atributos de los elementos (tales como tamaño, color, orientación, etc.) mientras otros se mantienen constantes, agrega complejidad al patrón repetitivo (Threlfall, 1999).

Entre las razones para trabajar con patrones repetitivos, Threlfall (1999), reconoce ideas de regularidad y secuenciación, y oportunidades para los docentes de dirigir la atención de los estudiantes a aspectos útiles de la experiencia. Además, Threlfall recomienda el uso de patrones repetitivos como un vehículo para trabajar con símbolos, un escalón conceptual al álgebra y un contexto para la generalización. Los chicos pequeños pueden lograr generar o completar patrones repetitivos usando una aproximación procedimental o rítmica. Sin embargo, como un escalón hacia

[1] N. del T. Preservice teacher:

la generalización y el álgebra, es esencial ver patrones particulares; esto es, percibir la unidad de repetición en un patrón repetitivo. Este objetivo puede no ser logrado si el trabajo con patrones repetitivos se hace solo en los primeros años de primaria, cuando los estudiantes no son capaces aún de lograr la percepción de una unidad de repetición.

Stacey (1989) enfocó su exploración sobre patrones lineales, presentados en forma pictórica como escaleras extensibles o árboles. Se les pedía a los participantes determinar el número de fósforos necesarios para hacer una escalera con 20 o 1000 escalones, o el número de luces en un árbol de Navidad de un tamaño dado.

Estos patrones son llamados "lineales" porque el elemento n^{mo} puede ser expresado como an+b. Stacey encontró que estos problemas eran motivadores para estudiantes de 13 años. La propiedad de diferencia constante fue ampliamente reconocida y permitió a los estudiantes encontrar el elemento n^{mo} de un patrón a partir del elemento $(n-1)^{mo}$. Sin embargo, en un intento de generalizar, un número significativo de estudiantes usó un método erróneo de proporción directa, es decir, determinar el elemento n^{mo} como el múltiplo n^{mo} de la diferencia. Stacey también reportó inconsistencias en el método elegido por estudiantes para tareas de "generalización próxima" (por ejemplo, encontrar el vigésimo término) y tareas de "generalización lejana" (por ejemplo, encontrar el término mil). Resultados similares fueron reportados por Zazkis y Liljedahl (2001, 2002) en su investigación de secuencias aritméticas con docentes novatos de escuela primaria. Es estos estudios se les daban a los participantes los primeros 4 o 5 elementos de una secuencia aritmética y se les pedía dar ejemplos de números grandes en esta secuencia y determinar si ciertos números pertenecían a la secuencia si se la continuaba indefinidamente. La proporción directa, o el enfoque de múltiplo de una diferencia, apropiada para secuencias de múltiplos (por ej. 3, 6, 9, 12,...) también se extendió a secuencias de "no múltiplos" (por ej. 2, 5, 8, 11,...).

Orton y Orton (1999) extendieron sus investigaciones de patrones lineales (secuencias aritméticas) a otras secuencias de números. Ellos reportaron la tendencia de los estudiantes a usar diferencias entre los elementos consecutivos en una secuencia como su método preferido. Este método fue extendido exitosamente a patrones cuadráticos tomando las segundas diferencias, pero condujo a un punto muerto en instancias como la secuencia de Fibonacci. Entre los obstáculos para una generalización exitosa Orton y Orton mencionaron la incompetencia aritmética de los estudiantes y su fijación en un enfoque recursivo. Si bien, se permitió a los estudiantes generar el próximo elemento en una secuencia en base al anterior, esta aproximación les impidió ver la estructura general de todos los elementos. Una aproximación recursiva también fue mencionada por English y Warren (1998) como una aproximación que los estudiantes preferían y a menudo revertían cuando se les presentaban patrones más desafiantes.

1.2. ***Generalización***

De acuerdo con Dorfler (1991) generalización es ambos "un objeto y un medio de pensamiento y comunicación" (p.63). Reconociendo la importancia de la generalización en la actividad matemática, varios investigadores identifican diferentes tipos de generalización. Dorfler distingue entre generalización empírica y generalización teórica. La generalización empírica está basada sobre el reconocimiento de características comunes o cualidades comunes de objetos. De acuerdo con Dorfler esto es considerado problemático en la educación matemática en términos de determinar cualidades que son relevantes para la generalización. Es decir, la generalización empírica es criticada por carecer de un objetivo común para decidir qué es esencial, siendo limitada, sin una posibilidad para generalizar más allá y en dependencia de ejemplos particulares. La generalización teórica, en contraste, es intencional y extensional. Comienza con lo que Dorfler hace referencia como un "sistema de acción", en el cual invariantes esenciales son identificadas y sustituidas por prototipos. La generalización es construida a través de la abstracción de invariantes esenciales. Las cualidades abstraídas son relaciones entre objetos, más objetos mismos.

Harel y Tall (1991) usan el término generalización para decir "aplicar un argumento dado en un contexto más amplio" (p.38). Ellos distinguen 3 tipos diferentes de generalización: (1) *expansiva*, donde el rango de aplicabilidad de un esquema existente es expandido, sin reconstruir el esquema; (2) *reconstructiva*, donde el esquema existente es reconstruido para ampliar el rango de aplicabilidad; y (3) *disyuntiva*, donde un nuevo esquema es construido cuando se mueve a un nuevo contexto. Es sabido que aunque una generalización disyuntiva puede aparecer como una generalización exitosa para un observador, falla por ser una generalización cognitiva que no considera los ejemplos anteriores como casos especiales del procedimiento general. De hecho, la generalización disyuntiva puede ser una carga para un estudiante débil, quien construye un procedimiento distinto para una variedad de casos antes que crear un caso general. Además, la generalización expansiva es cognitivamente más fácil que la generalización reconstructiva, pero puede ser insuficiente a largo plazo.

1.3. ***Generalización de patrones y álgebra***

La atención a los patrones es reconocida en su importancia como una introducción al álgebra. Mason (1996) describe "expresar generalidad" como una de las raíces, y rutas hacia el álgebra. El uso de patrones como una ruta para expresar generalidad se ha hecho popular en la década pasada dentro del currículum escolar de matemática en el Reino Unido (Orton y Orton, 1999). "Comprender patrones, relaciones y funciones" es un tema continuo del Álgebra en los Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM, 2000, USA) de todos los grados.

English y Warren (1998) recomiendan un enfoque de patrones para introducir una variable. Sostienen que, tradicionalmente, las variables son introducidas como incógnitas en ecuaciones, donde no poseen la naturaleza cambiante. Además, este enfoque da a los estudiantes la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones y registrarlas simbólicamente. Ellos sugieren que las actividades con patrones no necesitan terminar con el establecimiento del concepto de una variable, sino proporcionan una base concreta y útil para trabajar con símbolos.

