<u>PROBABILIDAD Y GEOMETRÍA II.</u> Volviendo a la caza de triángulos en un círculo

El problema de Hall que se presenta a continuación es muy interesante, es un real desafío, pero para no desanimarnos de entrada, empecemos por otros más sencillos de resolver, dado que ya disponen de estrategias si han resuelto el problema del mes de julio sobre el tema.

<u>Para enterarnos:</u>

<u>Triángulo acutángulo en una círculo</u> (Glen Richard Hall. Extraído de "El libro de las matemáticas" de Pickover. Pág. 476)

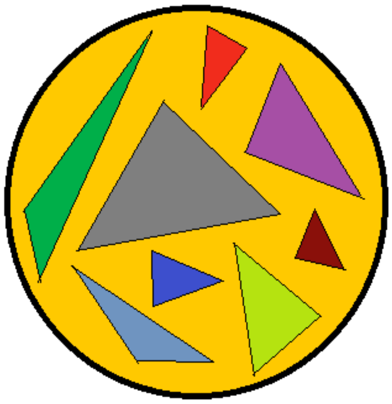


Figura 1

Problema: *Seleccionar tres puntos en un círculo de forma aleatoria para crear un triángulo. ¿Qué probabilidad existe de obtener un triángulo acutángulo?*

En 1982 Glen Hall publicó su célebre trabajo *Acute Triangles in the n-Ball* (Triángulos acutángulos en una esfera de n dimensiones). Se trataba del primer documento matemático que publicaba y en él se describía el trabajo que desarrolló mientras cursaba un posgrado de probabilidad geométrica en la Universidad de Minnesota. Imagínese que elige tres puntos de un círculo de forma aleatoria para crear un triángulo.

Hall se preguntó: **¿Cuál sería la probabilidad de obtener un triángulo acutángulo, no sólo para triángulos en el interior de un círculo, sino también en dimensiones superiores, como dentro de esferas e hiperesferas?.**

Hall se dio cuenta de que, conforma aumentaba la dimensión de la esfera, la probabilidad de elegir un triángulo acutángulo también aumentaba.

A continuación se presentan algunos valores de P_n, la probabilidad de seleccionar un triángulo acutángulo en una n-esfera si los tres puntos del triángulo se eligen de forma independiente y uniforme:

$P_2 = 4/\pi^2 - 1/8 = 0{,}280285$ (círculo)

$P_3 = 33/70 \cong 0{,}471429$ (esfera)

$P_4 = 256/(45\pi^2) + 1/32 \cong 0{,}607655$ (hiperesfera tetra dimensional)

$P_5 = 1415/2002 \cong 0{,}706793$ (hiperesfera pentadimensional)

$P_6 = 2048/(315\pi^2) + 31/256 \cong 0{,}779842$ (hiperesfera hexadimensional)

El trabajo relativo a los triángulos es extraordinario porque hasta principios de los ochenta los matemáticos no dispusieron de ninguna generalización sobre la selección de triángulos en dimensiones superiores. Hall señalaba que estaba maravillado por la aparente alternancia de las probabilidades entre soluciones racionales e irracionales según la dimensión de la esfera, una oscilación dimensional que probablemente los matemáticos no hubieran sospechado nunca antes de esta investigación.

Seguimos con GEOMETRÍA Y PROBABILIDADES II
(Problemas extraídos de Rochera Gaya J. El Taller de Talentos Matemáticos, Zaragoza, 16 abril 2010).

Soluciones a cargo de Adriana Rabino y Oscar Bressan (GPDM).

Como vimos el mes pasado la propiedad que más se utiliza en la resolución de estos problemas es la de los ángulos inscriptos en una circunferencia. También se aplica la definición de Laplace de probabilidad de un evento determinado: casos favorables/casos posibles.

Problema 1. Se selecciona al azar un punto P del interior del pentágono de vértices A(0;2), B(4;0), C(2π+1;0),D(2π+1;4) y E(0,4). ¿Cuál es la probabilidad de que el ángulo APB sea obtuso?

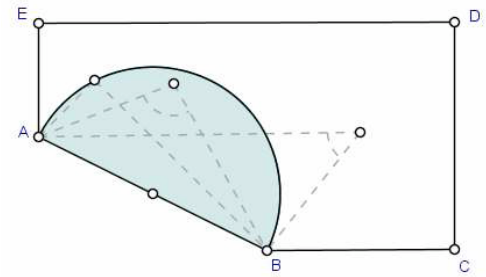


Figura 2

<u>Solución</u>: Los puntos P cuyo ángulo APB sea obtuso deben ser interiores a la semicircunferencia de diámetro AB. La probabilidad buscada será el cociente entre las áreas de la región favorable (semicírculo) sobre la región posible (pentágono).

