¿Cuántas bolitas de cada clase para que la probabilidad sea 1/3?

Oscar Bressan

A mi sobrino le dieron el siguiente problema:

De un bolillero que tiene bolitas negras y rojas se extrae una bolita roja. Luego se duplica la cantidad de bolitas negras. ¿Cuántas bolitas debe haber para que la probabilidad del resultado sea 1/3?

Solucion…es

Todos los problemas matemáticos (y también los no matemáticos) deben enunciarse sin ambigüedades a fin de que tengan una interpretación única y eviten confusiones sobre cómo deben tratarse. Este enunciado puede ser interpretado de tres modos diferentes y cada alternativa va a tener un resultado diferente.

Primera interpretación: de un bolillero que tiene bolitas negras y rojas se extrae una bolita roja **que no se repone en el bolillero**. Luego se duplica la cantidad de bolitas negras. ¿Cuántas bolitas debe haber para que **la probabilidad de sacar una bolita negra** sea 1/3?

Solución: para que sea 1/3 la probabilidad de sacar un negra tiene que haber en el bolillero (en el momento de extraerla) el doble de bolitas rojas que de bolitas negras (o sea 2/3 de bolitas rojas y 1/3 de bolitas negras).

Esto puede pasar de infinitos modos posibles. Por ejemplo en el bolillero tenemos:

Originalmente:	13 bolitas rojas y 3 negras
Extraemos una roja:	12 bolitas rojas y 3 negras
Duplicamos las negras:	12 bolitas rojas y 6 negras

y ahora la probabilidad de extraer una negra es 1/3:

$$P(\text{negra}) = 6 / (12 + 6) = 6 / 18 = 1/3$$

Un ejemplo alternativo sería que en bolillero tengamos:

Originalmente:	21 bolitas rojas y 5 negras
Extraemos una roja:	20 bolitas rojas y 5 negras
Duplicamos las negras:	20 bolitas rojas y 10 negras

y ahora la probabilidad de extraer una negra es 1/3:

$$P(\text{negra}) = 10 / (20 + 10) = 10 / 30= 1/3$$

En resumen, si tengo originalmente "n" bolitas negras tengo que tener "4 n + 1" bolitas rojas, para que después de sacar la roja y duplicar las negras tenga una probabilidad igual a 1/3 de sacar una negra.

Segunda interpretación: de un bolillero que tiene bolitas negras y rojas, se extrae una bolita roja **que se repone en el bolillero**. Luego se duplica la cantidad de bolitas negras. ¿Cuántas bolitas debe haber para que **la probabilidad de sacar una bolita negra** sea 1/3?

Solución: en este caso si tengo originalmente "n" bolitas negras tengo que tener "4 n" bolitas rojas, para que al duplicar las negras tenga una probabilidad de 1/3 de sacar una negra. Por ejemplo, podría tener originalmente 12 rojas y 3 negras. Saco una roja y la devuelvo al bolillero y duplico la cantidad de negras, con lo cual hay 12 rojas y 6 negras. La probabilidad de sacar una negra es:

P(negra) = 6 / (12 + 6) = 6 / 18 = 1/3

Tercera interpretación: de un bolillero que tiene bolitas negras y rojas se extrae una bolita roja **que no se devuelve al bolillero.** Posteriormente se **duplica la cantidad de bolitas negras** y se extrae **otra bolita** que resulta ser negra. ¿Qué cantidad de bolitas de uno y otro color debo tener para que sea 1/3 la probabilidad de haber obtenido estos resultados (es decir, que sea 1/3 la probabilidad de extraer una bolita roja primero y una negra después)?

Solución: En un comienzo tenemos "**n**" bolitas rojas y "**m**" negras. La probabilidad de extraer la bolita roja es entonces:

P(roja) = n/(n + m)

Después de extraer la bolita roja me quedan en el bolillero **n-1** bolitas rojas y al duplicar las negras tendré **2×m** bolitas negras, con lo cual la probabilidad de extraer una negra será:

P(negra) = 2×m/(n – 1 + 2×m)

$$P(\text{negra}) = \frac{2*m}{n-1+2*m}$$

La probabilidad de que ocurran estas dos cosas **es el producto de las dos probabilidades**:

P(primero roja y luego negra) = (n/(n+m)) ×((2×m)/(n-1+2×m))

$$P(\text{primero roja y después negra}) = \frac{n*(2*m)}{(n+m)*(n-1+2*m)}$$

Y esta probabilidad debe ser igual a 1/3, o sea que tendremos:

$$\frac{n*(2*m)}{(n+m)*(n-1+2*m)} = \frac{1}{3}$$

Operando llegamos a:

$$6*n*m = (n+m)*(n-1*2*m)$$

Tanto n como n deben ser números naturales, y este tipo de problemas se llaman "diofánticos" y, en general, son muy difíciles de resolver. Pero probando se encuentra que existen dos soluciones. Una es que **n** sea igual a 1 y **m** igual a 2 (al principio una roja y dos negras en el bolillero):

$$\frac{n*(2*m)}{(n+m)*(n-1+2*m)} = \frac{1*(2*2)}{(1+2)*(1-1+2*2)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

cuya solución es justamente 1/3.

Otra solución es que **n** sea igual a 6 y **m** igual a 2 (al principio seis rojas y dos negras en el bolillero):

$$\frac{n*(2*m)}{(n+m)*(n-1+2*m)} = \frac{6*(2*2)}{(6+2)*(6-1+2*2)} = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

Y nuevamente la solución es 1/3. No existe ninguna otra solución por lo menos para **n** y **m** menores que 500.

Si lo miramos paso a paso en este segundo ejemplo tendremos que la probabilidad de sacar la bolita roja es:

P(roja) = n / (n+m) = 6 / (6+2) = 6 / 8 = 3 /4

La probabilidad de sacar la bolita negra (después de sacar la roja y duplicar las negras) es:

P(negra) = 2*m / (n - 1 + 2*m) = 2*2/(6-1+2*2) = 4/9

y el producto de las probabilidades es:

P(roja)*P(negra) = (3/4)*(4/9) = (3*4)/(4*9) = 1/3

Cuarta interpretación: Sean las mismas condiciones que la tercera interpretación, pero con la bolita roja devolviéndola al bolillero. Las variaciones son sencillas y lo dejamos como ejercicio.

¡Y eso es todo!