INVESTIGANDO NÚMEROS (Nivel Medio)
Adriana Rabino

<u>**Contenidos:**</u> **Propiedades de las operaciones, paridad, generalización, divisibilidad, congruencia módulo n, regularidades, potenciación, diferencias convergentes.**

1) <u>**Cambalache**</u>
<u>a) en suma</u>:
92 + 57 = 97 + 52
37 + 19 = 39 + 17
Está bien invertir los dígitos de dos sumandos. La pregunta es: ¿por qué funciona esto?

b) <u>en resta</u>: sin embargo el trueque no funciona en la resta.
92 - 57 ≠ 97 - 52.
Explica por qué el trueque no funciona en la resta.
Exploremos ahora cuál es el efecto de trocar en la resta. Considera primero los siguientes ejemplos:
25 – 16 = 9 y 26 – 15 = 11. La diferencia en las respuestas es 2 (11 – 9 = 2)
37 – 24 = 13 y 34 – 27 = 7. La diferencia en las respuestas es 6 (13 – 7 = 6)
47 – 29 = 18 y 49 – 27 = 22. La diferencia en las respuestas es 4 (22 – 18 = 4)
Prueba con otros ejemplos. ¿Encuentras alguna regularidad? Si es así, explica por qué se producen esas regularidades.

c) <u>en multiplicación</u>:
21 x 34 ≠ 24 x 31
25 x 12 ≠ 22 x 15
Explica por qué el trueque no funciona con la multiplicación.
Explora el efecto de trocar en la multiplicación.

2) <u>**Pares e impares**</u> (Una aritmética en miniatura)

a) Las dos tablas siguientes muestran cómo la paridad de una suma/producto es determinada por la paridad de los sumandos/factores. ¿Cómo demostrarías cada una de las proposiciones indicadas en estas tablas? Puedes empezar demostrando por qué *la suma de un entero par y un entero impar siempre es impar.*

Suma

+	Par	Impar
Par	Par	Impar
Impar	Impar	Par

Multiplicación

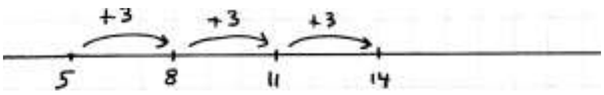
X	Par	Impar
Par	Par	Par
Impar	Par	Impar

b) Sin resolver los productos, decide si cada uno de los resultados a continuación es par o impar:

$2^9 \times 3^{12}$
$5^{10} \times 4^{21}$

$7^{60} \times 2^{39}$
$6^{45} \times 4^{45}$
¿Puedes predecir cuál será el último dígito de cada producto anterior?

3**) <u>Saltando sobre la línea numérica</u>:** Elegir un "comienzo" y un "salto" (por ejemplo 5 y 3). Considerar la sucesión obtenida:



a) ¿Qué regularidad observas? Predice en qué número caeremos si hacemos 100 saltos. ¿Cómo te diste cuenta? ¿Caeremos en el número 2002? ¿Cómo lo sabes?
b) Construye una fórmula que se pueda usar para saber cuántos saltos se deben hacer para llegar o caer lo más cerca posible de un número dado teniendo en cuenta que los saltos siguen esta regularidad.
c) ¿Qué preguntas matemáticas se pueden hacer en torno a esta actividad?
d) Elige tu propio par de números para comenzar y saltar y explora que es lo que pasa.

4) **<u>2002</u>**: La factorización en primos de 2002 es 2 x 7 x 11 x 13. Esto significa que los divisores de 2002 son 2, 7, 11, 13, 14, 22, 26, 77, 91, 143, 154, 182, 286, 1001 y 2002. El número 2002 tiene exactamente 15 divisores.
a) Encuentra la factorización en primos de 1998. ¿Cuántos divisores tiene 1998?
b) Explora si existe o no una relación entre la factorización en primos de un número y el número de divisores que éste tiene.

