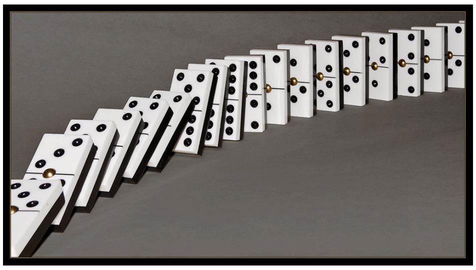
EL EFECTO DOMINÓ
Autora: Adriana Rabino

Se llama *efecto dominó* a aquél que habiéndose producido sobre un primer elemento de una colección dada se traduce al siguiente al tomar contacto con el primero y luego al tercero al tomar contacto con el segundo, y así siguiendo con todos los elementos de la misma.
El efecto dominó puede tener distintas connotaciones. Por ejemplo, como **espectáculo**, es un juego de destreza o entretenimiento que consiste en colocar sistemáticamente una serie de fichas de dominó en hilera, formando figuras y mecanismos artificiosos, y al dar un leve empujón a la ficha inicial provocar un efecto en cadena, logrando que todas las fichas terminen cayendo. Para lograr este efecto se colocan las fichas a tal distancia una de otra que al caer la primera golpea a la segunda y esta a la tercera, y así sucesivamente.



En algunos países, como los EE. UU., Japón o los Países Bajos, se organizan exhibiciones y campeonatos, donde el objetivo, aparte del recreativo, es superar lo anteriormente hecho en el número de fichas a hacer caer y en su impacto visual. Estos eventos, que suelen ser transmitidos por televisión, son organizados por empresas especializadas en la manufactura de fichas y en la creación y montaje del proyecto. (Ver Efecto dominó (juego) en Wikipedia)

En **política internacional** se usa este término, también llamado *secuencia efecto bola de nieve* según el cual, si un país entra en un determinado sistema político, arrastraría a otros de su área hacia esa misma ideología.(Ver Teorías del Efecto dominó en Wikipedia)

Algunos utilizan esta expresión cuando existe un **accidente `primario'** que afecta a una instalación `primaria' (este accidente puede no ser un accidente grave), pero que induce uno o varios accidentes `secundarios' que afectan a una o varias instalaciones `secundarias'. Este accidente o accidentes secundarios deben ser accidentes más graves y deben extender los daños del accidente `primario'.

Lo cierto es que el *efecto dominó* produce un efecto en cadena. Basta con asegurarse de

1) **iniciar ese efecto en un primer elemento y**
2) **que el efecto no se corte.**

¿Por qué piensas que se cayeron las motos? ¿Qué pudo haber pasado con la última moto?

Jugar, probar, comprobar con fichas de dominó, libros u otros objetos poniéndolos en hilera a una distancia conveniente de tal manera que si cualquiera se voltea, haga caer a la siguiente. No necesariamente tienen que ser todos los elementos iguales, se pueden hacer combinaciones. ¿Qué se debe respetar?

Una vez comprendido el concepto, vamos a ver cómo se utiliza este valiosísimo instrumento en matemática. **En ella se conoce como Principio de Inducción Completa** y **hay que aclarar que es sólo aplicable para hacer demostraciones dentro del conjunto de números naturales, ya que debe tratarse de un conjunto discreto, y que además, debe tener un primer elemento (que no necesariamente debe ser el 1).**

Entonces, utilizando los dos principios básicos del efecto dominó, si queremos demostrar una propiedad dentro del conjunto de números naturales, basta con que nos aseguremos que el primer elemento cumple la propiedad y luego que, tomando cualquier elemento n que la cumpla, también la cumpla el número n + 1 que le sigue.
<u>Nota</u>: dentro de los números naturales, si se quiere indicar el *siguiente de n*, se lo expresa como *n+1*.

