REPRESENTACIONES Y MODELOS EN LA MATEMÁTICA REALISTA

Ana Bressan

Hoy se habla de representaciones internas (mentales) y externas (observables).

Las representaciones externas en matemática están constituidas principalmente por:

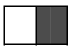
- enunciados verbales (orales o escritos),
- organizaciones visuales gráficas o pictóricas (representan imágenes mentales o conceptos o estructuras conceptuales mediante diagramas o ilustraciones)
- organizaciones visuales simbólicas (representan estructuras matemáticas mediante sistemas de símbolos y reglas específicas comúnmente aceptados, que comprenden conceptos, operaciones y relaciones), y
- las representaciones llamadas concretas (físicas, tridimensionales,…)

Las representaciones sirven a las personas tanto como estímulos para los sentidos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales, como para la comunicación a otros, y la objetivación o validación hacia sí mismo de comprensiones (imágenes mentales y concepciones).

Los objetos matemáticos se han de distinguir de sus representaciones. No es lo mismo la idea de unicidad que su representación por medio un grafo, sea X, 1, *uno* ó 2/2. Es decir, es necesario no confundir los objetos matemáticos (número, funciones, recta, etc.) con sus representaciones (las escrituras decimal o fraccionaria de un número, las gráficas de funciones o un trazo lineal para una recta).

Sin embargo, existe un lazo potentísimo entre un objeto matemático y sus representaciones externas. En matemática, las representaciones no sólo son indispensables para los fines de comunicación (hacia uno mismo y hacia los otros), sino que también son necesarias para la propia actividad matemática, ya que la posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos se realiza a través de las transformaciones ejercidas sobre sus representaciones.

En Castro y Castro (1997), se menciona el tema de la pluralidad de sistemas de representación para un mismo concepto dando el siguiente ejemplo para la idea de *un medio,* la cual puede representarse bajo diferentes formas:

 ½ *mitad* 50% 0---------x----------1 X X X X

Cada uno de estos sistemas de representación destaca alguna propiedad importante del concepto presentado y dificulta la comprensión de otras propiedades:

- dos partes iguales.
- idea de cociente asociada a la fracción.
- la igualdad de las partes en que se ha dividido el todo.
- que se toma el valor 100 como unidad.
- que la mitad está marcada por un punto equidistante de 0 y 1 en la línea numérica (distancias o longitudes)
- que se toman dos de cuatro unidades (razón).

Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Este conocimiento proporciona el dominio formal de cada estructura conceptual.

Rico (1999) expresa que para mostrar comprensión de un concepto se debe poder expresarlo en por lo menos, dos formas distintas de representación (esto se aproxima a lo expresado por Douady (1995) acerca de que un problema es bueno si se puede formular en dos marcos[1] diferentes teniendo cada uno su sintaxis, su lenguaje y cuyos significados constituyentes forman parte, parcialmente, del campo de conocimiento del estudiante.

Por ejemplo:

a) El concepto de función puede representarse a través de una expresión algebraica (analítica) de la forma $y= 2x + 1$ o de una tabla numérica o con un gráfico en coordenadas o con una expresión coloquial.

b) El concepto de cuadrado puede representarse a través de una definición o descripción oral o escrita o una descripción simbólica mediante la fórmula L^2 o mediante el uso de la geometría analítica utilizando rectas en coordenadas o por una construcción con regla y compás, o bien puede representarse con varillas o cortes en cartulinas, etc.

¿Cuál es la mejor representación? No podemos abogar por una en particular, según para qué, para quién y cuándo, tendrá valor una u otra.

Las distintas formas de representación matemática suelen usarse para describir fenómenos, no solo de la matemática misma, sino también del mundo real o de otras ciencias, de allí que se dice, en este caso, que la matemática posee poder modelizador de situaciones o ideas incluso no provenientes de la matemática.

Pero, tengamos en cuenta además, que a muchos fenómenos u objetos de la vida natural artificial, social, etc., los podemos usar como ejemplos de ideas matemáticas, por eso también se los llama modelos. Por ejemplo, la distribución de las semillas de la manzana es un ejemplo de distribución pentagonal; una caja puede ser un ejemplo o modelo de un prisma rectangular; un chorro de agua salido de una manguera, de una parábola; el cable que conduce energía eléctrica, de una catenaria, etc.