5) **<u>Tableros</u>**: Explora patrones en cada uno de los siguientes tableros (tableros de 6, 7, 9 y 11).
a) Para cada uno de estos tableros encontrar si los múltiplos de 4(o 5 o 9) caen en la misma columna. En el tablero de 6, los múltiplos de 4 han sido resaltados. ¿Qué patrón notas? Basado en esos patrones, puedes predecir, para cualquier múltiplo de 4 (por ejemplo 240, 4004) a qué columna corresponderá?
b) Imagina que estos tableros continúan. Para cada tablero predice en qué columna caerán las potencias de 2 y las potencias de 10.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55

6) **La tabla del 37**:

37 x 1 = 37 　　　37 x 2 = 74
37 x 3 = 111 　　　37 x 4 = 148
37 x 5 = 185 　　　**37 x 6 = 222**
37 x 7 = 259 　　　37 x 8 = 296
37 x 9 = 333 　　　37 x 10 = 370
37 x 11 = 407 　　　**37 x 12 = 444**
37 x 23 = … 　　　37 x 24 = …
37 x 27 = … 　　　37 x 58 = …

Usa las regularidades que encontraste para hallar cualquier producto de la forma 37 x N (donde N es cualquier entero positivo).

7) **7, 11 y 13**: Elegir un número de 3 dígitos y escribirlo dos veces en forma consecutiva de tal manera de obtener un número de 6 dígitos. Por ejemplo: 529. 529529 Dividido por 7 resulta 75.647 y resto 0. Ahora dividimos 75.647 por 11. Obtenemos 6.877 y resto 0. Finalmente, dividimos 6.877 por 13. La respuesta es 529 y resto 0. Observar que el resto vuelve a ser cero y el cociente es el número con el que empezamos. Prueba esto con tus propios ejemplos. Explica por qué sucede esto.

8) **Seguir restando**: Tomar cuatro números enteros (por ejemplo 38, 97, 65 y 42). Escribirlos en una fila, dejando algo de espacio entre ellos. Restar el primero y el segundo, el segundo y el tercero, el tercero y el cuarto y el cuarto con el primero. No tomar en cuenta los signos negativos (valor absoluto de cada diferencia). Escribir los resultados en una fila abajo. Seguir con este procedimiento, restando los números de a

pares. ¿Qué sucede? Probar con otros cuatro números. ¿Sucede lo mismo? ¿Por qué? Si es así, sucede en la misma cantidad de pasos?

9) **Potencias de número que terminan en 5**:
$5^2 = 25$
$15^2 = 225$
$25^2 = 625$
$35^2 = 1225$
$45^2 = 2025$
Descarta el último dígito del número base de la potencia (5). Multiplica el número que quedó por el siguiente al mismo y luego adjunta el resultado del producto adelante de 25. Por ejemplo, para el caso de 25^2, hacemos $2 \times 3 = 6$. Entonces, la respuesta es 625. Usar el modelo de área para explorar por qué esta regla funciona y para construir una prueba visual de ello.

10) **Las potencias de 2** (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …)tienen la siguiente propiedad: la suma de todos los componentes de esta secuencia hasta cualquier término es igual a 1 menos que el siguiente término. Por ejemplo:
$1 + 2 = 3 = 4 – 1$
$1 + 2 + 4 = 7 = 8 – 1$
$1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 16 – 1$
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 = 32 - 1$
Explicar por qué sucede esto.

11) **Potencias y últimos dígitos**:
a)La tabla a continuación contiene algunas potencias de 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Completa la tabla. Explora regularidades en la misma.

1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7
4	9	16	25	36	49
8	27	64	125	216	343
16	81	256			
32					
64					

b) Usa las regularidades encontradas para descubrir el último dígito de
2^{29} 3^{57}
4^{99} 7^{62}
Formula reglas que puedan ser usadas para encontrar el último dígito de cualquier potencia de 2, cualquier potencia de 3, cualquier potencia de 4 y cualquier potencia de 7.

Soluciones

1) a) Una forma de probar si esta regla funciona es descomponiendo el número en potencias de 10. Para que esta prueba sirva para todos los números, se deben expresar los mismos en forma general. Supongamos que tenemos dos números de dos cifras ab y cd. Lo que queremos demostrar es que ab + cd = ad + cb

ab + cd = 10a + b + 10c + d (descomposición) = 10a + d + 10c + b (propiedad conmutativa) = ad + cb (volviendo a componer los números).

Con el mismo procedimiento se puede demostrar esta propiedad con la suma de números de más cifras.

b) Para demostrar que una propiedad no funciona para todos los números, basta con encontrar un ejemplo que no la cumpla (un contraejemplo), en este caso puede ser el que está dado. Si queremos encontrar un por qué, basta utilizar un procedimiento análogo al que se utilizó en el caso de la suma:

ab - cd = (10a + b) – (10c + d) (descomposición) = 10a + b – 10c - d = 10a - d - 10c + +b = (10a – d) – (10c – b) ≠ ad - cb

Pero…¿qué regularidad existe cuando cambiamos los dígitos en una resta?