Atender a la simbolización algebraica cuando se exploran patrones en el contexto del curso de álgebra elemental para adultos, fue uno de los principales focos del experimento de enseñanza reportado por Lee (1996). De acuerdo con Lee, el mayor problema para los estudiantes no estuvo en "ver un patrón" sino en percibir un "patrón algebraicamente útil" (p.65). Una vez que los estudiantes percibieron un patrón en una manera determinada, fue difícil para ellos abandonar su percepción inicial. Una visión flexible de patrones debería ser desarrollada para ayudar a los estudiantes a encontrar aquellos patrones que los conduzcan a la simbolización algebraica (Lee, 1996; English y Warren, 1998).

2. ***METODOLOGÍA***

2.1. ***La tarea***

El siguiente arreglo de números fue presentado a un grupo de docentes-estudiantes de escuela elemental.

1	2	3	4	
	8	7	6	5
9	10	11	12	
	16	15	14	13
17	18	19	20	
....				

Los participantes fueron invitados a explorar los patrones que identificaron en este arreglo y llevar un diario escrito de sus investigaciones. Ellos tuvieron dos semanas para completar la tarea y se les aconsejó trabajar en ella por lo menos media hora por día. Las siguientes preguntas intentaron proporcionar una guía inicial para sus investigaciones:

- *¿Cómo puede continuar este patrón?*

- *Supón que lo continúa indefinidamente. ¿Hay números que sabe con seguridad dónde estarán ubicados? ¿Cómo lo decide?*
- *¿Puede predecir dónde estará el número 50? ¿150? Y ¿qué sobre 86?, ¿187?, ¿392?, ¿7386?, ¿546?*
- *En general, dado cualquier número, ¿cómo puede predecir dónde aparecerá en este patrón? Explique la estrategia que propone.*

Se les pidió a los participantes registrar cuidadosamente sus procesos, dudas, conjeturas y los resultados de probarlos, sus frustraciones (si hubo) y logros. Se les pidió explícitamente y se esperó que presentaran el progreso en su pensamiento antes que dar una solución final. Además, se les sugirió que explicaran y justificaran cada afirmación matemática que hicieran. El uso de formalismo algebraico no fue requerido ni asumido por el estilo de la tarea.

Después del examen inicial de los protocolos, cuatro participantes fueron invitados a una entrevista clínica. Las entrevistas intentaron probar y clarificar varias afirmaciones dadas, pero no justificadas, en su trabajo escrito.

2.2. ***<u>Análisis de la tarea</u>***

Es bien sabido que una secuencia no finita de elementos genera especialmente el próximo término (e.g Mason, 2002). Un arreglo finito de 20 números puede ser extendido en una variedad de maneras, cada una preservando alguna regularidad. Sin embargo, algunas extensiones pueden ser percibidas como más naturales que otras. Por ejemplo, el próximo elemento en la secuencia de 1, 2, 3, 4, 5, 6....puede ser 727 si la secuencia está definida por a_0= (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) + n, o 7 si la secuencia está definida por a_0= n. Nosotros sugerimos que la última extensión es más natural que la anterior. En nuestro estudio el arreglo fue extendido de la misma manera por todos los participantes. En lo que sigue nosotros solo nos ocupamos de esta extensión naturalº.

El arreglo numérico presentado a los participantes tiene una combinación de características de patrones mencionadas en la literatura. Sus elementos son números en una disposición predeterminada y la ubicación de un número en esta disposición es un componente integral del arreglo. Por consiguiente, puede ser percibido como un patrón numérico y un patrón visual. Tomadas separadamente, las columnas derecha, izquierda y media (etiquetadas A, E y C respectivamente) presentan secuencias aritméticas, que en el contexto de los patrones, están referidas a patrones lineales. Además, observando cada segunda columna, uno puede detectar también, un patrón lineal en las columnas B y D.

Además, nosotros identificamos en este arreglo características de un patrón repetitivo. Sin embargo, no es un patrón repetitivo en alguna forma convencional. Hay un nivel de complejidad agregado haciendo la unidad de repetición implícita, o parcialmente implícita. Es decir, lo que es explícitamente repetitivo es la estructura visual. Considerando la estructura visual e ignorando los números, nosotros atendemos a la forma que se repite cada 2 líneas o cada 8 elementos.

A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	2	3	4			0	0	0	0	
	8	7	6	5	⟹		0	0	0	0
9	10	11	12			0	0	0	0	
	16	15	14	13			0	0	0	0
17	18	19	20			0	0	0	0	
.....						...				

Aunque los números mismos no se repiten, aplicando la misma transformación en cada elemento se produce un ciclo repetitivo explícitamente reconocible. Esta transformación reemplaza cada elemento en el arreglo por su resto en la división por 8.

A	B	C	D	E
1	2	3	4	
	8	7	6	5
9	10	11	12	
	16	15	14	13
17	18	19	20	

$\Rightarrow$

A	B	C	D	E
1	2	3	4	
	5	6	7	8
1	2	3	4	
	5	6	7	8
1	2	3	4	

Atender a esta característica nos permite determinar la ubicación de cualquier número natural en el arreglo. Por ejemplo, considerando el número 548 vimos que 548: 8=64. Resto 4. Por consiguiente la columna de ubicación de 548 es la misma que la del 4 (columna D). Además, concluimos que 548 se encuentra en el 69mo conjunto de 8 o en la fila 137mo del arreglo.

La actividad relacionada con patrones predominante para los estudiantes en la escuela es extender una secuencia numérica y encontrar el término general, con el objetivo de expresarlo algebraicamente. Esto es, dada la posición en una secuencia, el objetivo es determinar el elemento correspondiente. Definir tal elemento $t_{(n)}$ como una función de su posición n expresando generalidad con simbolismo algebraico convencional. La tarea discutida en este artículo agrega complejidad en dos conteos. Primero, lo que constituye una posición no está predeterminado. La presentación de números plana antes que secuencial invita a considerar una posición como un par ordenado de números, especificando tanto (columna, fila) o (lugar dentro del conjunto, ordinal del conjunto). Segundo, la tarea puede ser considerada como una "tarea inversa" en tanto se revierten los roles usuales de lo que es dado y lo que es encontrado. A diferencia del objetivo usual de encontrar el elemento en cualquier lugar dado, la tarea es ubicar una posición para cualquier elemento. En lo que sigue presentamos una posible manera de formalizar la descripción general del arreglo.

Para formalizar la definición de una posición de un número, podríamos mirar primero el arreglo (infinito) como compuesto de conjuntos de 8 elementos, donde el lugar de cada número en un conjunto corresponde al lugar de uno de los primeros 8 números. Por ejemplo, el número 17 está ubicado en el lugar del número 1, conjunto 3; y el número 13 está ubicado en el lugar del número 5, conjunto 2. Definimos Posición como una función del conjunto de números naturales al conjunto de pares ordenados, como sigue:

Posición: $N \longrightarrow Z_8 \times N$*, donde N es un conjunto de números naturales y* $Z_8 = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ *es el conjunto de restos en la división por 8.*

Posición(n)= (lugar dentro del conjunto(n), ordinal del conjunto(n))

Lugar dentro del conjunto(n)=R(n,8)

$$\text{Ordinal del conjunto } (n) = \begin{cases} 1 + Q(n,8) & \text{si } R(n,8) \neq 0 \\ Q(n,8) & \text{si } R(n,8) = 0 \end{cases}$$

donde R(n,8) y Q(n,8) son el resto y el cociente de n en la división por 8 respectivamente.