Castro y Castro (1997) separan representación de modelo. Al interior de la matemática dicen que se usan distintas representaciones (gráficas y simbólicas) y, cuando se usa la matemática para explicar algo no matemático, se habla de *modelos matemáticos* (a este proceso se lo denomina *modelización*).

En la EMR los modelos son representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionarla [2]*. El uso*

[1] Un cuadro se refiere al conjunto de objetos de una de las ramas de las matemáticas, relaciones entre esos objetos y las formulaciones diversas de esos objetos y relaciones en ese marco. Por ejemplo, en el cuadro algebraico se trabajan polinomios como funciones y formas de factorización, anulación de un polinomio y ecuaciones, mientras que en el cuadro gráfico se aborda la representación gráfica de funciones polinómicas y se trata de visualizar algunas de sus propiedades (Ver R. Douady: *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento* en Artigue M. (1995): Ingeniería Didáctica en Educación Matemática de Artigue M., Douady R., Moreno L. y Gómez P. Capítulo 5. Una empresa docente. Grupo Editorial Iberoamérica. Colombia)

[2] Lo que a Freudenthal (1991) le interesa, desde el punto de vista didáctico, no son los modelos como sistemas axiomáticos o estructuras cognitivas sino como el resultado de la modelización en tanto actividad de idealización que ocupa un lugar central en los procesos de matematización. *El modelo es simplemente un intermediario, a menudo*

de modelos en la EMR dista del concepto generalizado de modelización matemática, como traducción de situaciones problemáticas a expresiones matemáticas que pueden funcionar como modelos. En esta corriente el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una profunda implicación constitutiva entre modelo y situación. (Gravemeijer, 2002). En la EMR se respetan los modelos que surgen de los propios alumnos y se acercan otros inspirados en las estrategias informales ya sea utilizadas por los estudiantes o que aparecen en la historia de la matemática -estudiados a partir de la fenomenología didáctica.[3](Bressan y otros, 2005)

Esto significa que el término "modelo" no está tomado en sentido literal (como ejemplo de algo) o solamente involucrando objetos y simbolismo matemático puro, sino que materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas, y aun símbolos pueden servir de modelos.

Entre los modelos trabajados en la RME se destacan:

- las *situaciones paradigmáticas*: como la del autobús (van den Brink, 1984, 1991) para operar con la suma y la resta y sus propiedades, o la de la fábrica de caramelos o el tesoro del sultán (Gravemeijer, 1991) para introducir el sistema decimal o la redistribución de mesas en la casa de los panqueques (Streefland, 1991a) para trabajar fracciones como razones y relación parte todo;
- los *materiales físicos* como el *rekenrek* (contador 10 -10) o el collar de bolitas bicolor estructurado de cinco en cinco o de diez en diez (Treffers, 1991) o la moneda corriente para expresar números bajo distintas formas (dobles, dobles más uno, en base a grupos de 5 o 10, etc) y operar; los tableros para la combinatoria.
- los *esquemas notacionales* tales como el lenguaje de flechas (van den Brink, 1984, 1991) en lugar de utilizar el signo igual en operaciones combinadas, la notación de libreta o la tabla de combinaciones para plantear y resolver sistemas de ecuaciones, el modelo abierto de área para la multiplicación, la línea numérica abierta simple para apoyar las estrategias secuenciales de cálculo mental y la recta doble (Treffers, 1991), el modelo circular; la tabla de razones y la barra de porcentajes (Middleton y otros, 1995, 1999) para el trabajo de la proporcionalidad.

En la EMR los modelos deben tener por lo menos ***dos características*** *importantes:* ***estar enraizados en contextos realistas,*** *imaginables, y a la vez* ***tener suficiente flexibilidad para ser aplicados en un nivel más avanzado o más general.*** *Esto implica que el modelo debería apoyar la progresión en la matematización vertical sin bloquear la posibilidad de volver a reconstruir su pensamiento recurriendo a niveles inferiores desde el cual una estrategia se origina, es decir, los estudiantes siempre deberían poder volver a niveles más bajos reencontrando los orígenes de los modelos más abstractos. Eso es lo que torna a los modelos muy poderosos, según este enfoque didáctico.*

Otro requerimiento es que sean ***viables*** *-en concordancia con la mirada de la EMR de los estudiantes como participantes activos del proceso de enseñanza aprendizaje - los alumnos deben*

---

indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada a fines de volverla susceptible de un tratamiento matemático formal (p. 34)