Veamos unos ejemplos:

- **Demostrar que la suma de los primeros n números naturales es n(n+1)/2 , o sea que 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ….+n= n.(n+1)/2. Por ejemplo si n =7, entonces 1+2+3+4+5+6+7 = 7×8/2 = 28**

Recordemos las dos condiciones para asegurarnos que <u>esta propiedad se cumpla para todos lo números naturales</u>: 1) que se cumpla para el primer elemento (**iniciar el efecto**) y 2) si se cumple para cualquiera asegurarse que se cumple para el que le sigue (**que el efecto no se corte**).

1) Veamos si se cumple para el primer elemento. Para ello se reemplaza n por 1, o sea hay que verificar que 1 = 1(1+1)/2, lo cual es cierto.
2) Para ver si se cumple para cualquier elemento, tomemos uno al azar. Esto quiere decir que n puede ser cualquier número.

Generalizando, digamos que es k, y consideremos esta proposición como verdadera (se denomina hipótesis inductiva) o sea que

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = k(k+1)/2 .$$

Para que el efecto no se corte tenemos que asegurarnos que la proposición se cumpla para el siguiente, o sea que: $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = (k+1)(k+2)/2$ (**es importante tener clara esta expresión, es decir, saber a dónde queremos llegar en la demostración)**

Partiendo de la hipótesis inductiva

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = k(k+1)/2$$

Se suma a ambos miembros de la igualdad el término k+1

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = k.(k+1)/2 + (k+1)$$

Sacando común denominador en el segundo miembro y luego extrayendo factor común (k+1) en el numerador se llega a que

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = (k+1).(k+2)/2$$

Que es lo que se quería demostrar, por lo tanto la propiedad se cumple para todos los números naturales porque, si pensamos en el efecto dominó:

1) se cumplió para el primer elemento ("**se volteó la primera pieza de dominó"**)
2) si se cumple para un elemento elegido al azar y se cumple para el siguiente, se cumple para todos (**"si al voltearse cualquier ficha de dominó, nos aseguramos que ésta voltee a la que sigue, seguro que se voltean todas"**)

- **Demostrar que 4.(9n) + 3.(2n) es divisible por 7 para todo n>0**

1) Para saber si se cumple para el primer elemento 1, reemplazamos n por 1 y comprobamos si ese resultado , para es divisible por 7 :

$$4.(9.1) + 3.(2.1) = 42 = 7.6$$

Efectivamente es divisible por 7.

2) Para ver si se cumple para cualquier elemento, tomemos uno al azar k y aceptemos que la proposición se cumple, o sea que 4(9k) + 32k) es divisible por 7 (hipótesis inductiva).
3) Para que el efecto no se corte tenemos que asegurarnos que el siguiente sea múltiplo de 7. Eso quiere decir que, en vez de reemplazar n por k, tenemos que reemplazar n por k+1: 4.9(k+1)] +3[2(k+1)] y ver si esta expresión es divisible por 7.

Aquí es donde empieza la parte creativa. Una estrategia es tratar de alguna manera, desarrollando esta expresión o haciendo algunas operaciones convenientes en ella, que aparezca la hipótesis inductiva (4(9k) + 3(2k) es divisible por 7), y ya se verá como se utiliza:

$4[9(k+1)] + 3[2(k+1)] = 4(9k + 9) + 3(2k + 2) = 4.9k + 36 + 3.2k + 6 =$
$= 4.9k + 3.2k + 42$
Dado que los dos primeros términos son divisibles por 7 por la hipótesis inductiva, 42 es divisible por 7 (7.6) y la suma de dos múltiplos de 7 es múltiplo de 7, queda demostrada que esta propiedad se cumple para todos los números naturales.

<u>¡Ahora te toca a vos!</u>

1) Demostrar que la suma de los primeros n números impares naturales es n^2:

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2}$$

2) Demostrar que la suma de los primeros n números naturales al cuadrado es n.(n+1).(2n+1)/6:

$$\mathbf{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6}$$

3) El número de diagonales de un polígono es n(n-3)/2, donde n es el número de lados. Si se incrementa un lado de un polígono cualquiera, en cuánto se incrementará el número de diagonales?

