Belinda

REPÚBLICA ARGENTINA

ISSN 1514-5956

Función Continua

MARZO 2000

EXPERIENCIAS DE ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA

EGB

POLIMODAL

TERCIARIO

REVISTA Nº 5 - AÑO I

EGB 3
POLIMODAL

Una motivación, varias aplicaciones Otra cosa es con guitarra...afinada

Adriana Rabino y Patricia Cuello

Introducción. Partimos de un problema de música, la afinación de los instrumentos, para atraer la atención de los alumnos al presentar una situación problemática que conduce a la introducción de distintos temas como proporciones continuas en segundo año, números irracionales en tercer año o función exponencial en cuarto año. La propuesta deja libertad al docente para utilizar este recurso en distintos niveles.
La matemática necesaria para que un docente interesado pueda interpretar el trabajo consta de los siguientes conceptos:
- razones y proporciones. Sus propiedades.
- números irracionales. Sus propiedades.
- potenciación y radicación. Sus propiedades.

Intuitivamente se tiende a contraponer matemática y música, dado que la primera es una ciencia exacta, y sus aficionados parecen distar mucho de las producciones artísticas que nacen de la emoción, el gusto, el alma. Pareciera que se mezcla rigidez con flexibilidad, agua con aceite. Sin embargo, el hombre siempre se sintió atraído por los sonidos musicales, de timbre particularmente agradable, sugestivo y armónico. Paradójicamente, la armonía del universo se mantiene respetando reglas matemáticas. Entonces, no es casual encontrar fundamentos matemáticos en la producción musical.

Definiciones básicas.

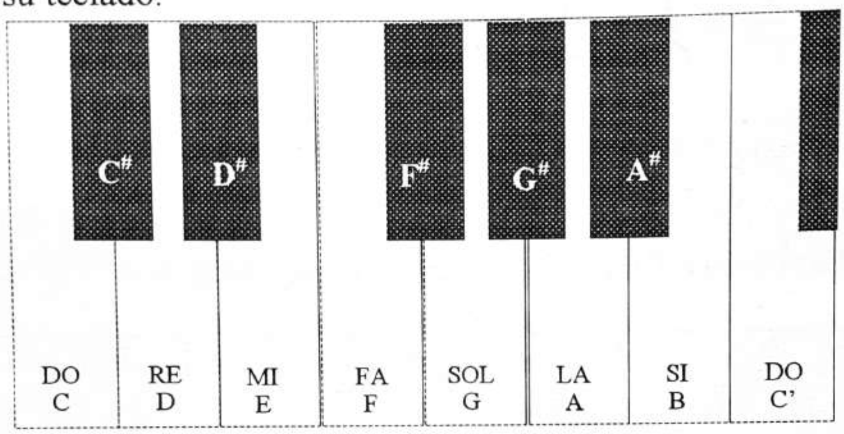
A continuación se definen algunos conceptos fundamentales a los que haremos referencia a lo largo de este trabajo.
Cuando un objeto vibra, crea un sonido, que puede escucharse o no, todo depende de cuán ligero o despacio esté vibrando, su *frecuencia*. En los instrumentos de cuerda el objeto que vibra es una cuerda (piano, guitarra, violín), en los de viento como el saxofón o el clarinete el objeto de vibración es una lengüeta que se pone en movimiento con el aire que se sopla y en los de percusión es el parche el que vibra.
La frecuencia de vibración se mide en *ciclos* por segundo. Fue Pitágoras quien descubrió que la frecuencia de una cuerda que vibra depende de su largo. El *tono* depende exclusivamente