[3] La fenomenología didáctica (Freudenthal 1983) se encarga de buscar e investigar situaciones (fenómenos) que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que se supone que los alumnos deben construir. Para Freudenthal algo es considerado como un fenómeno cuando tenemos experiencia de ello, e incluye como fenómenos los mismos medios de organización de matemática (estrategias, conceptos, notaciones) cuando se los torna objetos de experiencia. (Ver Puig, 1997:63-64)."*El objetivo de una investigación fenomenológica es, por lo tanto, encontrar situaciones problemáticas a partir de las cuales se pueden generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Para encontrar fenómenos que puedan ser matematizados, podemos buscar entender cómo fueron inventados*".(Gravemeijer y Terwuel, 2000)

poder re-inventar esos modelos por sí mismos. Para realizar esto, los modelos deberían comportarse en una manera natural, autoevidente. Ellos deberían ajustarse con las estrategias informales de los alumnos - como si ellos los pudieran haber inventado- y deberían ser fácilmente adaptados a otras situaciones. (Ver Treffers y Goofre, 1985; Treffers, 1987; Gravemeijer, 1994).

En la EMR hay **un uso representacional** del modelo, **un uso como modelo de trabajo** (se acciona sobre él) y **un uso como modelo de reflexión** (a partir del cual se visualizan y derivan propiedades, por ej., de las operaciones).

Según Gravemeijer, un salto en los modelos y su uso puede ser conectado a un proceso de crecimiento matemático en más de una forma (Bressan, 2005). La distinción entre *modelo de* y *modelo para,* lo **condujo a separar los niveles de resolución y comprensión matemática en cuatro: situacional, referencial, de generalización y formal.** Además enfatizó la conexión entre el uso de modelos y el principio de re-invención. A causa del salto en el modelo (lo que causa que el nivel formal de matemática se ligue al nivel de estrategias informales), el proceso *arriba hacia abajo (up-down)* que caracteriza el uso de modelos en los enfoques estructuralistas y cognitivos de la educación matemática, podrían ser convertido en un proceso de *abajo hacia arriba (bottom-up).*

¿Cómo encontrar modelos adecuados y actividades provocadoras (generadoras) de modelos?

El proceso *abajo-arriba* implica que los modelos son inventados o re- inventados por los estudiantes mismos, quienes deberían ser provistos de un entorno de aprendizaje, donde los problemas, las actividades y los contextos -emplazados en escenarios o trayectorias-, junto con la estimulación y acentuación del rol del docente, deben estar ordenados en función de que esto suceda. La emergencia de modelos debe ocurrir de una manera natural.

Los desarrollistas curriculares tienen que buscar situaciones problema que sean adecuadas a la construcción de modelos y ajustarlas en un escenario o trayectoria que provoque la evolución futura del modelo y que abra un sendero a niveles más altos de comprensión de los estudiantes. Debería ser claro que esto pone ciertas demandas en tales situaciones problema. Un requerimiento clave es que la situación pueda ser **fácilmente esquematizada.** Otra demanda es que, desde el punto de vista de los estudiantes debería ser **una necesidad la creación de un modelo**. Este aspecto requiere que el problema tiene que incluir actividades provocadoras de modelos, como por ejemplo, planificar y ejecutar pasos en la solución, generar explicaciones, identificar similitudes y diferencias y hacer predicciones. A pesar que estos criterios dan una buena indicación de qué es necesario para que emerja un modelo, lo más importante es que la situación problemática y las actividades lleven a los estudiantes a identificar conceptos y estructuras matemáticas.

Para descubrir estos problemas y actividades está el análisis fenomenológico didáctico. **Este análisis se centra en cómo el conocimiento matemático y los conceptos pueden manifestarse por ellos mismos a los estudiantes y cómo pueden ser constituidos.** Parte de este análisis está hecho por medio de experimentos y deliberación entre colegas (incluyendo discusiones con docentes) en las cuales tanto el conocimiento de los estudiantes, como las ideas sobre los conceptos matemáticos deseados, funcionan como una **pre-imagen guía** para el docente. La parte más importante del análisis, sin embargo, se hace mientras se trabaja con los estudiantes y se analiza su trabajo. De esta manera puede ser encontrado qué es importante para constituir el modelo y por lo tanto, qué tiene que ser puesto en la situación problemática, de manera que puedan provocarse soluciones específicas, las cuales puedan ser esquematizadas y tengan una perspectiva vertical. (Panhuizen; 2003)

REFERENCIAS

CASTRO E. Y CASTRO E.: Representaciones y modelización. Cap IV del libro *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Hirsori Ed. (L. Rico. Comp.) 1997. págs. 95 a 124

DUVAL R.: Semiosis et Pensée Humaine. Ed. Peter Lang. 1995. Traducción USAM.