Nosotros reconocemos que una interpretación de la posición como fila y columna puede aparecer como un patrón más natural. Esta visión puede ser formalizada así:

$$\text{Columna } (n) \begin{cases} A \text{ si } R(n,8) = 1 \\ B \text{ si } R(n,8) = 2 \text{ ó } 0 \\ C \text{ si } R(n,8) = 3 \text{ ó } 7 \\ D \text{ si } R(n,8) = 4 \text{ ó } 6 \\ E \text{ si } R(n,8) = 5 \end{cases}$$

O registrado de una forma más concisa:

Columna (n) = Mapa (R(n,8)), donde Mapa(1,2,3,4,5,6,7,0)= (A,B,C,D,E,D,C,B)

$$Fila(n) = \begin{cases} 2 \times Q\,(n,8) & si\ R(n,8)= 0 \\ 2 \times Q\,(n,8)+1 & si\ R(n,8)= 1,2,3,4 \\ 2 \times Q\,(n,8)+2 & si\ R(n,8)=5,6,7 \end{cases}$$

Esta simbolización además clarifica la distinción hecha por Lee entre "ver un patrón" y percibir "un patrón útil algebraicamente". La flexibilidad en percibir un patrón ayuda a elegir una manera que conduce más fácilmente a una notación formal. Nosotros enfatizamos que este, o un formalismo similar no fue esperado ni requerido a los participantes. Presentamos el mismo para resaltar una complejidad que está involucrada en avanzar de una descripción verbal a símbolos formales.

Teniendo una solución predeterminada en mente, inicialmente planeamos investigar cómo los participantes sacaban ventaja de las ideas relacionadas con divisibilidad o división con resto en su exploración del arreglo. Sin embargo, frente a la riqueza de los enfoques de los participantes, hemos extendido nuestro foco inicial.

En nuestro análisis de los 36 registros de resolución del problema y las 4 entrevistas clínicas tratamos las siguientes cuestiones:

- ¿Qué patrones fueron encontrados y reconocidos en la estructura de números dada? ¿Cuáles fueron las tendencias y los obstáculos comunes?
- ¿Qué patrones fueron generalizados y cómo es posible describir los diferentes tipos de generalización que se dieron?
- ¿Qué medios fueron usados para expresar generalidad?

3. ***RESULTADOS Y ANÁLISIS***

La complejidad del arreglo numérico y el método de recolección de datos dieron como resultado un conjunto rico y diverso de abordajes de solución. Lo que sigue es un análisis de los resultados organizados de acuerdo a los temas que emergieron en el trabajo de los participantes. Describimos las soluciones de los estudiantes, sus trayectorias hacia las soluciones, y sus percepciones de aceptabilidad de las soluciones generadas. Discutimos el pensamiento el pensamiento algebraico de los estudiantes, el uso del simbolismo algebraico y la interrelación entre ambos.

Ser capaz de continuar un patrón puede ser tomado como una comprensión de un patrón de repetición. Ser capaz de describir el elemento "general" puede ser considerado como una solución de un patrón lineal.

En nuestro caso, les pedimos a los estudiantes determinar la ubicación de cada número entero. La siguiente pregunta dirigió a los estudiantes hacia tal generalización:

En general, dado cualquier número entero, ¿cómo puede uno predecir dónde aparecerá en este patrón? Explique la estrategia que propone.

No suministramos a los estudiantes ninguna instrucción específica de la interpretación de "dónde". Solo tres estudiantes usaron una estructura relacionada directamente con el cálculo de cociente y resto; ellos respondieron a la pregunta "dónde" con un par de números, designando el ordinal del conjunto de 8 y el lugar en tal conjunto. Como un ejemplo, el número 15 es encontrado en el segundo conjunto (de 8 números), séptimo lugar. El resto de los estudiantes. Sin embargo, interpretaron "dónde" como un par de números especificando la fila y la columna. En este caso el número 15 es encontrado en la fila 4 y en la columna 3 (columna C).

Sin embargo, ser capaz de determinar fila/columna o conjunto/posición de cualquier número no siempre satisfizo a los participantes. Durante su primer intento, Myra determinó que "los múltiplos de 8 estaban al final de los conjuntos". Ella había mostrado que "50 dividido 8 es igual a 6.25, por consiguiente 50 es dos números en el séptimo conjunto". Más tarde afirmó que "con mi solución actual, puedo ubicar cualquier número en el patrón". Myra no consideró que esto completaba su solución. Ella afirmó, "Aunque tengo una respuesta al problema, tiene que haber una solución más fácil". La búsqueda de una solución más fácil, fue, al principio, desalentador para Myra. Ella declaró, "No he sido capaz de llegar a cualquier atajo para resolver este problema. Estoy segura que hay alguna clase de "fórmula" para resolverlo rápidamente, pero no la he encontrado".

Después de cierta persistencia Myra se dio cuenta que "cada conjunto empieza con 1+múltiplo de 8" y sugirió una solución encontrando el primer número en un conjunto y contando. El "primer número en un conjunto" fue encontrado dividiendo por 8, "redondeando por defecto a un entero" donde era necesario, y sumando 1. Su resumen de la solución fue presentada así:

- *a dividido 8 = b (necesita ser un número entero, si es un decimal, el número debería redondearse por defecto, este número indica la cantidad de conjuntos completos de 8).*

- *b x 8 + 1= el primer número en el conjunto.*
- *contar hasta el número que ha sido seleccionado (a).*

Myra encontró su segunda solución "mucho más fácil". Nosotros nos preguntábamos qué dejó a Myra insatisfecha con su primera solución y mucho más feliz con la segunda. Podría haber sido una combinación de dos cosas. La segunda solución atiende al primer elemento en cada unidad de repetición, y como tal podría parecer más accesible. Además, la segunda solución de Myra introdujo simbolismo algebraico, lo cual estaba ausente en su primera solución. Irónicamente, puede haber satisfecho su búsqueda de una "fórmula" y dado a su solución una percibida validez matemática.

Myra ejemplifica una tendencia común entre los participantes. La búsqueda de una solución es la búsqueda de una fórmula simple que determinará la ubicación de cualquier número dado. Las soluciones por casos o soluciones que no incluyen formalismo algebraico a menudo dejan en los participantes un sentimiento de imperfección.

