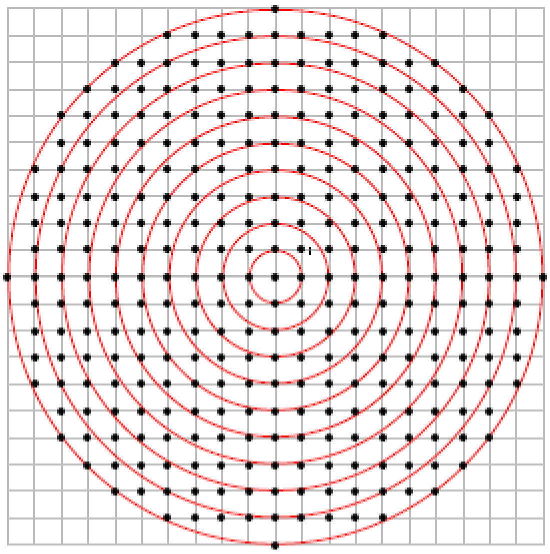
PUNTOS SOBRE UNA CIRCUNFERENCIA - PUNTOS DENTRO DE UN CÍRCULO

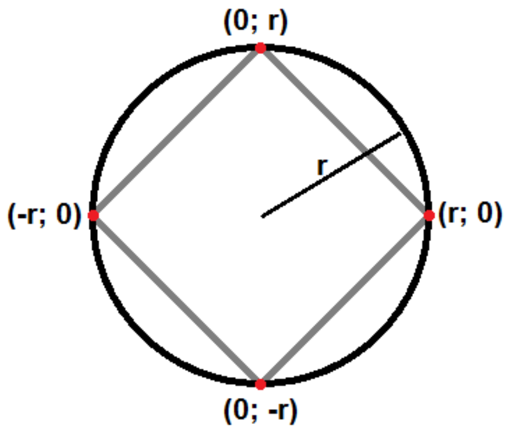
Solución: Oscar Bressan



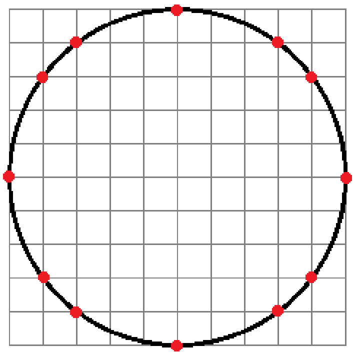
PUNTOS SOBRE UNA CIRCUNFERENCIA

¿Qué cantidad de puntos cuyas coordenadas son números enteros hay sobre una circunferencia cuyo radio es un número entero?

Si el radio es "r", entonces los cuatro puntos (r; 0), (-r; 0), (0; r) y (0; -r) están sobre la circunferencia. Estos cuatro puntos son los vértices de un cuadrado:



Pero hay más puntos de la retícula sobre la circunferencia cuyas coordenadas son números enteros. Son los que forman una terna pitagórica. Cada terna pitagórica agrega a los anteriores 8 puntos sobre la circunferencia. Por ejemplo, para r = 5 tenemos la terna pitagórica $3^2 + 4^2 = 5^2$ o (3;4;5):



En consecuencia debemos agregar a los puntos (5; 0), (-5; 0), (0; 5) y (0; -5) los siguientes:

(3;4), (4;3), (-3;4), (-4;3), (3;-4), (4,-3), (-3,-4) y (-4, -3)

de modo que en total hay 4 + 8 = 12 puntos sobre la circunferencia para r = 5.

Lo mismo pasa para r = 10, 13, 15, 17, 20, 26, 29, 30, 34, 35, 37, 39, 40, 41, 45, 51, 52, 53, 55, 58, 60, 61, 68, 70, 73, 74, 78, 80, 82, 87, 89, 90, 91, 95, y 97 (sólo se exploró hasta r = 100, hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos son números enteros). Cada uno tiene una terna pitagórica asociada y todos ellos tienen 12 puntos sobre la circunferencia.

Sin embargo, hay radios que permiten dos ternas pitagóricas. Por ejemplo, para r menor que 100 ellos son:

para r=25: [(7;24;25) y (15;20,25)],

para r=50: [(14;48;50) y (30;40;50)],

para r=75: [(21;72;75) y (45;60;75)] y

para r=100: [(28;96,100) y (60;80;100)].

Cada uno tiene ahora 4+8+8=20 puntos sobre la circunferencia.

Lo que sorprende es que hay dos radios menores que 100 que tienen cuatro ternas pitagóricas:

para r = 65: [(16;63;65),(25;60;65),(33;56;65) y (39;52;65)], y

para r = 85: [(13;84;85),(36;77;85),(40;75;85) y (51;68;85)]

y ahora cada uno tiene 4+8+8+8+8=36 puntos sobre la circunferencia. Se reitera que sólo se ha explorado hasta r = 100.

¡¡A sumar entonces todos los puntos sobre todas las circunferencias con radio menor o igual que 100!!

Extensión:

PUNTOS DENTRO DE UN CÍRCULO

¿Qué cantidad de puntos hay en un círculo cuyas coordenadas son números enteros?

Este problema se Denomina Problema del círculo de Gauss el cual propone determinar cuántos puntos reticulares hay en un círculo centrado en el origen y con radio *r*. Consultar https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_del_círculo_de_Gauss

En función del radio tenemos que los primeros cálculos se hicieron por conteo y luego se aplicó la fórmula dada por la sucesión sucesión A000328 en OEIS citada en la página de Wikipedia citada arriba:

r	suma	r	suma	r	suma	r	suma	r	suma	r	suma	r	suma	r	suma	r	suma	r	suma
1	5	11	377	21	1373	31	3001	41	5261	51	8173	61	11681	71	15813	81	20593	91	25997
2	13	12	441	22	1517	32	3209	42	5525	52	8497	62	12061	72	16241	82	21101	92	26565
3	29	13	529	23	1653	33	3409	43	5789	53	8809	63	12453	73	16729	83	21629	93	27145
4	49	14	613	24	1793	34	3625	44	6077	54	9145	64	12853	74	17193	84	22133	94	27729
5	81	15	709	25	1961	35	3853	45	6361	55	9477	65	13273	75	17665	85	22701	95	28345
6	113	16	797	26	2121	36	4053	46	6625	56	9845	66	13673	76	18125	86	23217	96	28917
7	149	17	901	27	2289	37	4293	47	6921	57	10189	67	14073	77	18605	87	23769	97	29525
8	197	18	1009	28	2453	38	4513	48	7213	58	10557	68	14505	78	19109	88	24313	98	30149
9	253	19	1129	29	2629	39	4777	49	7525	59	10913	69	14949	79	19577	89	24845	99	30757
10	317	20	1257	30	2821	40	5025	50	7845	60	11289	70	15373	80	20081	90	25445	100	31417

Es sencillo verificar que la cantidad de puntos dividido la superficie del círculo tiende a 1 cuando r tiende a infinito.

Esta convergencia fue estudiada por Gauss, Hardy, Landau y Haxley. Ver en la misma página.