INTRODUCCIÓN LA INDUCCIÓN COMPLETA

Adriana Rabino

Contenido: demostración en el conjunto de los números naturales: Principio de Inducción Completa.

Materiales: Juego de la Torre de Hanoi.

En la vida cotidiana muchas veces se utiliza el pensamiento inductivo, se parte de varias observaciones particulares para llegar a una conclusión general. Desde el punto de vista matemático, esta conclusión sería una *conjetura*, que puede ser cierta o no. Para asegurarnos que sea verdadera se necesita hacer una demostración.

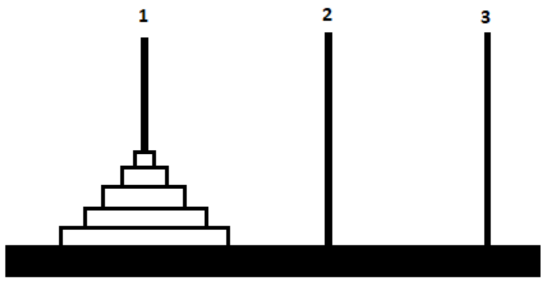
Esta práctica de la necesidad de demostrar una propiedad no está muy desarrollada en los estudiantes. En general hacen conjeturas y generalizaciones prematuras y se conforman con verificar esa propiedad en algunos casos más para que parezca más fiable. Creen que es lo mismo comprobar que demostrar y no se les hace sentir la necesidad de llegar a una demostración.

Para que los estudiantes comprendan el significado de la demostración, se presenta un problema para ser demostrado con el método denominado Principio de Inducción Completa, utilizado en el conjunto de los números naturales.[1]

Torres de Hanoi (problema)

En la varilla 1 hay 5 discos de madera de diámetros decrecientes. Se quieren llevar a la varilla 3 respetando las dos reglas siguientes:

- *No se puede desplazar más que un disco en cada movimiento.*
- *Un disco solo puede descansar sobre otro de diámetro mayor.*



¿Cuál es el mínimo número de movimientos para desplazar los 5 discos de la varilla 1 a la varilla 3?
¿Cuál sería el mínimo número de movimientos si hubiese n discos?
*¿Cuánto tiempo se tardaría en mover 64 discos?**

**Cuenta la leyenda que hay unos monjes encerrados en un monasterio perdido en el corazón de Asia desde hace miles de años. Estos monjes llevan todo este tiempo jugando al juego de las torres de Hanoi con 64 aros, y dice la leyenda que, cuando estos monjes terminen el juego, llegará sin remedio el fin del mundo. (El retorno de los brujos…)*

[1] Ver en www.gpdmatematica.org.ar en Recursos de aula, problemas para secundaria: *El efecto dominó (Adriana Rabino)*

Suponiendo que los monjes moviesen un aro cada segundo, necesitarían 2^{64} -1 = 18446744073709551615 segundos para terminar (unos 566000 millones de años…..).

Lo estudiantes pueden comenzar jugando con 2 discos (con 1 disco es obvio que hay 1 solo movimiento) y luego ir incrementando la cantidad de discos. Como todos los discos son de distinto color, se puede organizar la información en una tabla para ir volcando en ella la cantidad de movimientos que tiene cada disco según la cantidad de discos, siendo el disco negro el mayor y el disco blanco el menor.

cantidad de discos / colores	2	3	4	5
Negro	1	1	1	1
Rojo	2	2	2	2
Naranja		4	4	4
Amarillo			8	8
blanco				16

Adaptar los colores al juego que tengan.

Cuando se llega a jugar con 5 discos, ya se puede inferir (observando la tabla) la cantidad de movimientos que va a haber. También se puede calcular el número de movimientos y, dado que se trata de todas potencias de 2, se puede expresar cada valor como potencia a ver si nos ayuda a encontrar una regularidad para llegar a la generalización.