3.2. ***Reconocer patrones***

Como afirmaron Orton y Orton (1999) en su investigación de las habilidades de los chicos sobre patrones, la habilidad de continuar un patrón llega mucho antes que la habilidad para describir el término general. Con el arreglo numérico específico en cuestión, la habilidad para pensar una forma de extender el arreglo no se traduce fácilmente en la habilidad para determinar el lugar de cualquier elemento de la extensión dado. Una importante cantidad de reconocimiento de patrones se dio en los intentos de los participantes para progresar hacia una solución generalizada. Los participantes reconocieron y describieron patrones, sin embargo, al menos inicialmente no tuvieron la apreciación de cuál ruta era beneficiosa de seguir. Como Shirley señaló, "Estoy realmente insegura a dónde ir con esto. Veo tantos patrones, todavía, no sé cómo usarlos".

Casi todos comenzaron la exploración recapitulando la estructura visual del arreglo. Se hizo referencia a "derecha/izquierda filas marcadas,", "como una serpiente", "como S" o "zig-zagueando". Una observación predominante se refirió a los números pares e impares. El hecho de que números pares están en la columna B y D, y los números impares están en las columnas A, C y E fue reconocido fácilmente. (Sin considerar la elección de los participantes de referencia para etiquetar las columnas, usamos letras por consistencia). La elección entre B y D para pares y entre A, C y E para impares fue significativamente la más demandada.

La observación de diferencias entre números consecutivos en las columnas fue otro foco predominante de atención. La diferencia constante de 8 en las columnas A y E también como la diferencia constante de 4 en la columna C fue, para la mayoría, el primer patrón descripto por los participantes. Además, las diferencias alternativas de 2 y 6 fueron identificadas en las columnas B y D. Algunos participantes generalizaron estas observaciones disyuntivas fijándose que 4+4=8 y también 2+6=8 y la diferencia constante de 8 persistía en cada columna cuando se saltaba a cada segunda fila. Sin embargo, la atención a las diferencias no suministró el ímpetu hacia la generalización multiplicativa. En cambio, se creó un foco sobre el razonamiento recursivo discutido en el trabajo previo sobre patones repetitivos (Orton y Orton, 1999; Lee y Warren, 1998). "En la fila A yo pude contar de a 8 para encontrar un número, sin embargo, esto podía llevar mucho tiempo para un número grande"; resumió Shirley. "Si es impar, sé que no podré encontrarlo en las columnas A, C o E. Yo podía comprobar si un número encaja en las columna A o E restando 8 hasta que el último número en mi patrón era descubierto. Sé que esto es demasiado tedioso. Yo podía comprobar el número de la mitad restando 4 hasta llegar al número deseado", sintetizó Kate. Estas afirmaciones demuestran la dominancia del abordaje recursivo que impide que los estudiantes desplacen su atención a la estructura general. La dominancia exhibida del pensamiento aditivo y la falta de conexión entre las estructuras aditiva y multiplicativa es consistente con los hallazgos de la investigación anteriores. (e.g Zazkis y Campbell, 1996).

Los patrones fueron también reconocidos usando determinados puntos de referencia. Por ejemplo, la estructura de múltiplos de 10-esto es, 10 en la columna B, 20 y 30 en la columna D, 40 y 50 en la columna B, 60 y 70 en la columna D, etc., fue determinada a menudo. Para algunos alumnos le sirvió como un atajo para contar hasta el número deseado, mientras que para otros fue "un interesante patrón que no ayudará". Otro foco interesante de atención estuvo sobre los múltiplos de 25, a los que Carol hizo referencia como "números principales". Pat se dio cuenta que los múltiplos consecutivos de 25 crean el siguiente patrón en sus columnas ABCDEDCBABC....Las soluciones de Carol emplearon un uso flexible de múltiplos de 10 o 25, lo cual fue más tarde cambiado a la estrategia dar vuelta al, discutida en más detalle en la próxima sección.

Sin embargo, reconocer un patrón no siempre condujo a una solución. Por ejemplo, Chris encontró que "la columna B tiene todos múltiplos de 8, pero esto no ayuda a encontrar todos los números en esta columna". Ella más tarde notó que todo número en la columna A puede ser escrito como 8 x [ ] +1. Sin embargo, escribió, esto "solo me ayuda a averiguar si un número está o no en la columna A, no me ayuda a ubicar números en otras columnas". Chris no se dio cuenta cómo la posición de cada número puede ser determinada basada sobre la información que ella había demostrado.

Lee (1996) mencionó que los estudiantes participantes en su estudio tenían dificultad, no en reconocer un patrón, sino en reconocer un patrón algebraicamente útil. Chris determinó un patrón que nosotros consideramos "algebraicamente útil", pero falló en apreciar su utilidad. Por otro lado, los estudiantes que se focalizan en puntos de referencia al principio fueron capaces de desarrollar soluciones completas a partir de los patrones que nosotros no apreciamos al inicio como "útil". Por consiguiente sugerimos que la "utilidad" de un patrón identificado está mejor considerada como un espectro, más que como una dicotomía. Además, la "utilidad" no es una característica de un patrón sino una percepción del observador.

3.3. ***¿Qué números son familiares?***

En la entrevista clínica se les presentó a los estudiantes una ligera variación del arreglo original. Se les pidió considerar lo siguiente:

	1	2	3	4
8	7	6	5	
	9	10	11	12
16	15	14	13	
	17	18	19	20

....

Fue una visión unánime que esta variación era más fácil que la original. La razón para esta percepción está ejemplificada por los comentarios de Shirley:

Shirley: Estos son [Shirley agregó dos filas más y señaló los números en la columna de la izquierda] la tabla del 8.
Entrevistador: ¿Cómo te puede ayudar a encontrar la ubicación de un número?, toma el 187 por ejemplo.

Shirley: ¿Qué hay de veces 8? 180-no, 182-no, 184-sí. Entonces 184 está en esta columna a la izquierda, luego continúo para la derecha, 185, 186, 187, entonces estará aquí [Shirley señala la columna D].
[...]
Entrevistador: Voy a regresar al original. Mirá la columna de la izquierda. ¿Qué notas sobre los números?
Shirley: Son 8 aparte.
Entrevistador: ¿Algo más?
Shirley: Son todos pares.
Entrevistador: ¿Algo más?
Shirley: Realmente no. No hay patrón de 8 o de 9 o algo. Solo la diferencia de 8 cada vez.

Shirley sugirió que podía localizar fácilmente cada número considerando el múltiplo de 8 más cercano. Sin embargo, no fue capaz de adaptar esta estrategia para el arreglo original. Investigación anterior sobre la comprensión de los estudiantes de secuencias aritméticas esbozó una percepción similar: En secuencias de múltiplos los estudiantes fueron capaces de reconocer invariantes multiplicativas (la esencia de ser un múltiplo) y aditivas (diferencias constantes). En secuencias de "no múltiplos" solo fue reconocida la invariante aditiva (Zaakis y Liljedahl, 2001).

Orton y Orton (1999) mencionan la incompetencia aritmética como uno de los obstáculos en la generalización de patrones. Podía ser el caso, que una mayor competencia con números y su posible composición aritmética, ayudaría a Shirley a darse cuenta que no hay "solo una diferencia de 8 cada vez", sino también una relación multiplicativa incluida.