La regularidad que se encuentra es que la diferencia entre los dos resultados es la diferencia entre el doble de los dos dígitos. Se puede demostrar esta regularidad generalizando:

10a + b – (10c + d) = 10a + b – 10c – d

10a + d – (10c + b) = 10a + d – 10c – b

Restando ambos números así expresados:

10a + b – 10c – d – (10a + d – 10c – b) = 10a + b – 10c – d – 10a - d + 10c + b =

= 2b – 2d

c) Si una propiedad no se cumple para un ejemplo o más (como los que se presentaron en el enunciado), se puede asegurar que no es una propiedad que se cumpla para todos los números.

De todos modos, se puede analizar el por qué. En vez de poner un ejemplo, probemos generalizando con números de dos cifras (para hacerlo más sencillo):

ab x cd = (10a + b) x (10c + d) = 100a.c + 10a.d + 10 b.c + b.d

Cambiando los dígitos

ad x cb = (10a + d) x (10c + b) = 100a.c + 10a.b + 10d.c + d.b

Para que estas dos expresiones sean iguales debería ser:

= 100a.c + 10a.b + 10d.c + d.b

10a.d + 10b.c = 10a.b + 10d.c

Con lo cual solo se verificaría una igualdad si a.d + b.c = a.b + d.c.

¿Cuál es el efecto de cambiar los dígitos en la multiplicación?

Una de las regularidades que se observa al cambiar los dígitos en un producto, es que la diferencia es siempre un múltiplo de 10:

ab x cd - ad x cb = (10a + b) x (10c + d) – (10a + d) x (10c + b) = 100a.c + 10a.d + 10 b.c + b.d – (100a.c + 10a.b + 10d.c + d.b) = = 10a.d + 10b.c - 10a.b - 10d.c =

= 10. (a.d + b.c - a.b - d.c)

2)a) Estas demostraciones se realizan a partir de expresar en forma general un número par como 2K o impar como 2K+1 (siendo K un número entero cualquiera), dado que cualquier número par es divisible por 2 y se puede expresar como 2 por “algo”, y si a un número par se le suma 1 (dará el siguiente) el resultado va a ser impar.

De esta manera (y utilizando este criterio para analizar el resultado) se puede expresar la suma de dos números pares como 2K + 2H = 2(K+H), siendo H y K números enteros. La suma de dos números enteros es otro número entero, y al estar esa suma multiplicada por 2, podemos asegurar que el resultado será un número par.

Al sumar un número par con otro impar, podemos expresar esa suma como: 2K + (2H+1) (siendo K y H números enteros). Sacando paréntesis, asociando los dos términos pares y sacando factor común el 2 nos queda: 2(K+H) + 1. El primer término es par (por todo lo antedicho) y al sumarle uno nos da como resultado un número impar.

Análogamente se demuestran las otras dos sumas.

Para demostrar el producto, se utiliza la misma estrategia. Si los dos números son pares nos queda expresado: 2K x 2H = 2.(2.K.H) (conmutando y asociando), o sea que el resultado es par.

Si los dos números son impares, debemos aplicar la propiedad distributiva: (2K+1).(2H+1) = 4KH + 2K + 2H + 1 = 2(2KH + K + H) + 1 (sacando factor común el 2 en los primeros tres términos. El resultado es un número par el primer término (porque está multiplicado por 2) más 1, con lo que resulta ser un número impar.

b)

$\underline{2^9 \text{ x } 3^{12}}$: 2^9 es par porque se puede expresar como 2.2^8 (ver definición de número par) y 3^{12} es impar (el producto de impares siempre es impar), por lo tanto par x impar = par.
Las últimas cifras de las potencias de 2 empezando con 2^1 se repiten de la siguiente manera: 2, 4, 8, 6. Entonces 2^9 termina en 2.
Las últimas cifras de las potencias de 3 empezando con 3^1 se repiten de la siguiente manera: 3,9,7,1. Entonces 3^{12} termina en 1.
Por lo tanto, el producto original de las dos potencias termina en 2 x 1 = 2.