4) Demostrar para todo n se verifica que

$$n^3 + 11n = 6n^2 + 6$$

5)¿Qué condición no verifica la siguiente fórmula?

$$n = n+5$$

Soluciones:
Este método de demostración se denomina por **Inducción completa o por recurrencia.** Tener en cuenta que

- No necesariamente el primer elemento de la sucesión de números naturales debe ser el 1, pero se debe aclarar cuál es.
- El conjunto de los números naturales se denomina **inductivo.**
- Se dice que un conjunto es inductivo K cuando cumple las siguientes propiedades:

a) 1 pertenece a K
b) Si r pertenece a K entonces r+1 pertenece a K

P1: $1 = 1^2$ (se cumple para el primer elemento)
Suponemos que se cumple para un elemento k cualquiera, esto significa que:
$1 + 2 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ (hipótesis inductiva)
Tenemos que llegar a que:
$1 + 2 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = \mathbf{(k + 1)^2}$
Si agregamos el siguiente número impar a ambos miembros de la igualdad en la hipótesis inductiva:
$1 + 2 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$ (obtenemos un trinomio cuadrado perfecto) $\mathbf{(k + 1)^2} =$
Por lo tanto queda demostrada la propiedad para todos los números naturales.

P2: $1^2 = 1.(1+1).(2+1)/6 = 1$ (se cumple para el primer elemento)
Suponemos que se cumple para un elemento k cualquiera, esto significa que:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + k^2 = k.(k+1).(2k+1)/6$ (hipótesis inductiva)
Tenemos que llegar a que:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + k^2 + (k+1)^2 = (k+1)(k+2).[2(k+1)+1]/6$ o
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + k^2 + (k+1)^2 = \mathbf{(2k^3 + 9k^2 + 13k + 6)/6}$

Agregando el siguiente natural al cuadrado a ambos miembros de la hipótesis inductiva se tiene:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + k^2\ (k+1)^2 = k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2 =$
$= [k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2]\ /6$ (sacando común denominador) $=$
$\mathbf{(2k^3 + 9k^2 + 13k + 6)/6}$ (aplicando propiedad distributiva y desarrollando el binomio al cuadrado).
De esta manera se llega al resultado que se quería obtener, con lo cual queda demostrada la propiedad para todos los números naturales.

P3: Se puede conjeturar la respuesta haciendo una tabla en donde figuren los polígonos según sus lados y el número de diagonales que posee cada uno.
Si el número de diagonales de un polígono cualquiera es $n(n-3)/2$, el número de diagonales del polígono que tenga un lado más será $(n+1)[(n+1) - 3]/2$. Haciendo la diferencia entre estas dos expresiones se puede ver en cuánto se incrementó el número de diagonales:

$$(n+1)[(n+1) - 3]/2 - n(n-3)/2 = n-1$$

O sea que no se trata de un valor constante, sino que depende del número de lados del polígono.

P5: Puede cumplirse para n =1, n=2 y n= 3 pero puede no verificarse para ningún otro n, por lo tanto no cumple la segunda condición. (Esta igualdad es igual a $(n-1)(n-2)(n-3) = n^3 + 11n - 6n^2 - 6$) 0

P6:…. Falla la primera condición para 1 o para otro valor cualquiera de n aunque cumple la segunda.

NOTA: El método de inducción matemática o inducción completa o de recurrencia se atribuye a B. Pascal quien (1623-1662) lo expone con claridad y lo perfecciona con Fermat (1601-1665), aunque se encuentran antecedentes en el hindú Bhaskara (1114-1185) y el italiano Maurolico (1492-1575).

Cuidado que hay que tener en el uso del método de inducción:

Conjetura de Golbach: "*Todo número par mayor que 2 es la suma de dos primos*" sigue siendo conjetura porque aunque fue comprobada para números menores que 10^{18} aún no ha podido ser demostrada!!!, nadie sabe si algún día aparecerá una excepción.