3.4. ***¿Qué es la unidad de repetición?***

La percepción de la unidad de repetición es crucial en "ver" patrones repetitivos. (Threlfall, 1999). En esta sección describimos unidades de repetición identificadas por los participantes y los atributos que podrían haber influenciado su percepción.

Como se dijo antes, la estructura visual del arreglo se repite cada dos filas o cada 8 elementos. Consecuentemente, el ciclo de restos en la división de los elementos por 8 genera el patrón numérico repetitivo implícito. Sin embargo, solo tres de los participantes atendió a esta unidad de repetición como un tema organizador de su solución. Varios enfoques alternativos fueron preferidos.

Atender a la estructura organizadora de "4 números en una fila" fue uno de los métodos de solución más popular, sugerido por 22 participantes. Dan escribió, "Nosotros debimos ser capaces de usar múltiplos de 4, un múltiplo de 4 es el número más grande en cada fila, cualquier número que no es múltiplo de 4 aparecerá en la misma fila con el próximo múltiplo de 4 más grande que el número". La mayoría de la soluciones circularon alrededor de la idea de grupos de 4 y asignaron la fila y la columna basada en la identificación del número ordinal de una fila y su dirección/marca. (En la sección 3.7 se dan más detalles: Rutas hacia la generalización). En este caso, la atención a 4 elementos en una fila y una organización familiar fila/columna, impidieron a los participantes darse cuenta que podía considerarse como una estructura más general, una unidad de repetición de 8.

Otra estrategia popular, usada por 8 de los 36 estudiantes, fue considerar 100 números como unidad. Aunque solo un estudiante cometió el error de pretender que sumando 100 a un número no cambiará su posición, esto es, x está en la misma columna que 100+x, los siete estudiantes restantes identificaron que un incremento de 100 moverá el número a la columna "opuesta" (A y E, B y D fueron consideradas como pares de "columnas opuestas", y C fue considerada la opuesta de sí misma). El patrón percibido fue descripto por los estudiantes como "flipping" cada 100 números. Por consiguiente, para determinar una posición en la columna de un número grande (por ej. 7386), los estudiantes primero identificaban la posición del número determinada por los dos últimos dígitos (86 está en la columna D). A partir de allí algunos estudiantes contaban simplemente por flipping cada 100 entre las columna D y B. Un abordaje más sofisticado en esta línea sugirió ignorar los dígitos correspondientes a unidades de mil, explicando que sumar 100 no cambiará la posición del número. Sorpresivamente, nadie vio al 200 como unidad de repetición, en vez del 100 como unidad de "repetición y flipp".

La unidad de repetición identificada por Celia merece cierta atención. Celia alegó que el patrón se repite cada 40 números. Su estrategia inicial en ubicar números grandes estuvo basada en sustraer múltiplos de 40 hasta que el resultado era más chico que 40 y en determinar la posición de acuerdo a este resultado. Ella mejoró después su estrategia considerando el cociente y el resto en la división por 40. Por ejemplo:

392 : 40 = 9, resto 32,
32 está en la columna B, fila octava, por consiguiente 392 está en la columna B, fila 98.

Durante la entrevista Celia explicó que 98 era el resultado de 90+8, como 40 números toman 10 filas, y el cociente de 9 le indicaba que "había 9 conjuntos de 40 (antes del último conjunto de 32) que ocupaban 90 filas". Apreciando la seriedad y originalidad de esta solución, el entrevistador deseó explorar si Celia podía identificar una unidad diferente de repetición, más chica. Celia insistió en trabajar con 40 como el "ciclo más chico posible". Después de probar considerablemente se hizo claro que la atención de Celia estaba focalizada sobre el patrón de los últimos dígitos en la columna A: 1, 9, 7, 5, 3 alternando con espacios en blanco, en la primeras 10 líneas. El número 41 está ubicado "atrás en el comienzo del patrón", según Celia. En las próximas 10 líneas, o 40 números, se repite este patrón. Como los estudiantes en el estudio de Lee (1996), Celia fue reacia a abandonar su percepción inicial. Con esta fijación en el último dígito cualquier otro abordaje le pareció defectuoso.

3.5. ***Símbolos algebraicos y generalización algebraica***

Marge comenzó su investigación asignando letras a los números. Ella asignó *a* y *b* al primero y último número en la primera fila, *c* al primer número en la segunda fila, *d* y *e* al primero y último número en la tercer fila, y *f* al primer número en la cuarta fila. Registró después las siguientes ecuaciones, junto con la sustitución numérica como justificación:

$b+4=c$ (4+4=8)
$c+1=d$ (8+1=9)
$e+4=f$ (12+4=16)

Ella continuó el arreglo para 32 filas y trató de verificar qué ecuaciones eran aplicables. Este pareció ser un final muerto. Marge reflexionó después sobre este intento, recordando "Me encontré tan ocupada en la construcción de la tabla que realmente no presté mucha atención a los patrones obvios..." Entonces Marge abandonó su estrategia de construcción de ecuaciones y continuó atendiendo a los "patrones obvios" en la división por 4.

Mason (1996, p.75) dio un ejemplo (problema medieval de huevos) de estudiantes que se precipitaron construyendo ecuaciones con incógnitas, pero fueron incapaces de hacer algo con sus ecuaciones. "Este es un algoritmo buscando pregunta, no una simple pregunta de álgebra"- afirmó Mason para explicar por qué la manipulación de símbolos no era una estrategia apropiada. Nosotros hacemos una observación similar. Los símbolos de Marge no fueron útiles como "este es un patrón buscando pregunta, no una simple pregunta de álgebra". Otro ejemplo de simbolización sin significado podría verse en el trabajo de Ann. En el comienzo de su investigación Ann reconoció el "patrón +8" en las columnas A y E. Ella registró que los números en la columna A pueden escribirse como 1+8r, mientras que los números en la columna E pueden escribirse como 5+8r. (Ella no especificó qué representaba r). Sin embargo, esta observación no resultó una pista fructífera para Ann. Ella continuó en direcciones alternativas. El próximo día de su investigación ella reportó con entusiasmo, "Eureka! Los números en la columna A son 1 más que múltiplos de 8!" Este hallazgo le permitió primero determinar si un número dado está o no en la columna A y además ser capaz de encontrar la posición de cualquier número considerando un número cercano en la columna A. Por ejemplo, para ubicar el 86, Ann consideró 89, el cual es "1 más que un múltiplo de 8", y luego contó hasta 86 para determinar su posición en la columna D.

La toma de conciencia de Ann de la estructura general de números en la columna A fue significativamente atrasada comparada con su habilidad para describir números en la columna A como 1+8r, la expresión obvia de celebración en su Eureka! muestra que la generalización verbal resultó a partir de considerar los números mismos, antes que la expresión 1+8r generada anteriormente. El simbolismo algebraico fue el resultado de un intento para adaptar una fórmula, pero originalmente estos símbolos no tuvieron ningún significado. La generalización significativa, y por consiguiente la habilidad para "resolver un patrón", fue expresada verbalmente, y no fue conectada a los símbolos usados previamente.