PANHUIZEN H.: *El uso didáctico de modelos en la RME. Un ejemplo sobre una trayectoria longitudinal sobre porcentaje*. Educational Studies in Mathematics 54: 9-35, 2003. Kluwer Ac. Publ.

ROMERO I. Y RICO L.: *Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria***.** Rev. EMA. Investigación e innovación en educación matemática. Vol. 4 nº 2. 1999. pp 117-151. Colombia

BRESSAN A., ZOLKOWER B. Y GALLEGO F.: Los principios de la Educación Matemática Realista. *En Perspectivas teóricas en Educación Matemática*. Libros del zorzal. Malkok SRL. Julio 2005.

ZOLKOWER, B., BRESSAN, A. Y GALLEGO, F.: *La corriente realista de didáctica de la matemática: experiencias de aula de profesores y capacitadores*. Rev. Yupana. Rev de Educación Matemática. (ISSN 1668 7035) de la Universidad Nacional del Litoral. (2006) (Nº 3-06, pp 11-33)

FREUDENTHAL, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel Publis. Co.

FREUDENTHAL, H. (1991). Revisiting mathematics education: China Lectures, Dordrecht: Kluwer

GOFFREE, F. (2000). Principios y paradigmas de una “educación matemática realista”. En *Matemática y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Gorgorió N, J. DEULOFEU AND A. BISHOP (Coords) pág 151-168. ICE, Universidad de Barcelona, Ed. GRAÓ. España

GRAVEMEIJER, K. y TEWUEL J. (2000): Hans Freudenthal, a mathematician on didactics and curriculum theory. *Curriculum Studies*. Vol 32, 6: 777-796.

GRAVEMEIJER, K.et al. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En Cobb, P., E. Yackel, and K. Mc Clain (Eds.) *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Lawrence Erlbaum.

PUIG, L. (1997): “Análisis Fenomenológico”. Cap III del libro: La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Rico L. (eds). ICE. Ed. Síntesis.

TREFFERS, A. (1987): Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project, Dordrecht: Kluwer.

EN RELACIÓN CON EL TEMA ANTERIOR:

¿QUÉ ENTENDEMOS POR MATERIAL CONCRETO?

En este documento cuando hablamos de material concreto o manipulativos, nos referiremos a modelos de ideas matemáticas representadas en forma tridimensional (física), donde entran en juego la percepción visual, táctil y kinestésica, y distinguiremos en ellos los materiales previamente estructurados de los no estructurados.[4]

En la construcción de los primeros, se omiten distractores y se pone un cuidado especial en las variables intervinientes, dándose reglas o leyes de uso determinadas, en tanto se pretende que estos materiales sean una imagen isomorfa de un concepto matemático, buscando poner de manifiesto las propiedades y relaciones que hacen a su estructura. Ejemplos de ellos son: los materiales Montessori (banco de perlas, barras, ábacos, cadenas, etc) y las regletas y cubos de Cuisenaire (para conceptos numéricos, fracciones y razones), los bloques multibase Dienes (para numeración, sistema posicional y algoritmos); los personajes y los bloques lógicos o de atributos creados también por Dienes (para clasificaciones y operaciones lógicas), los geoplanos, collares a 100 y ábacos, los polígonos troquelados o de plástico para construir poliedros, etc. Se piensa que estos materiales conducen *naturalmente* al estudiante al concepto o estructura matemática a enseñar.

Vale la pena destacar que la EMR desconfía de los modelos artificiales. Sus investigadores expresan que, en general, el trabajo con modelos preformados que se identifican con conceptos y relaciones matemáticas y buscan mostrarlas, no son isomorfos con las acciones mentales que provocan en los alumnos. Por ej., los contadores no inducen a usar el sistema que es el objetivo con que están pensados, sino a contar uno a uno; ni el material Dienes de base diez y sus leyes de intercambio, aseguran que los estudiantes puedan establecer una correspondencia clara entre el accionar sobre ellas y los algoritmos escritos (especialmente en el caso de la división).

