**¡POTENCIAS ALOCADAS!**

Extraído de NRICH: http://nrich.maths.org/

¿Puedes encontrar argumentos convincentes que expliquen por qué las proposiciones siguientes son verdaderas?

1) $2^1 + 3^1$, $2^3 + 3^3$, $2^5 + 3^5$,…, $2^{99} + 3^{99}$ son todos múltiplos de 5.
2) $1^{99} + 2^{99} + 3^{99} + 4^{99}$ es un múltiplo de 5.
3) $1^x + 2^x + 3^x + 4^x + 5^x$ es múltiplo de 5 cuando x es impar.

**Solución Problema 1 (Oscar Bressan)**

| ***Potencias impares de 2*** | ***Potencias impares de 3*** |
|---|---|
| ***$2^1 = 2$*** | ***$3^1 = 3$*** |
| ***$2^3 = 8$*** | ***$3^3 = 27$*** |
| ***$2^5 = 32$*** | ***$3^5 = 243$*** |
| ***$2^7 = 128$*** | ***$3^7 = 2187$*** |
| ***…*** | ***…*** |
| ***$2^{2(m-1)+1}$ = podrá terminar en 2 o en 8*** | ***$3^{2(m-1)+1}$= podrá terminar en 3 o en 7*** |

***Nuestro cometido es demostrar que:***

***$K = 2^{2(m-1)+1} + 3^{2(m-1)+1}$ siempre es divisible por 5 (m es un número natural).***

La demostración tiene varias etapas, pero la base es que el último dígito del número "K" debería ser un cinco o un cero.

Tomemos por partes. Primero cuando las unidades son 2 y 3 para las potencias de bases 2 y de 3 respectivamente y segundo cuando son 8 y 7 respectivamente.

**Primera parte**

a) Primero voy a demostrar por inducción completa que el último dígito de :

**$2^{4(n-1)+1}$ siempre es el número 2**.

a1) Para n = 1 se cumple, ya que $2^{4(1-1)+1} = 2^1 = 2$

a2) Se hace la hipótesis de que esto se cumple para un dado n. O sea que el último dígito de $2^{4(n-1)+1}$ es un 2.

a3) Se demuestra que esto es cierto para n+1:

$$2^{4((n+1)-1)+1} = 2^{4(n-1)+1} \times 2^4 = 2^{4(n-1)+1} \times 16$$

porque todo número cuyo último dígito termina con 2 multiplicado por cualquier número que termina en 6 (en este caso 16) da como resultado un número cuyo último dígito termina con 2.

b) Ahora voy a demostrar por inducción completa que el último dígito de :

$3^{4(n-1)+1}$ **siempre es el número 3.**

b1) Para n = 1 se cumple, ya que $3^{4(1-1)+1} = 3^1 = 3$

b2) Se hace la hipótesis de que esto se cumple para un dado n. O sea que el último dígito de

$3^{4(n-1)+1}$ es un 3.

b3) Se demuestra que esto es cierto para n+1:

$3^{4((n+1)-1)+1} = 3^{4(n-1)+1} \times 3^4 = 2^{4(n-1)+1} \times 81$

lo que es cierto porque todo número cuyo último dígito termina con 3 multiplicado por cualquier número que termina en 1 (en este caso 81) da como resultado un número cuyo último dígito termina con 3.

**c) En consecuencia, al sumar**

$$\mathbf{K1 = 2^{4(n-1)+1} + 3^{4(n-1)+1}}$$

estamos sumando un número que termina con un 2 con otro número que termina con 3, y el resultado (o sea K1) termina con 5, y esto se satisface para cualquier n..

**Segunda parte**

d) Por inducción completa, siguiendo el mismo procedimiento, se demuestra que el último dígito de:

$2^{4(n-1)+3}$ **siempre es un 8.**

e) Por inducción completa, siguiendo el mismo procedimiento, se demuestra que el último dígito de:

$3^{4(n-1)+3}$ siempre es un 7.

f) En consecuencia, al sumar

$$\mathbf{K2 = 2^{4(n-1)+3} + 3^{4(n-1)+3}}$$

estamos sumando un número que termina con un 8 con otro número que termina con 7, y el resultado (o sea K) termina con 5, y esto se satisface para cualquier n.

Finalmente hemos obtenido que:

$$\mathbf{K1 = 2^{4(n-1)+1} + 3^{4(n-1)+1}} \quad \Rightarrow \textbf{es divisible por 5}$$
$$\mathbf{K2 = 2^{4(n-1)+3} + 3^{4(n-1)+3}} \quad \Rightarrow \textbf{es divisible por 5}$$

y esto implica que

$$\mathbf{K = 2^{2(m-1)+1} + 3^{2(m-1)+1}} \textbf{ es divisible por 5}$$

**ya que cuando m es par el desarrollo corresponde a K1, y cuando es impar corresponde a K2.**

**En cuanto a los dos otros problemas, si usted logra demostrar que $4^x$ (con x impar) da 4 en las unidades tiene la solución de los mismos:**

| |
|---|
| $4^1 = 4$ |
| $4^3 = 64$ |
| $4^5 = 1024$ |
| $4^7 = 16384$ |
| …. |

**Observe que al multiplicar por 16 para pasar de una potencia impar a otra un número terminado en 4 le va a dar un número terminado en 4.**

**¡Ahora le toca a usted completar los problemas 2 y 3!**