3.6. ***<u>Conexión de diferentes representaciones</u>***

English y Warren (1998) sugieren que la comprensión de la noción de equivalencia y el reconocimiento de equivalencia en generalizaciones es importante en el trabajo con patrones.

El resto en la división por 8 parece ser un indicador obvio de las 8 opciones posibles de ubicación. Además, la consideración del resto en la división por 4 (4 resultados posibles), junto con la paridad o imparidad de un cociente también genera 8 opciones posibles de localización. Como se dijo anteriormente, la mayoría de los estudiantes se focalizó en la división por 4 antes que 8. La equivalencia entre las dos perspectivas no fue reconocida, aún por estudiantes conscientes de ambas opciones.

Andy pronto se dio cuenta en su investigación que las columnas A, C y E contienen números impares, mientras que las columnas B y D contienen números pares. Más tarde, ella presentó una nueva observación: los números en la columna D eran "dobles". Ella ejemplificó esta observación mostrando que 4= 2+2, 6=3+3 12=6+6, etc. La equivalencia de nombrar números como pares y reconocerlos como dobles no fue advertida.

Dan resumió su solución de la siguiente manera:

Si 8l x entonces x está en la columna B
Si 8l (x+1) entonces x está en la columna C
Si 8l (x+2) entonces x está en la columna D
Si 8l (x+3) entonces x está en la columna E.

Si 4l x pero no 8, entonces x está en la columna D
Si 4l (x+1) pero no 8, entonces x está en la columna C
Si 4l (x+2) pero no 8, entonces x está en la columna B
Si 4l (x+3) pero no 8, entonces x está en la columna A

No está claro por qué Dan abandonó el análisis presentado en las primeras 4 líneas de su solución, donde determinó la columna de un número basándose en cuán lejos estaba de un múltiplo de 8. El podría haber continuado la misma línea de razonamiento, sosteniendo que si 8l (x+4), entonces x está en la columna D, etc. Dada la complejidad innecesaria introducida considerando la divisibilidad por 4 y por 8 simultáneamente, creemos que Dan no supo que, por ejemplo, la divisibilidad de x por 4 y no por 8 implica el resto de 4 en la división por 8, o, en la notación elegida por Dan 8l (x+4).

Lena señaló en su investigación que para las filas de números impares el resto en la división por 8 indicaba la columna, es decir, restos de 1, 2, 3 y4 indicaban la posición del número en columnas A,B,C y D respectivamente. En su intento de ubicar el número 38 en el arreglo, Lena se confundió con el resto de 6 en la división por 8, ya que previamente el valor del resto equivalía al número de la columna. (Nosotros notamos que Lena nombró las columnas con números y no letras). Ella concluyó que si el resto de la división por 8 era más grande que 4, entonces los números estaban en las filas de números pares. Ubicar una columna presentó un desafío. A partir de la observación que 38=8 x 5 – 2, Lena concluyó que el resto de -2 indicaba columna D, o segunda columna desde la derecha. Ella extendió su estrategia de "restar a partir de un múltiplo", para concluir que los restos de 0, -1, -2 y -3 indicaban las columna B, C, D y E respectivamente. A partir de su decisión de abandonar la consideración de los restos y la atención en lo que ella consideró como "restos negativos", está claro que Lena no vio la equivalencia entre restos 5, 6, 7 y los correspondientes "restos negativos" de -3, -2 y -1 respectivamente. Puede ser que la estructura del arreglo de "4 en una fila" previno tanto a Lena como Dan de considerar restos "grandes" en la división por 8. En ambos casos, fue desarrollada una estrategia correcta distinta para acomodar los restos "grandes". Este es un ejemplo de generalización disyuntiva, discutida en la próxima sección.

Ann, mencionada en la sección 3.5, no reconoció la equivalencia entre la expresión algebraica (1+8r) y una expresión verbal "uno más que un múltiplo de 8". En esta sección nosotros discutimos ejemplos de estudiantes que fallan en reconocer la equivalencia entre diferentes representaciones (ver la discusión del trabajo de Ann arriba) y entre estrategias de cálculo equivalentes (ver la discusión de los trabajos de Dan y Lena anteriores). Esta falta de conciencia de expresiones equivalentes podría ser un obstáculo para los intentos de los estudiantes de generalizar. En la próxima sección discutimos varios recorridos que los estudiantes tomaron para generalizar sus soluciones.

3.7. ***Rutas hacia la generalización***

Entre las observaciones iniciales, la diferencia constante entre los números en las columnas A, C y E fue registrada por los participantes. Esta los condujo a una solución parcial, considerando, tanto implícita o explícitamente, los restos en la división por 8 y 4. Es decir,

Si el resto de n en la división por 8 es 1, entonces n está en la columna A;
Si el resto de n en la división por 8 es 5, entonces n está en la columna E;
Si el resto de n en la división por 4 es 3, entonces n está en la columna C.

Una forma equivalente de registrar estos hallazgos, sin explícita referencia a los restos, fue preferida por algunos participantes:

Si (n-1)/8 es un número entero, entonces n está en la columna A;
Si (n-5)/8 es un número entero, entonces n está en la columna E;
Si (n-3)/4 es un número entero, entonces n está en la columna C;

Tomadas junto con la observación de que los números impares estaban ubicados en las columnas A, C y E, mientras que los números pares estaban ubicados en las columnas B y D, el esquema de generalización anterior provee la posición de columna de números impares. Una pregunta natural surge luego en relación con la posición de los números pares. Hay varias estrategias que emplearon nuestros participantes. De hecho, una minoría optó por abandonar su investigación en este punto, dando una solución para números impares y sosteniendo que los números pares se encontrarían en las columnas B o D. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes intentó extender su investigación para incluir también números pares. Estas extensiones están siendo consideradas aquí en el contexto de niveles de desarrollo de la generalización identificados por Harel y Tall 1991) (sección 1.2).

Para una mayoría de los estudiantes (22 de 36) la percepción visual de 4 números en una fila sirvió como principio guía para la consideración de los restos en la división por 4. Sin embargo, este resto no provee una respuesta única a la ubicación en la columna. Por consiguiente, el caso de números pares invitó a la reconsideración y atención a otros factores más que el resto. Kelly se dio cuenta que los números divisibles por 4 estaban en la columna D mientras el cociente era impar, y en la columna B cuando el cociente era par. Ya que considerar la paridad de los cocientes resultó útil, extendió esta consideración para los números pares que no eran divisibles por 4, es decir, quedando un resto de 2. Resto 2 y cociente impar identificaba la posición del número en la columna B, mientras que resto 2 y cociente par identificaba la posición del número en la columna D. Kelly no intentó reexaminar su solución y ver la aplicabilidad de su nuevo descubrimiento para el caso de números impares. Por consiguiente, nosotros vemos su generalización como disyuntiva - un nuevo caso merece un nuevo tratamiento, una nueva decisión haciendo un esquema fue construida para los números pares. Sin embargo, también reconocemos un elemento de generalización expansiva en el uso de la paridad de los cocientes, primero en números divisibles por 4 y luego en aquellos con resto 2.