Cantidad de discos / colores	2	3	4	5
Negro	$1=2^0$	$1=2^0$	$1=2^0$	$1=2^0$
Rojo	$2=2^1$	$2=2^1$	$2=2^1$	$2=2^1$
Naranja		$4=2^2$	$4=2^2$	$4=2^2$
Amarillo			$8=2^3$	$8=2^3$
blanco				$16=2^4$
Total de movimientos	3	7	15	31

Entonces cada uno de los movimientos totales se puede expresar como una suma de potencias de 2, menos 1. ¿Qué pasaría si ya nos queremos desprender del material concreto y queremos saber cuántos movimientos hay que realizar si tenemos n discos? Es momento de **generalizar**.

Tendríamos $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$

Por otro lado, buscando regularidades se puede inferir que:

Número de discos	1	2	3	4	5	6	7
Número de movimientos	1	3	7	15	31	63	127

Alguna regularidad	1	2x1+1	2x3+1	2x7+1	2x15+1	2x31+1	2x63+1

Cuando se trabajó con material concreto, se llevaron todos los discos de la varilla 1 (menos el mayor) a la varilla 2 (por supuesto, utilizando la 3). Para ello, se utilizó una determinada cantidad de movimientos. Luego el disco mayor se pasa a la varilla 3 y nuevamente se utilizó la misma cantidad de movimientos para llevar los discos de la varilla 2 a la 3. Por lo tanto el número de movimientos en total es 2 veces la cantidad de movimientos necesarios para mover n-1 discos desde la varilla 1 a la 2,+ 1 (disco grande de la varilla 1 a la 3).

Queda ahora relacionar el número de movimientoscon la cantidad de discos.

N° de discos	N° de movimientos parciales	Expresión general
2	1	$2^1 - 1$
3	3	$2^2 - 1$
4	7	$2^3 - 1$
5	15	$2^4 - 1$
6	31	$2^5 - 1$
7	63	$2^6 - 1$
n		$2^{n-1} - 1$

Pero la cantidad de movimientos total es 2 veces los movimientos parciales + 1 (ver tabla anterior) entonces:

$$2.\ \text{movs.parciales} + 1 = 2\ .\ (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = \underline{\mathbf{2^n - 1}}$$

Podemos **conjeturar** que $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$

El trabajo matemático hecho hasta aquí no es nada trivial: se generalizó y se conjeturó, pero no nos alcanza para **demostrar** matemáticamente que la fórmula $2^n - 1$ nos asegura la cantidad de movimientos mínima para resolver el problema de la Torre de Hanoi con n discos.

Para ello, como se trata de una propiedad inherente a los números naturales, vamos a utilizar el Principio de Inducción Completa. Este nos dice que si la propiedad se cumple para el 1er. elemento y además, suponiendo que la propiedad se cumple para un elemento cualquiera podemos demostrar que se cumple para el elemento siguiente, nos podemos asegurar que se cumple para todos.

P(1): $\sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1 = 2^{1-1}$ es verdadero para el primer elemento.

Suponemos verdadero P(h), siendo h un elemento cualquiera, es decir:

$\sum_{i=1}^{h} 2^{i-1} = 2^h - 1$ (hipótesis inductiva)

Queremos ver si la propiedad se cumple para el elemento h+1 (siguiente) utilizando como válida la hipótesis inductiva, o sea:

$\sum_{i=1}^{h+1} 2^{i-1} = 2^{h+1} - 1$

Utilizando convenientemente la hipótesis inductiva:

$$\sum_{i=1}^{h+1} 2^{i-1} = \sum_{i=1}^{h} 2^{i-1} + 2^{h+1-1} = 2^h - 1 + 2^h = 2 \cdot 2^h - 1 = 2^{h+1} - 1$$

Quedando así demostrada la propiedad enunciada.

REFERENCIA

Callejo María Luz (2004*): Ver lo general en lo particular: introducción a la inducción completa. EnLa actividad matemática en el aula (homenaje a Paulo Abrantes),*capítulo 12. Ed. Síntesis.

NOTICIAS Y COMENTARIOS de Elena Benito González y Carlo Giovanni Madonna Revista de Didácticas Específicas, nº 12, pp. 240-247.https://www.academia.edu/15304641/LA_TORRE_DE_HANOI_GENERALIZADA