PAQUETITO DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

Adriana Rabino

Los problemas fueron extraídos de B. Zolkower: *Handbook of Mathematical-Didactical Activities. 2004 (con autorización de la autora).*

1. ¿Cuál es mayor?

Consideremos dos números A y B, tales que A > B, y que sumados ambos dan 1.
Elevar al cuadrado el número mayor y sumarle el menor. Luego elevar al cuadrado el número menor y sumarle el mayor. ¿Cuál de estas dos sumas será mayor?

2. El cuadrado de una diferencia

Usar el modelo de área para mostrar que $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
(Ver en esta página en Publicaciones Internas, el artículo: La enseñanza del Álgebra y los Modelos de Área de C. Covas y A. Bressan)

3. El cuadrado de la suma de tres números

Usar el modelo de área para mostrar que $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2AC$

4. Diferencia de cuadrados

Usando el modelo de área mostrar que $A^2 - B^2 = (A + B) . (A - B)$

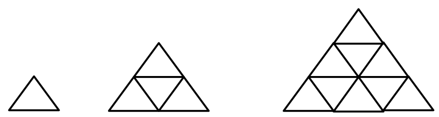
5. Antonio y Sofía

Antonio y Sofía ingresan el mismo número en sus calculadoras respectivas. Sofía lo multiplica por 4 y le suma 3. Antonio lo multiplica por 2 y le suma 17. Ambos llegan al mismo resultado. ¿Con qué número empezaron?

6. Tres dígitos

Elegir tres dígitos cualesquiera entre 0 y 9. Sumar 4 al primero y multiplicarlo por 10. Luego sumar el segundo dígito a este producto y multiplicarlo por 10. A este resultado sumarle el tercer dígito elegido. Por último restarle 400 a este resultado. ¿Cómo puede ser que este número final tenga los tres dígitos elegidos y en el mismo orden?

7. Escarbadientes y triángulos



Dibujar las dos figuras siguientes en esta secuencia y completar la tabla siguiente:

Número de escarbadientes	3	9	18		
Número de triángulos pequeños	1	4	9		
Perímetro	3	6	9		

a) Escribir una regla que relacione el número de triángulos pequeños (n) con el perímetro de la figura.
b) Escribir una regla que relacione el número de triángulos pequeños y el número de escarbadientes necesarios para cada figura.
c) Si el patrón continua, ¿cuántos escarbadientes serán necesarios para construir una figura que tenga 100 triángulos?

d) Si se tiene una caja que contenga 160 escarbadientes, ¿cuál será el perímetro de la figura de la secuencia que se puede hacer con todos ellos?

8. Un hombre tiene x años en el año x^2. ¿Qué edad tenía en 1960?

9. Resolver mentalmente el siguiente sistema:

$6{,}751x + 3{,}249y = 26{,}751$
$3{,}249x + 6{,}751y = 23{,}249$

10. ¿Puede un elefante pesar lo mismo que un mosquito?
Sea *x* el peso de un elefante e *y* el del mosquito. Llamemos 2v a la suma de los dos pesos, entonces $x + y = 2v$. De esta ecuación se pueden obtener dos más: $x – 2v = -y$ entonces $x = -y + 2v$. Multiplicando por x la segunda ecuación obtenemos: $x^2 – 2vx = -y \cdot x$. Pero como $x = -y + 2v$, queda que $x^2 – 2vx = y^2 – 2vy$. Al sumar v^2 a ambos miembros tenemos:

$$x^2 – 2vx + v^2 = y^2 – 2vy + v^2 \text{ ó } (x – v)^2 = (y – v)^2$$

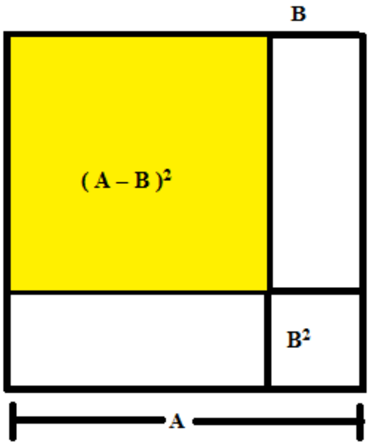
Sacar la raíz cuadrada de ambos miembros de la igualdad queda: $x – v = y – v$. De esto resulta que entonces $x = y$.
Esto significa que el peso del elefante (x) es igual al peso del mosquito (y). ¿Dónde está el error en este razonamiento?

11. Para asegurarse que su hijo Marcos hiciera bien la tarea de matemática, su padre le dijo que le daría 8 pesos por cada problema correcto de su tarea, y que le quitaría 5 pesos por cada problema incorrecto.
La tarea asignada consistió en 26 problemas. Al otro día su padre le preguntó cuánto le debía, y Marcos le dijo: *"No me debes nada,Pa, estamos parejos"*. ¿Cuántos problemas correctos y cuántos incorrectos hizo Marcos?