Rachel, desde un punto de partida similar al anterior, consideró los restos en la división por 8 para números pares. Ella concluyó que los números en la columna B "cuando se dividían por 8 tendrían resto 0 o 2", y los números en la columna D tendrían "4 o 6 como resto". Esta es una generalización expansiva de los casos considerados previamente para las columnas A y E. Sin embargo, Rachel dejó la columna C como un caso distinto de generalización disyuntiva, identificó el resto 3 en la división por 4. No intentó considerar este caso y lo acomodó dentro de su esquema.

Laura, después de dar una consideración distinta a los números pares e impares, extendió su consideración de cocientes impares y pares en la división por 4 a los números impares también. Este es un ejemplo de generalización expansiva: una solución que fue desarrollada para un caso particular ha sido extendida para acomodar otros casos, es decir, el rango de aplicabilidad de un esquema ha sido extendido.

La solución final de Jane fue muy similar a la de Laura, pero su recorrido fue diferente. Habiendo observado que todos los números en la columna C dejaban un resto de 3 en la división por 4, trató de extender su estrategia a otras filas. Sin embargo, los otros restos no proveen una conclusión. Los números divisibles por 4, así como los números con resto 2 en la división por 4, fueron encontrados en la columna B y en la columna D. Los números con resto 1 en la división por 4 fueron encontrados en las columnas A y E. Dado que el intento de generalización expansiva falló, se necesitó una generalización reconstructiva. El esquema fue reconstruido atendiendo a la paridad del cociente entero. Los números divisibles por 4 fueron ubicados en la columna D cuando el cociente era impar y en la columna B cuando el cociente era par. El cociente par junto con los restos 1, 2 y 3 indicaban ubicaciones de los números en las columnas A, B y C respectivamente. Cociente impar con restos 1, 2 y 3 indicaban ubicaciones de los números en las columnas E, D y C respectivamente. Notó el resto de 3 puntos en la columna C sin tener en cuenta la paridad del cociente. Por consiguiente, el nuevo esquema reconstruido incluye el esquema construido previamente como un caso especial.

La generalización reconstructiva, tanto como la expansiva, no fueron encontradas como un fenómeno frecuente en este grupo de estudiantes, si consideramos a estas como aplicadas a una tarea total. Una vez que los estudiantes encontraron una solución por casos, aún aquellos que no estaban completamente felices con la solución tuvieron poca motivación para mirar hacia atrás y tratar de integrar los diferentes casos en un esquema. Sin embargo, elementos de ambas generalizaciones reconstructiva y expansiva se presentaron al considerar componentes separados del arreglo. Por ejemplo, extender una consideración del resto en la división por 8 desde la columna A hasta la columna E puede ser vista como un elemento de generalización expansiva.
Esta tendencia de permanecer con generalizaciones disyuntivas puede ser atribuida a varios factores. Primero, como Harel y Tall (1991) sostienen, la solución por casos (generalización disyuntiva), exige menos demanda cognitiva sobre el aprendiz. Segundo, una equivalencia entre afirmaciones y cálculos puede no ser reconocida (como se vio en casos de Rachel arriba y Dan y Lena en la sección 3.6), y por consiguiente, los estudiantes no "vieron" cómo sus casos separados encajan juntos. Posiblemente, la apreciación de los estudiantes de la elegancia y belleza de un esquema completo generalizado ha sido insuficientemente desarrollada para buscarlo como su objetivo. Sin embargo, a pesar de la baja consideración de generalización disyuntiva (ver sección 1.3), nosotros sugerimos que puede proveer un punto de partida esencial en el abordaje a un nuevo contenido y a resolver un nuevo problema.

4. ***SINTESIS Y COMENTARIOS CONCLUYENTES***

La enseñanza del álgebra escolar ha sido continuamente criticada por "pasar rápidamente de palabras a simples letras como símbolos" (Mason, 1996, p.75). Como alternativa, varios investigadores han proclamado la exploración de patrones como una introducción preferida al álgebra. Comúnmente, esto ha implicado la búsqueda de "patrones algebraicamente útiles" (Lee, 1996, p.95), seguido por un movimiento hacia la notación algebraica para generalizar el patrón percibido. La cuestión en relación con esta aproximación de dos pasos es: ¿cuándo emerge el pensamiento algebraico y qué podría indicar su presencia?

Cuando el término álgebra es usado abarca dos conceptos distintos: pensamiento algebraico y simbolismo algebraico. Hay una falta de acuerdo entre los investigadores sobre la relación entre los dos. Algunos ven a los símbolos algebraicos como un componente necesario del pensamiento algebraico, mientras que otros los consideran como un resultado o una herramienta de comunicación. También, diferentes perspectivas sostienen la relación entre razonamiento algebraico y generalización.

Para Kieran (1989), "generalización no es equivalente al pensamiento algebraico, ni siquiera requiere álgebra". El pensamiento algebraico es diferente de la generalización, [...] un componente necesario es el uso de simbolismo algebraico para razonar sobre y expresar esa generalización."(p.165). Ella además sugiere que "para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, uno debe también ser capaz de expresarlo algebraicamente". (ibid). Por otra parte, Charbonneau (1996) considera al simbolismo como central para el álgebra, pero "no a la totalidad del álgebra" (p.35). Considera al simbolismo como un lenguaje que puede condensar la presentación de un argumento y como un medio para resolver problemas.

Una tendencia más reciente entre los investigadores es separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico. Esta consideración está fomentada por dos factores: (1) el reconocimiento de la posibilidad de la manipulación de símbolos sin pensar y (2) un movimiento hacia el "álgebra temprana", es decir, focalizada en la estructura antes que en el cálculo, en la escuela elemental. Para Kaput y Blanton (2001), generalizar y formalizar patrones y restricciones (constraints) es una de las formas del "componente complejo" del razonamiento algebraico (p.346). Ellos ven la "generalización (la cual incluye la argumentación) y la expresión progresivamente sistemática de tal generalidad [...] como fundamental en todo el trabajo que hacemos [en álgebra]'(ibid). Más específicamente, por razonamiento algebraico Kaput (1999) hace referencia a la actividad de los estudiantes de generalizar sobre datos y relaciones matemáticas, estableciendo esas generalizaciones a través de conjetura y argumentación y expresándolas en formas cada vez más formales.