Con los demás productos, utilizar la tablita del ejercicio anterior para darse cuenta si cada uno de los factores es par o impar. Claramente se ve que si las bases son impares, el resultado de la potencia es siempre impar, y si las bases son pares, se transforma la potencia en un producto de la base por otra potencia: $4^{21} = 4.4^{20}$. Como ese factor es par, siempre se puede escribir como 2 por “algo”, en este caso 2.2
Para ver con qué cifra termina el producto de potencias, analizar las regularidades de las últimas cifras, ver que se repiten en forma cíclica y deducir cuál será la terminación de la potencia buscada.

3) a) una regularidad que se observa es que si al número donde se "cae" se le resta 5, es un múltiplo de 3.
Si hacemos 100 saltos se caerá en el número 100.3 + 5.
Para saber si caemos en el 2002 hacemos 2002 – 5 = 1997 y vemos si este número es múltiplo de 3 (no lo es). Por lo tanto no se caerá en el 2002.
b) La fórmula es 3x + 5. Si queremos saber cuántos saltos se deben hacer para caer lo más cerca posible de un cierto número, se iguala la fórmula a ese número. Si da exacto, ese es el número, sino la diferencia será el resto que queda al dividir cuando se despeja la fórmula. Por ejemplo, queremos saber si caeremos en el número 2536, hacemos: 3x + 5 = 2536 => 3x = 2531 => x = 843 y resto 2. O sea que los números más próximos serán 2534 (843.3 + 5) o 2537.
c) ¿En qué se podría aplicar una fórmula así? ¿Es una función? Si es así, cuál es su gráfica? .....
d) Personal.

4)a) La factorización en primos de 1998 es $2 \times 3^3 \times 37$ y sus divisores son: 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 37, 333, 222, 111, 74, 1998.
b) La cantidad de divisores de un número es la cantidad de productos posibles que se pueden efectuar entre sus factores primos (considerando todas las potencias). Por ejemplo, si entre los factores se encuentra 3^3, hay que considera como factor el 3, el 9 y el 27.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48

5) Observar qué sucede mirando columnas, o filas o diagonales. Por ejemplo: en qué cifras terminan los números de cada columna, si se repiten en forma periódica, si las diferencias en las diagonales son constantes, etc.
a) Para el tablero del 6, los múltiplos de 4 caen en columnas pares (por supuesto) en forma alternada. Los múltiplos de 4 (si se los ordena en forma creciente) siguen una trayectoria zig-zag, empezando en la columna del 4, siguiendo en la del 2 y luego en la del 6. Esto va a ayudar a ubicar los números pedidos: para el número 240, 240 : 4 = 60 (o sea que tiene 60 múltiplos de 6). Como caen en forma alternada en 3 columnas en el orden 4, 2, 6, hacemos 60 : 3 = 20 y resto cero. Quiere decir que caerá en la columna del 4. Para el 4004, hacemos 4004 : 4 = 1001. Luego 1001 : 3 = 333 y resto 2, por lo tanto caerá en la columna del 6. Es decir, si el resto es 0 caerá en la columna del 4; si el resto es 1 en la del 2 y si el resto es 2 en la del 6.
En forma análoga, responder para los otros tableros.

b) Una forma de resolver: ¿Qué potencias de 2 son múltiplos de 6?
Los números en azul son las potencias de 2 que figuran en la tabla. Si seguimos con algunas potencias de 2, podremos deducir en qué columna caerán y buscar una regularidad. Por ejemplo: 64, 128, 256, 512, 1024.....
2^0 → 1° columna
2^1 → 2° c.
2^2 → 4° c.
2^3 → 2° c.

$2^4 \rightarrow 4°$ c.
$2^5 \rightarrow 2°$ c.
$2^6 = 64$, $64 : 6 = 10$ y resto 4 $\rightarrow$ 4° c.
$2^7 = 128$, $128 : 6 = 21$ y resto 2 $\rightarrow$ 2° c.
Podemos inferir que las potencias de 2 caerán, en forma alternada, en la 2° (si el exponente es impar) o 4° columna (si el exponente es par).