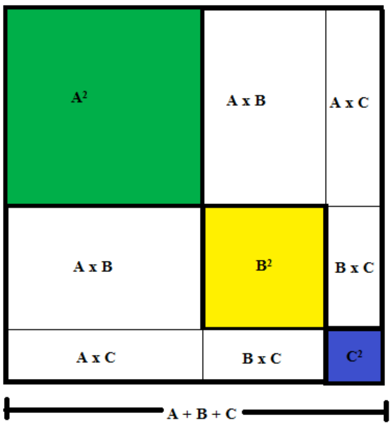
12. Cuando una pantalla se coloca a 10 metros del proyector, la figura ocupa 10 metros cuadrados. ¿Qué tamaño tendrá la figura cuando el proyector está a 15 metros de la pantalla?
ESTE ES BUENO PARA UN TRABAJO DE PROYECCIÖN

Posibles respuestas

1. Los alumnos pueden dar una respuesta intuitiva (es probable que crean que al elevar al cuadrado el número mayor el resultado será mayor) antes de verificar con algunos ejemplos, con lo cual comprobarán que el resultado es el mismo. Deberán entender que con ejemplos no se comprueba para todos los casos, por lo tanto será necesaria una demostración, por ejemplo como la que sigue:
Se sabe que $A > B$ y además $A + B = 1$, de donde $A = 1 – B$
Entonces $A^2 + B = (1 – B)^2 + B = 1^2 – 2B + B^2 + B = 1 – B + B^2$
Mientras que $B^2 + A = B^2 + 1 – B$
Con lo cual ambos resultados son iguales.

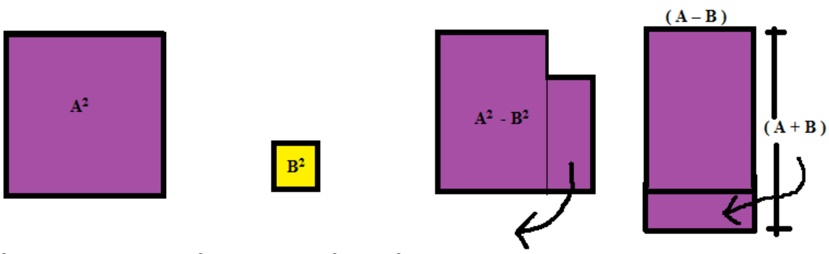


2. Para obtener $(A - B)^2$, al cuadrado grande (A^2) se le debe quitar dos rectángulos A x B, pero como están superpuestos un área que mide B^2, para no restar dos veces esa área, se debe sumar B^2 una vez. Por lo tanto: $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$



3. El lado del cuadrado grande es A + B + C, por lo tanto su área es $(A + B + C)^2$. Si se observan los rectángulos que lo conforman, se podrá observar que su área es equivalente a la suma de las áreas de todos los rectángulos, o sea: $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$

4.



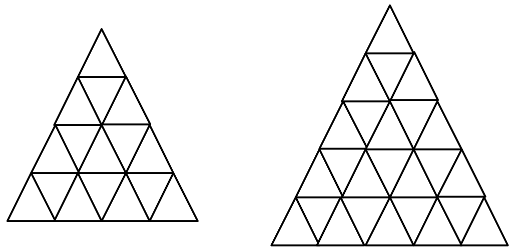
Si a A^2 le quitamos B^2, queda $A^2 - B^2$. Descomponiendo y volviendo a componer esta figura de manera conveniente se puede comprobar que, como el área se conserva, las dos figuras son equivalentes, por lo tanto: $A^2 - B^2 = (A + B) .(A - B)$, que es el último rectángulo.

5.
Sea n el número en cuestión. La operación que realiza Sofía es: n x 4 + 3, y la que realiza Antonio es n x 2 + 17. Como los dos llegan al mismo resultado podemos expresar que: $4n + 3 = 2n + 17$
Resolviendo esta ecuación concluimos que $n = 7$.

6.
La expresión simbólica de esta operación combinada es:
$[(a + 4) . 10 + b] . 10 + c - 400 = (10a + 40 + b) . 10 + c - 400 =$
$100a + 400 + 10b + c - 400 = 100a + 10b + c$ que es la descomposición polinomial del número abc (a centenas, b decenas y c unidades).

Propuesta: se le puede pedir a los alumnos que inventen situaciones análogas empezando de atrás para adelante. En la medida que queden anulados los términos que se agregan a la descomposición polinomial, siempre se va a llegar al resultado.

7.



Número de escarbadientes	3	9	18	30	45
Número de triángulos pequeños	1	4	9	16	25
Perímetro	3	6	9	12	15

a) $P = \sqrt{n} . 3$

Se puede simplificar la búsqueda realizando primero una tabla que relacione el número de triángulos con el lado. Fácilmente se verá que es la raíz cuadrada de n. El paso para hallar la fórmula del perímetro es inmediato.