del número de vibraciones por segundo. Cuando el número de vibraciones de una nota es exactamente el doble de las de otra (o si la cuerda es la mitad de la otra), se dice que la primera está a una *octava más alta* con relación a esta última.
Entre una nota y su octava, el oído reconoce otras seis notas cuyas frecuencias son bien definidas. Estas sucesivas notas forman la *escala* o *gama musical*.
¿Por qué es necesario crear una escala o gama musical? Las alturas de tonos conforman una variable continua, por lo tanto se necesitarían infinitos signos para designarlas a todas y nuestros oídos no podrían percibir la diferencia entre dos sonidos muy cercanos. Esto hace inútil el empleo de todas las frecuencias (lo cual también complicaría la escritura musical y la ejecución en los instrumentos). Esto ha obligado a no utilizar, con fines musicales, más que un número restringido de sonidos en una escala. De todas maneras, de un instrumento a otro esta restricción varía. A las notas de un piano las podríamos comparar con los elementos de un conjunto discreto sin posibilidad de tocar tonos intermedios. La guitarra presenta mayores posibilidades, aunque no tantas como el violín que no tiene trastes.
Se llama *intervalo* a la razón que existe entre las frecuencias de dos notas consecutivas. Cuando el intervalo entre cada nota y la siguiente es el mismo, se dice que las notas están *afinadas*.
Se llama *diapasón* al instrumento musical más sencillo que consta de una sola nota denominada LA normal (La_3), la que produce aproximadamente 440 vibraciones por segundo, (a los fines operativos se redondeó en este valor por convención).
Se dice que Pitágoras fue el inventor de la *gama pitagórica*, pero probablemente lo que hizo fue estudiar y perfeccionar la gama que lleva su nombre. En ella, la frecuencia de cada nota se logra multiplicando la frecuencia de la anterior por 3/2 (se limita a 7 notas, cifra admitida en aquella época por todos los músicos). Esta escala tenía sus limitaciones desde el punto de vista de la composición musical aunque no afectó mayormente hasta fines de la Edad Media ya que la música era transmitida de generación en generación en forma oral (folklore) y se utilizaba poco la escritura musical. Recién en ese momento surgió la necesidad de perfeccionar la gama pitagórica.
Zarlino (1517-1590) intentó salvar los inconvenientes de carácter armónico de la escala de Pitágoras, haciendo algunas modificaciones creando así la *gama de Zarlino*, sin tener mucho éxito.
La *escala cromática bien temperada* que no es perfecta ni mucho menos, es algo más científica y tiene la gran ventaja de diferenciarse muy poco de las anteriores. Fue J. S. Bach (1685-1750) quien demostró, con sus 48 preludios y fugas para el clave bien temperado, que con el uso del *temperamento igual* (todos tonos iguales entre sí) podían escribirse, interpretarse y escucharse fugas en todos los tonos. Es la escala más utilizada por los compositores occidentales desde hace dos siglos. Esta escala consta de 12 semitonos completamente iguales de 25 *savarts* cada uno (savart es la unidad para medir la altura de un

sonido. Una octava es igual a 300 savarts).

La matemática en la afinación.

Habíamos dicho que una escala está afinada cuando los intervalos tienen la misma razón de frecuencia. Si bien el piano tiene sus limitaciones, es más facil visualizar este concepto trabajando sobre su teclado.



debe verificarse $\dfrac{C}{C^{\#}}=\dfrac{C^{\#}}{D}=\dfrac{D}{D^{\#}}=\dfrac{D^{\#}}{E}=\dfrac{E}{F}=\dfrac{F}{F^{\#}}=\dfrac{F^{\#}}{G}=\dfrac{G}{G^{\#}}=\dfrac{G^{\#}}{A}=\dfrac{A}{A^{\#}}=\dfrac{A^{\#}}{B}=\dfrac{B}{C'}$ (1)

donde C, $C^{\#}$, D, $D^{\#}$, E, F, $F^{\#}$, G, $G^{\#}$, A, $A^{\#}$ *y* B representa el número de vibraciones de las notas *do, do sostenido, re, re sostenido, mi, fa, fa sostenido, sol, sol sostenido, la, la sostenido* y *si* respectivamente. C' representa el número de vibraciones de la nota *do* de la octava más alta.

También sabemos que la razón $\dfrac{C}{C'}=\dfrac{1}{2}$ ya que C está exactamente una octava más baja que C '. Si en (1) dividimos todos los numeradores y denominadores por C obtenemos:

$\dfrac{\frac{C}{C}}{\frac{C^{\#}}{C}}=\dfrac{\frac{C^{\#}}{C}}{\frac{D}{C}}=\dfrac{\frac{D}{C}}{\frac{D^{\#}}{C}}=\ldots\ldots\ldots=\dfrac{\frac{B}{C}}{\frac{C'}{C}}$ y si llamamos $\overline{C^{\#}}=\dfrac{C^{\#}}{C}$, $\overline{D}=\dfrac{D}{C}$, ... $\overline{B}=\dfrac{B}{C}$ resulta

$\dfrac{1}{\overline{C^{\#}}}=\dfrac{\overline{C^{\#}}}{\overline{D}}=\dfrac{\overline{D}}{\overline{D^{\#}}}=\ldots\ldots\ldots=\dfrac{\overline{B}}{2}$ recordando que $\dfrac{C}{C'}=\dfrac{1}{2}$ de donde en el último término $\dfrac{C'}{C}=2$.