Esta conjetura no alcanza para demostrar que es así. Un método muy usado para demostrar propiedades de los números naturales es el **principio de inducción completa.** La demostración que sigue corresponde a un nivel superior. De todos modos se les puede explicar a los alumnos cómo funciona este método de demostración haciendo la analogía clásica de las piezas de dominó paradas todas a una misma distancia (hasta pueden hacer la prueba experimental): hay que asegurarse que si se cae cualquiera de las piezas va a voltear a la que sigue (por eso es importante la distancia a la que se encuentran todas las piezas), con esto se asegura de que caigan todas. Por otro lado esto no se produce si no se voltea la primera pieza.
Desde lo matemático, hay que asegurarse de que la propiedad se cumple para el primer elemento y luego suponer que si se cumple para cualquiera se va a cumplir para el siguiente.
Volvamos a nuestro problema: si el exponente es impar queremos demostrar que se encuentra en la 2° columna, o sea que es múltiplo de 6, + 2. En símbolos:

$$2^{2n+1} = 6k + 2 \text{ con } k \in Z$$

Ver si se cumple para el 1° elemento P(1) : $2^3 = 8 = 6.1 + 2$ (verdadero).
Suponer que si se cumple para un elemento h cualquiera entonces se cumple para el siguiente : si P(h) => P(h+1)
P(h): $2^{2h+1} = 6k + 2$ (se supone verdadero)
P(h+1): $2^{2(h+1)+1} = 2^{2h+3} = 2^{2h+1+2}$ (se trata de que de alguna manera aparezca lo que se denomina la hipótesis inductiva P(h), porque la suponemos verdadera) =
$= 2^{2h+1}.2^2 = (6k+2).4$ (se reemplaza por lo que suponemos verdadero) =
$= 24k + 8 = 6.(4k + 1) + 2$. Se llega a que la propiedad aplicada al siguiente (P(h+1)) también es múltiplo de 6, + 2 (está en la segunda columna).

En forma análoga, si el exponente es par queremos demostrar que se encuentra en la 4° columna, o sea que es múltiplo de 6, + 4. En símbolos:

$$2^{2n} = 6k + 4 \text{ con } k \in Z$$

P(1) : $2^2 = 4 = 6.0 + 4$ (verdadero)
P(h) => P(h+1)
$2^{2h} = 6k + 4$
$2^{2(h+1)} = 2^{2h}.2^2 = (6k+4).4 = 24k + 16 = 6.(4k + 2) + 4$. Por lo tanto es múltiplo de 6, + 4 y está en la 4° columna.

Para las potencias de 10 hacemos un razonamiento similar. Por lo que se ve en el tablero, 10 está en la 4° columna. La próxima potencia de 10 es $100 = 10^2$, $100 : 6 = 16$ y resto 4, o sea que también está en la 4° columna. Probemos con una potencia más,

$10^3 = 1000$, $1000 : 6 = 166$ y resto 4. Podemos sospechar que todas las potencias de 10 están en la 4° columna.
Pero esta conjetura, como dijimos anteriormente, no basta.

Vamos a demostrar que $10^n = 6k + 4$
P(1): $10^1 = 10 = 6.1 + 4$ (se cumple)
P(h) => P(h+1)
P(h): $10^h = 6k + 4$
P(h+1): $10^{h+1} = 10^h . 10 = (6k + 4) .10 = 60k + 40 = 60k + 36 + 4 = 6. (10k + 6) + 4$. O sea que se cumple.
Por lo tanto los múltiplos de 10 se encuentran en la 4° columna.

6)

- 37 por un múltiplo de 3 da un número de cifras iguales (hasta tres cifras).
- Los otros múltiplos de 37 terminan según la siguiente secuencia: 7-4 , 8-5 , 9-6, 0-7 , 1-8…..

Para hallar, por ejemplo 37 x 23 = 37 x 42 – 37 = 37 . 2 . 12 – 37 = 2 . 444 – 37 = 851

7) Generalizando, si el número de tres cifras es ABC, armamos el número ABCABC y lo descomponemos:

ABCABC = 100000A + 10000B + 1000C + 100A + 10B + C = 100100A + 10010B + 1001C =

1001(100A + 10B + C) , o sea que este número es múltiplo de 1001.

Por otro lado 7 x 11 x 13 = 1001, quiere decir que el número de 6 cifras, al ser múltiplo de 1001, también lo es de sus divisores, o sea de 7,11 y 13.

8) Se puede comenzar con números más pequeños, por ejemplo: 7, 12, 5, 9

|7-12|	|12-5|	|5-9|	|9-7|
5	7	4	2
2	3	2	3
1	1	1	1
0	0	0	0

Estas diferencias convergen a cero, rápidamente.