Mason (1996) aporta más especificación del pensamiento algebraico como una actividad. El ve las raíces del pensamiento algebraico en detectar similitud y diferencia, en hacer distinciones, en clasificar y nombrar, o simplemente en "buscar un algoritmo". La verdadera formación de este algoritmo en la mente del estudiante, en cualquier forma que se la imagine, es pensamiento algebraico. El simbolismo algebraico, de acuerdo con Mason, es el lenguaje que da voz a este pensamiento, el lenguaje que expresa la generalidad. Dorfler (1991) sugiere que la generalización teórica necesita una cierta descripción simbólica. Sin embargo, él cree que la descripción simbólica no supone necesariamente el uso de letras. De acuerdo con Dorfler estos símbolos pueden ser de naturaleza verbal, icónica, geométrica o algebraica. Esto es consecuente con Sfard (1995) quien usa el término álgebra "con respecto a cualquier clase de esfuerzo matemático relacionado con procesos de cálculo generalizados, cualesquiera sean las herramientas usadas para expresar esta generalidad" (p.18).

Nosotros adoptamos la última, más inclusiva, visión del pensamiento algebraico. El conjunto de tareas para los participantes en nuestro estudio no los condujo a una "smooth" (pareja) notación algebraica, presentada en una "prolija" fórmula que conecta el elemento *n* con su ubicación en el arreglo numérico. Una expresión algebraica del arreglo requiere una función de definición por casos o una composición de funciones. Esto no fue requerido ni esperado de parte de este grupo de participantes. Sin embargo, explorando patrones los participantes se ocuparon de detectar similitudes y diferencias, en clasificar y nombrar, en buscar algoritmos, en conjeturar y argumentar, en establecer relaciones numéricas entre componentes o, más generalmente, en "generalizar sobre datos y relaciones matemáticas", actividades identificadas como componentes del pensamiento algebraico por Mason (1999) y Kaput (1999). Nosotros usamos una categorización de Harel y Tall (1999) para describir y analizar las diferentes clases de generalización empleadas por los participantes. La tarea presentada a los participantes en este estudio proveyó una oportunidad para una variedad de abordajes al explorar el arreglo numérico y generalizar su estructura y también expresar esta estructura en formas cada vez más formales.

Además, nuestros participantes estuvieron activamente dedicados a buscar una manera de expresar su generalización. Sus intentos en usar notación algebraica, más allá de la simple nominación de elementos y columnas, a menudo parecieron inútiles. El pensamiento algebraico surgió a través de formas alternativas de comunicar sus hallazgos; similar a la conclusión de Radford (2000) que "los estudiantes estaban pensando algebraicamente cuando estaban tratando con la producción de un mensaje escrito, a pesar de que no usaron el simbolismo algebraico convencional" (p.258). Además, cuando nuestros participantes demostraron pensamiento algebraico y la habilidad de usar notación algebraica, les faltó sincronización entre los dos. Por consiguiente, ni la presencia de notación algebraica debería ser tomada como un indicador de pensamiento algebraico, ni la falta de notación algebraica debería ser juzgada como una inhabilidad (falta de habilidad) de pensar algebraicamente.

Hay una brecha entre la habilidad de los estudiantes para expresar generalidad verbalmente y su habilidad para emplear notación algebraica confortablemente. Esta brecha, junto con el apuro de usar "letras como simples símbolos [que] ha marcado la enseñanza de álgebra escolar por más de cien años" (Mason,1996, p. 75), deja a los estudiantes con un sentimiento de insuficiencia y sin expectativas. Varios participantes expresaron un explícito consentimiento que sus soluciones eran incompletas porque les faltaba una fórmula. Esto es consecuente con la observación de Schoenfeld (1988) que, para los estudiantes, formar una expresión es lo que importa más y no contar con la forma correcta, más allá de la sustancia de lo que ha sido producido, está siendo "poco matemático". Antes que insistir en una notación simbólica particular, esta brecha debería ser aceptada y usada como un lugar para que los estudiantes practiquen su pensamiento algebraico. Ellos deberían tener la oportunidad de involucrarse en situaciones que promueven tal pensamiento sin la fuerza del simbolismo formal. Problemas que son ricos en patrones, tales como el presentado a nuestros participantes, ofrecen a los estudiantes estas oportunidades. Son particularmente útiles para docentes en formación de escuela elemental, para quienes estos problemas sirven no sólo como una actividad rica matemáticamente, sino también como un lugar para apreciar las variadas formas de expresar generalidad.

UN COMENTARIO FINAL

¿Cuáles son los productos significativos de investigación en la educación matemática? Propongo dos respuestas simples: 1. Los productos más significativos son la transformación en el ser de los investigadores. 2. Los segundos productos más significativos son estímulos para otros investigadores y docentes para probar nuestras conjeturas por ellos mismos en su propio contexto. (Mason, 1998, p.357)

Como se expuso en la sección 2.2, nosotros comenzamos este diario con una solución predeterminada en mente. Estuvo basada sobre una visión particular del arreglo de números, el cual inicialmente hicimos referencia como "el patrón". Los participantes en nuestro estudio ayudaron a abrir nuestros ojos a una variedad de patrones que pueden ser identificados en el arreglo y su extensión, y también cambiaron nuestra percepción relacionada con la "utilidad" de ciertas maneras de percibir patrones. Esta es una transformación del investigador citada por Mason (1998, p.357) como "los productos más significativos" reinvestigación en la educación matemática. Solo el tiempo será capaz de probar los "segundos productos más significativos" de Mason.

National Council of Teachers of Mathematics: 2000, *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston, VA.

Orton, A. and Orton, J.: 1999, 'Pattern and the approach to algebra', in A. Orton (ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics.* Cassell, London, pp. 104–120.

Radford, L.: 2000, 'Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis', *Educational Studies in Mathematics* 42, 237–268.

Schoenfeld, A.H.: 1988, 'When good teaching leads to bad results: The disaster of well taught mathematics courses', *Educational Psychologist* 23(2), 145–166.

Sfard, A.: 1995, 'The development of algebra – Confronting historical and psychological perspectives', in C. Kieran (ed.), *New Perspectives on School Algebra: Papers and Discussions of the ICME-7 Algebra Working Group (Special Issue)*, *Journal of Mathematical Behavior* 14, 15–39.

Stacey, K.: 1989, 'Finding and using patterns in linear generalizing problems', *Educational Studies in Mathematics* 20, 147–164.

Threlfall, J.: 1999, 'Repeating patterns in the primary years', in A. Orton (ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics,* Cassell, London, pp. 18–30.

Zazkis, R. and Campbell, S.: 1996, 'Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding', *Journal for Research in Mathematics Education* 27(5), 540–563.

Zazkis, R. and Liljedahl, P.: 2001, 'Exploring multiplicative and additive structure of arithmetic sequence', in M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th International Conference for Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, Netherlands, pp. 439–446.

Zazkis, R. and Liljedahl, P.: 2002, 'Arithmetic sequence as a bridge between conceptual fields', *Canadian Journal of Mathematics, Science and Technology Education* 2(1), 93–120.

Simon Fraser University,
Faculty of Education,
8888 University Drive,
Burnaby, B.C. V5A 1S6 Canada,
Telephone (604) 291-3662, Fax (604) 291-3203,
* *E-mail: zazkis@sfu.ca*