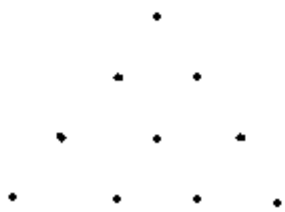
b) Pero encontrar una relación entre el número de triángulos pequeños y el número de escarbadientes no es tan inmediato. En todos estos casos en que se trabaja la *generalización*, se sugiere hacer tablas con los datos conocidos y buscar todas las regularidades posibles. Si bien es posible que se llegue al resultado con la guía del docente, este trabajo de búsqueda resulta muy rico para la práctica matemática de los alumnos.

Por ejemplo, para este caso, se podría proceder así:

n° de triángulos	n° de escarbadientes
$1 = 1^2$	$3 = 3 . 1$
$4 = 2^2$	$9 = 3 . 3$
$9 = 3^2$	$18 = 3 . 6$
$16 = 4^2$	$30 = 3 . 10$
$25 = 5^2$	$45 = 3 . 15$

Además de las relaciones que aparecen en la tabla anterior, se puede ir un poco más allá y ver, por ejemplo, que la cantidad de triángulos en cada caso son cuadrados perfectos cuyas bases son los números naturales.

En la columna de los escarbadientes se puede ver que son todos múltiplos de 3 (lo cual tiene sentido porque los escarbadientes son los lados de los triángulos). Al expresarlos todos como 3 por "algo", los factores de cada caso son los llamados números triangulares dado que con esas cantidades se pueden hacer disposiciones triangulares. La fórmula para generar números triangulares es $[x . (x + 1)] / 2$ (si se disponen puntos de tal forma que se vayan armando triángulos, se observará que en cada fila la cantidad de puntos son los números naturales 1, 2, 3…., por lo tanto al sumarlos para considerar cada uno de los triángulos que se van formando, se tiene la misma fórmula que para sumar los primeros x números naturales):



Volviendo a los escarbadientes, si n es el número de triángulos, x (que es el número de orden en la tabla) $= \sqrt{n}$. Entonces el número de escarbadientes relacionado con el número de triángulos es $E = [3 . \sqrt{n} (\sqrt{n} + 1)] / 2$.

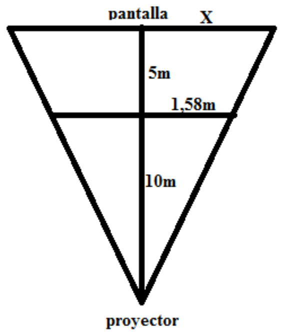
c) Para 100 triángulos, el número de escarbadientes se deduce de la fórmula anterior:
E = 3 . 10 . 11 / 2 = 165.
d) Con 160 escarbadientes no se puede realizar una figura de la secuencia (o 135 escarbadientes para armar 81 triángulos o 165 escarbadientes para armar 100).

8. El cuadrado más próximo a 1960 es 44^2 (esto se deduce sacando la raíz cuadrada a 1960). Entonces $44^2 = 1936$. Quiere decir que este hombre en 1936 tenía 44 años por lo tanto nació en 1892, por lo tanto en 1960 tenía 78 años.
Se descarta 43 años porque el hombre debería tener 154 años en 1960 (verificar), y también se descarta 45 años porque en 1960 no hubiera nacido.
9. Sumando las dos ecuaciones se obtiene 10x + 10y = 50, con lo cual x + y =5. Probando los posibles sumandos (por supuesto números enteros) las posibilidades son 2 y 3.

10. El error está en que, al no ser un sistema de ecuaciones <u>sino tres ecuaciones equivalentes entre sí,</u> no tiene sentido la sustitución que se hace y se comete el error.

11. Sean C los problemas correctos e I los problemas incorrectos.
C + I = 26 que es el total de los problemas
8C = 5I, la cantidad de dinero por problemas correctos es la misma que por los incorrectos.
Solucionando este sistema se concluye que hizo 16 problemas incorrectos y 10 problemas correctos.

12. La figura tendrá más de 22 metros cuadrados, no es proporcional la distancia (longitud) al área. Si la distancia aumentó 1,5 veces, el área aumentará esta razón al cuadrado, o sea 2,25 veces. Una forma de comprobarlo es pensar que la figura es un cuadrado de 10 metros cuadrados (para simplificar el modelo), entonces el ancho de la figura será la raíz cuadrada de 10, o sea aproximadamente 3,16 metros. Haciendo un plano de la situación:



y utilizando recursos como Teorema de Thales o de proporcionalidad de triángulos se puede saber el valor de X = (1,58 . 15) : 10 = 2,37 metros, que es la mitad del ancho de la figura (cuadrada en este caso). Con lo cual el lado de ese cuadrado medirá 4,74 metros aproximadamente y su área será 22,46 metros cuadrados.