Probemos con los números propuestos:

38, 97, 65 y 42

|38-97|	|97-65|	|65-42|	|42-38|
59	32	23	4
27	9	19	55
18	10	36	28

8 26 8 10

18 18 2 2

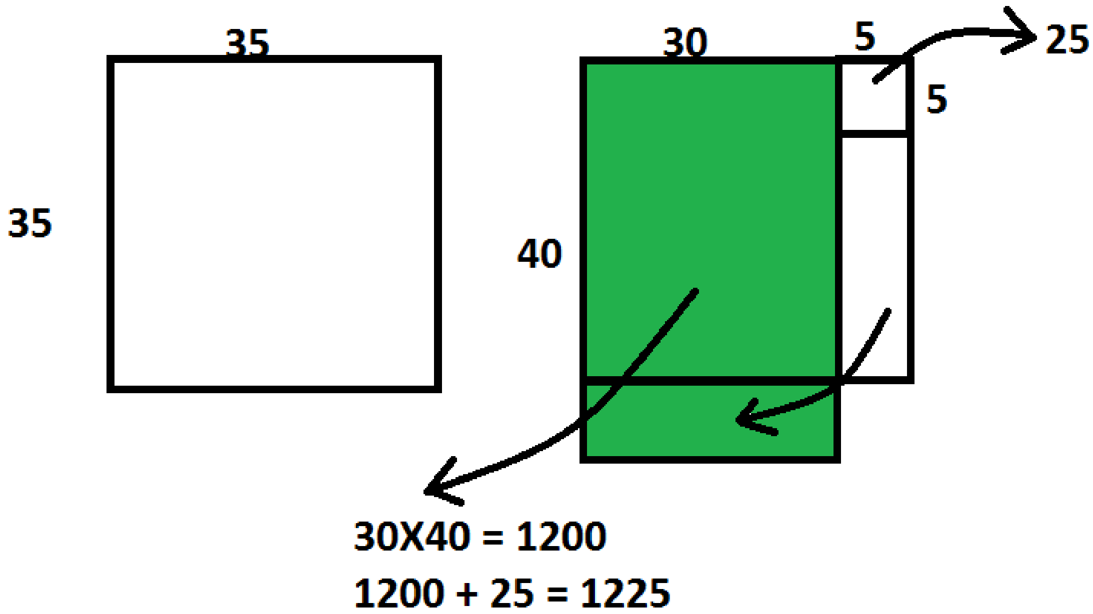
0 16 0 16

16 16 16 16

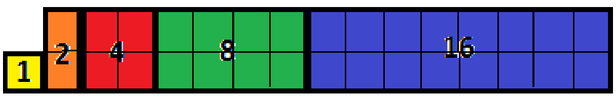
0 0 0 0

Las diferencias otra vez convergen a cero, estas vez no tan rápidamente.

9) Ejemplo: $35^2 = 1225$



10) Se puede representar la situación a través de un rectángulo de altura 2 y la base va variando al ir agregándole las distintas potencias de 2 (menos una unidad). Observar que en cada paso, la suma es igual a la siguiente potencia menos 1:



11) a)

1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7
4	9	16	25	36	49
8	27	64	125	216	343
16	81	256	625	1296	2401
32	243	1024	3125	7776	16807
64	729	4096	15625	46656	117649

Por ejemplo buscar en qué cifras termina cada número por columna, si siguen un ciclo, etc.

b)

2^{29}	3^{57}
4^{99}	7^{62}

Los últimos dígitos de las potencias de 2 se repiten en forma cíclica de la siguiente manera: 2, 4, 8, 6 (sin tener en cuenta $2^0 = 1$, ídem para todas las bases de exponente cero). Por lo tanto 29:4 = 7 y resto 1, o sea que 2^{29} termina en 2.

Los últimos dígitos de las potencias de 3 se repiten en forma cíclica de la siguiente manera: 3, 9, 7, 1. Por lo tanto 57 : 4 = 14 y resto 1. Entonces 3^{57} termina en 3.

Con razonamiento análogo, parra las potencias de 4, los últimos dígitos se repiten: 4, 6. Entonces 99 : 2= 49 y resto 1. la última cifra de 4^{99} es 4.

Y para las potencias de 7, sus últimos dígitos se repiten: 7,9,3,1. Como 62 :4 = 15 y resto 2, 7^{62} termina en 9.