También se suelen usar otros materiales concretos del entorno, no creados con una finalidad matemática específica, pero sobre los que se puedeN hacer variadas "manipulaciones" (visuales, táctiles o de movimiento) descubriendo aspectos de los conceptos que se quieren modelizar. Por ejemplo, se puede dar una caja y hacer estudiar sus planos de simetría y determinar desde allí las propiedades de un paralelepípedo. Se pueden dar tiras de papel y que las plieguen para representar fracciones o se las pueden superponer para representar cuadriláteros, se pueden dar fichas y que las agrupen de 10, o bolitas de distintos colores dentro de un frasco o ruletas para trabajar probabilidades. Se pueden hacer modelos de cuerpos con varillas de mecano. Estos materiales no están previamente estructurados, sino que es el docente (o el estudiante) quien propone una actividad estructurante sobre ellos y los tornan modelos.

---

[4] Godino (2003) habla de dos tipos de materiales manipulativos: los tangibles, donde prima lo táctil, y los *gráfico-textuales-verbales*" –en los que participan la percepción visual y/o auditiva como son las gráficas, símbolos, tablas, etc. *Es importante resaltar que este segundo tipo de objetos: textos y símbolos matemáticos, programas de ordenador- también pueden manipularse, pues podemos actuar sobre ellos. Sirven como medio de expresión de las técnicas y conceptos matemáticos y al mismo tiempo son instrumentos del trabajo matemático. El carácter dinámico y "manipulable" de los sistemas de signos matemáticos está siendo potenciado recientemente por el uso de las nuevas tecnologías en las distintas ramas de las matemáticas (Geometría, Cabri; Análisis de datos, Statgraphics; Cálculo, Derive; etc.).*(Pág. 132)

Somos nosotros los que determinamos "ver" (modelizar) conceptos y estructuras matemáticas con ellos o a partir de acciones sobre ellos, de transformaciones más o menos isomorfas con ideas y acciones mentales vinculadas con la matemática.

Sin embargo, como expresan Godino, Batanero y Font (2003):

> *Como toda metáfora, el uso del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas resalta unos aspectos de los conceptos que tratamos de enseñar y ocultan otros, por lo que debemos prestar una atención cuidadosa en su uso.*
> *Cuando trabajamos con materiales (por ejemplo, con "polígonos" o "poliedros" de plástico), en cierta forma "manipulamos" y vemos los sistemas de signos matemáticos, pero no los conceptos matemáticos, que son intangibles e invisibles. Es una idea errónea pensar que los conceptos matemáticos, incluso los figurales, están plasmados, reflejados o cristalizados en el material tangible. Los objetos que investiga y manipula el razonamiento geométrico son entidades mentales que Fischbein[5] denomina conceptos figurales, los cuales "reflejan propiedades espaciales (forma, posición y magnitud), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección*" (2003 pág. 134).

Y en razón de ello no podemos desconocer que un uso inadecuado del material podría dar lugar a confusiones que se pueden constituir en obstáculos para el conocimiento matemático de nuestros alumnos. Los autores citados mencionan la necesidad de tomar en cuenta que:
• *Las acciones matemáticas son virtuales, imaginadas, no reales. Son acciones sobre objetos mentales, "materializados" mediante sistemas de signos específicos.*
• *El lenguaje y la práctica escolar pueden llevar a confundir entre las propiedades concretas del material manipulativo y los objetos matemáticos que modelizan dichas propiedades. Ello puede impregnar a los objetos matemáticos de unas connotaciones tangibles y visuales de las que progresivamente los alumnos deben desprenderse en los niveles superiores de enseñanza.*
• *Si no se es cuidadoso en separar el material manipulativo del objeto abstracto, el paso de la acción física directa sobre material tangible a la acción imaginada, apoyada en sistemas de signos, puede estar no exento de conflictos.* (2003. Pág. 136)

Tomemos en cuenta, entonces, que lo central es la situación problema que planteamos, mientras que el material es solo un medio para comprender mejor lo matemático que ella encierra y derivar conclusiones, propiedades o relaciones al respecto.

REFERENCIAS

GODINO J., BATANERO C. y FONT V.: *Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Manual para el Estudiante.* Edición Febrero 2003. Distribución en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros
RESNICK L. Y FORD W. (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós.

[5] Citado en el texto: Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24: 139-162.