AB = $2\sqrt{5}$

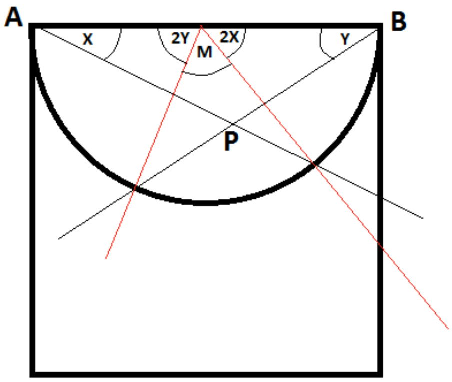
Área del semicírculo = $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{5})^2$

Área del pentágono = $(2\pi+1).2 + (2\pi+1+2\pi+1-4).2:2 = 8\pi$

=> P (<APB obtuso) =$[\frac{1}{2}\pi . (\sqrt{5})^2]/8\pi = 5/16$

Nota: Al trazar una semicircunferencia interior al pentágono sobre el lado AB, los triángulos ABP cuyo vértice P pertenece a la semicircunferencia de diámetro AB son rectángulos, ya que son triángulos inscriptos en una circunferencia cuyo lado AB = cuerda AB = diámetro (el ángulo central correspondiente es de 180°). Y los triángulos ABP cuyo vértice P pertenecen al semicírculo serán obtusángulos. Con la ayuda de algún software como el CABRÍ o el GEOGEBRA se puede verificar en forma dinámica cómo van variando los triángulos de acuerdo a la zona a la cual pertenecen.
Cabe aclarar que este tratamiento no es riguroso ya que, si bien abarca muchísimos casos, no cubre la totalidad como lo sería una demostración matemática. Pero podemos decir que es más *creíble* y hasta los alumnos pueden inferir ellos mismos, a partir del análisis del comportamiento de los triángulos al atravesar cada zona, a qué clase pertenecen.
Se propone entonces dibujar el triángulo de vértices AB y al tercer vértice P hacerlo móvil en forma "manual" dentro de ambas zonas (para que vean cuándo son obtusángulos y cuándo acutángulos), o poniendo "punto sobre objeto" (en este caso el objeto es la semicircunferencia) y que el punto P recorra la misma para que los alumnos visualicen que esos triángulos permanecen rectángulos.

Una demostración matemática sería:
Hay que demostrar que X + Y < 90° para que el triángulo APB sea obtusángulo.



Se aplica la propiedad que expresa que todo ángulo inscripto en una circunferencia mide la mitad del ángulo central correspondiente entendiéndose por tal el que abarca el mismo arco de circunferencia.

Como $2X + 2Y + M = 180°$
$X + Y + M/2 = 90°$ (dividiendo ambos miembros por 2)
=> $X + Y = 90° - M/2 < 90°$ (por ser M/2 un valor positivo)
=> (por carácter transitivo) que $X + Y < 90°$
Por lo tanto el ángulo P es obtuso, con lo cual el triángulo APB es obtusángulo.

Problema 2. A, B son dos puntos de una circunferencia C de radio R, tales que la cuerda AB vale R. Se elige al azar un punto P del círculo, hallar la probabilidad de que el triángulo ABP sea acutángulo si:
(a) P está en la circunferencia.
(b) P es un punto del interior del círculo.

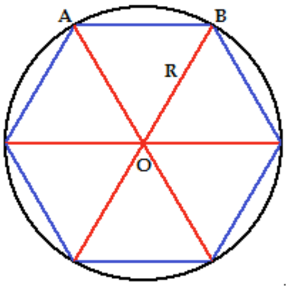


Figura 3

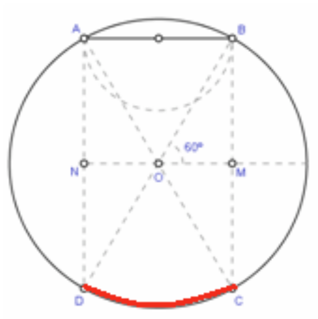


Figura 4

<u>Solución a)</u> El ángulo AOB es de 60° (al ser AB = R es el lado del hexágono regular inscrito, ver figura 3) Entonces, si P es un punto de la circunferencia, el ángulo APB será obtuso si está entre A y B en el arco superior y será agudo si está en el arco inferior (ver figura 4). O sea que hay que descartar, en principio, que P esté en el arco superior AB. Entonces hay que ubicar a P en el arco AB inferior. Si P está en D o C, el triángulo es rectángulo. Si P está en el arco menor BC el ángulo B será obtuso y si P está en el arco menor AD el ángulo A también será obtuso.
Los ángulos A y B serán agudos si P está entre C y D (diametralmente opuestos a A y B).