Haciendo unos sencillos cálculos obtendremos la razón del intervalo: si tomamos el primer y segundo término se obtiene $\left(\overline{C^{\#}}\right)^2 = \overline{D}$. Si tomamos el primer y tercer término se obtiene $\left(\overline{C^{\#}}\right)^3 = \overline{D^{\#}}$. Así sucesivamente se llega a que $\left(\overline{C^{\#}}\right)^{11} = \overline{B}$. Ahora considerando sólo el primer y último término $\frac{1}{\overline{C^{\#}}} = \frac{\left(\overline{C^{\#}}\right)^{11}}{2} \Rightarrow \left(\overline{C^{\#}}\right)^{12} = 2$ ó $\overline{C^{\#}} = \sqrt[12]{2} \cong 1{,}0594631$.

La razón del intervalo es $\frac{C}{\overline{C^{\#}}} = \frac{1}{\overline{C^{\#}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \cong \frac{1}{1{,}0595} \cong 0{,}943841$

Sabiendo que La3 es la sexta nota de la tercera escala utilizada por los músicos, veremos que, multiplicando a derecha y dividiendo a izquierda por $\overline{C^{\#}} \cong 1{,}05946$, se obtiene la siguiente tabla de la gama bien temperada. En los libros de música aparece de esta manera:

Nota	Do3	Do#	Re3	Re#	Mi3	Fa3	Fa#
Vibr. por seg.	261,625	277,181	293,664	311,125	329,527	349,228	369,993

Sol3	Sol#	**La3**	La#	Si3
391,995	415,303	440	466,162	493,883

y que, desde el punto de vista matemático, es una aproximación de la siguiente tabla que surge de utilizar la razón de intervalo $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$:

Nota	Do3	Do#	Re3	Re#	Mi3	Fa3
Vibr. por seg.	$440.\ \sqrt[12]{2^{-9}}$	$440.\ \sqrt[12]{2^{-8}}$	$440.\ \sqrt[12]{2^{-7}}$	$440.\ \sqrt[12]{2^{-6}}$	$440.\ \sqrt[12]{2^{-5}}$	$440.\ \sqrt[12]{2^{-4}}$

Fa#	Sol3	Sol#	**La3**	La#	Si3
$440.\ \sqrt[12]{2^{-3}}$	$440.\ \sqrt[12]{2^{-2}}$	$440.\ \sqrt[12]{2^{-1}}$	$440.\sqrt[12]{2^{0}}$	$440.\sqrt[12]{2^{1}}$	$440.\ \sqrt[12]{2^{2}}$

Conclusiones.

El problema así planteado permite trabajar las propiedades de las proporciones continuas, calculando los intervalos y aprovechando el uso de redondeo, aproximación, truncamiento, error, conveniencia de la utilización de la expresión radical en números irracionales, etc.

Si se quiere utilizar este recurso como una aplicación de números irracionales se puede motivar a los alumnos con la siguiente pregunta: "¿es posible afinar con exactitud un instrumento?"

Algunas conclusiones y consideraciones a tener en cuenta en el transcurso de la implementación de esta propuesta:

* Resulta imposible tocar afinadamente por razones prácticas evidentes (desgaste de las cuerdas, cambio de la tensión de las mismas, cambio de la temperatura del aire para instrumentos de viento, etc.).
* Resulta imposible oír afinadamente (papel esencial del acostumbramiento del oído).
* Resulta imposible una afinación absoluta (desde el punto de vista matemático), considerando que la razón del intervalo es un número irracional.
* Hasta puede afirmarse que, en una orquesta, cada ejecutante toca de acuerdo con su propia escala y que el oído no se siente molesto por ello.

Es importante que, a través de situaciones como la presentada, los alumnos establezcan relaciones interdisciplinarias y de distintas áreas. El docente debe ser el artífice para que recursos como éste sean aprovechados generando entusiasmo y motivación en los alumnos.

Bibliografía.

EMECE Edit.: "Síntesis del saber musical", Kurt Pahlen, 1949.
INSTITUTO PARRAMÓN Edic.: "El libro de la música", 1979.
HYSPAMÉRICA: "El sonido", Jean Jacques Matras, 1988.
HYSPAMÉRICA: "La música sus leyes y su evolución", Jules Combarieu.
BOSCH (Barcelona): "Teoría física de la música" Daniel Blanxart.
ALIANZA MÚSICA: "Los instrumentos musicales del mundo", Francois Tranchefort, 1985.
RICORDI Edit.: "Acústica musical y organología" Tirso de Olazabal, 1979.

A. R. es Profesora de Matemática, egresada de la Universidad Nacional del Comahue (U.N.C) y docente de la misma. Es colaboradora en la elaboración del Currículum del C.B.U., (Río Negro) e integrante de la Comisión de Perfeccionamiento Permanente Docente del Consejo Provincial de Educación. Actualmente participa de un grupo de investigación en didáctica de la matemática.

P. C. es Profesora de Matemática, egresada de la U.N.C. Actualmente es docente de escuelas públicas y privadas y ayudante en el área de ingreso de la misma universidad.