Por lo tanto la probabilidad será:

$$P(\text{ángulo ARB acutángulo}) = \frac{(60/360)2\,\pi\,R}{2\,\pi\,R}$$

Solución b)

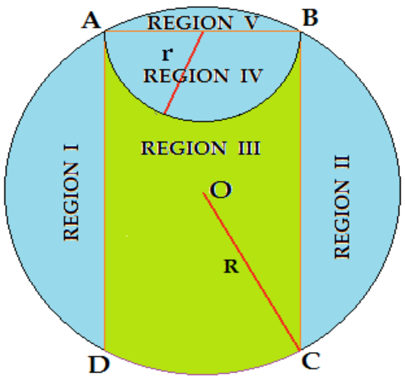


Figura 5

Sobre la circunferencia tomamos los puntos "A" y "B" tal que el segmento AB sea igual a su radio R. Por el punto A trazamos el segmento AD, perpendicular a AB y por el punto B el segmento BC, también perpendicular a AB. Con origen en el centro del segmento AB trazamos la semicircunferencia de radio r = ½ R. De este modo el círculo queda integrado por cinco regiones (figura 5):

Región I: Es un segmento circular que está a una distancia $d_I = r = ½\, R$ del centro del círculo.
Región II: Similar a la región I.
Región III: Es la región coloreada con verde en la figura 1.
Región IV: Es el semicírculo de radio r.
Región V: Es el segmento circular que está a una distancia d_V (que calculamos por Pitágoras, ver figura 6):

$$\boxed{d_V = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Si el punto P está sobre el segmento, entonces el triángulo es rectángulo ya que el ángulo DAB es recto. Lo mismo ocurre si el punto P está sobre el segmento BC. Y también si está sobre la circunferencia de radio r que limita a la región IV, ya que el ángulo APB será recto.
Si el punto P está dentro de la **región I** el triángulo es obtusángulo, ya que el ángulo PAB será mayor que un recto (problema 1). Lo mismo ocurre en la **región II.** También si el punto P está en la **región IV** el triángulo es obtusángulo por ser el ángulo APB mayor que un recto. Lo mismo ocurre si el punto está en la **región V**.
Si en cambio el punto P está en la **región III** el triángulo es **siempre** acutángulo, y si está en cualquiera de las otras cuatro regiones será siempre obtusángulo.

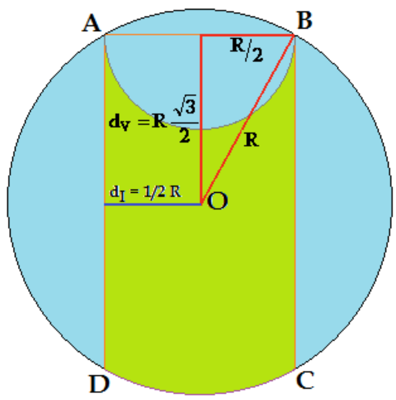


Figura 6

Esto implica que la probabilidad de que el triángulo sea acutángulo es igual a la superficie de la región III dividida por la superficie total del círculo de radio R.

Para hacer este cómputo tomaremos la superficie del círculo y le restaremos las superficies de las regiones I, II, IV y V.

<u>El área del círculo</u> es:

$$\text{Área del círculo} = \pi R^2$$

<u>Área de la región I</u>: El área de un segmento circular (figura 7) se calcula como la diferencia entre el área del sector circular (figura 8) y la del triángulo (figura 9).
El sector circular que comprende a la región I forma un ángulo de 120°, de modo que su área es un tercio del área del círculo ((1/3) πR^2). El segmento OH (fig. 9) vale R/2, ya que es la mitad del segmento AB (ver figura 5). A su vez el segmento HB (gracias a nuestro siempre bien valorado Pitágoras) mide (R/2)*√3. El área del sector es:

$$\text{Área sector} = \frac{R}{2}\frac{R}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$

Como dijimos el área del segmento circular es la diferencia:

$$\text{Área región I} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}R^2$$

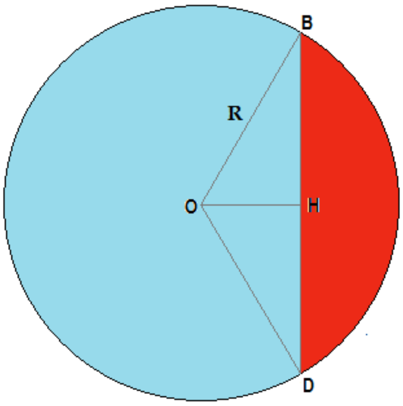


FIGURA 7

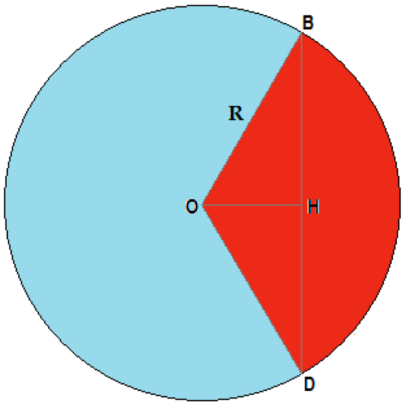


FIGURA 8

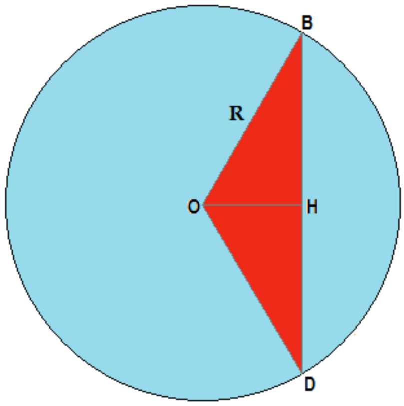


FIGURA 9

<u>Área de la región II</u>: Obviamente la región II tiene igual área que la región I.
<u>Área de la region IV</u>: Es un semicírculo de radio R/2. En consecuencia:

$$\text{Área región IV} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}R^2$$

<u>Área de la region V</u>: Es un segmento circular, diferencia de un sector circular con un ángulo de 60° (o sea que su área es (1/6) πR^2) y un triángulo equilátero con lados igual a R y una altura (R/2)√3. Entonces:

$$\text{Área región V} = \frac{1}{6}\pi R^2 - \frac{1}{2}R\frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}R^2$$

<u>Área de la región III</u>: Dado que:

Área III = Área del círculo - Área de las regiones I, II, IV y V

$$\text{Área región III} = \pi R^2 - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6} R^2 - \frac{\pi}{8} R^2 - \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} R^2 = \frac{18\sqrt{3} + \pi}{24} R^2 \cong 1{,}42994\, R^2$$

<u>La probabilidad</u> se calcula dividiendo esta área por la superficie del círculo:

$$\text{Probabilidad triang. PAB sea acutángulo} = \frac{\left(18\sqrt{3} + \pi\right) R^2}{24\pi R^2} \cong 0{,}45516$$

Esta probabilidad resulta independiente del tamaño del círculo ya que el radio se simplifica.

Comentario: Hay un resultado que es notorio porque va en contra de toda intuición. Si se tuviera que calcular la probabilidad que los triángulos dentro del círculo sean rectángulos (siendo uno de los lados una cuerda del mismo), esta probabilidad es cero, ya que se debería tomar como casos favorables para conformar el tercer vértice a aquellos puntos que:

a) están sobre una semicircunferencia que por ser una longitud, tiene área 0, o

b) están sobre uno de los dos segmentos que pasan por los extremos de la cuerda y son perpendiculares a esta cuerda cuya área, por ser un segmento nuevamente es cero.

Por lo tanto, la probabilidad de obtener triángulos rectángulos en el círculo será CERO!!!!

Nota: También en este problema la ayuda de algún software como el CABRÍ o el GEOGEBRA paRA es muy útil para verificar en forma dinámica cómo van variando los triángulos de acuerdo a la zona a la cual pertenecen. En

a. trabajar con “punto sobre objeto”, hacer recorrer el punto p sobre la circunferencia y ver dónde el triángulo apb es acutángulo de acuerdo a la zona transitada, teniendo en cuenta la figura 4.
b. se puede mover en forma “manual” el punto p, haciendo recorrer las zonas propuestas en la solución (figura 5), o que los mismos alumnos descubran dichas zonas haciendo variar los triángulos y viendo dónde se transforman en acutángulos.

A partir de determinar a qué zona pertenece cada clase, se procede a calcular la probabilidad utilizando las áreas de las zonas correspondientes.