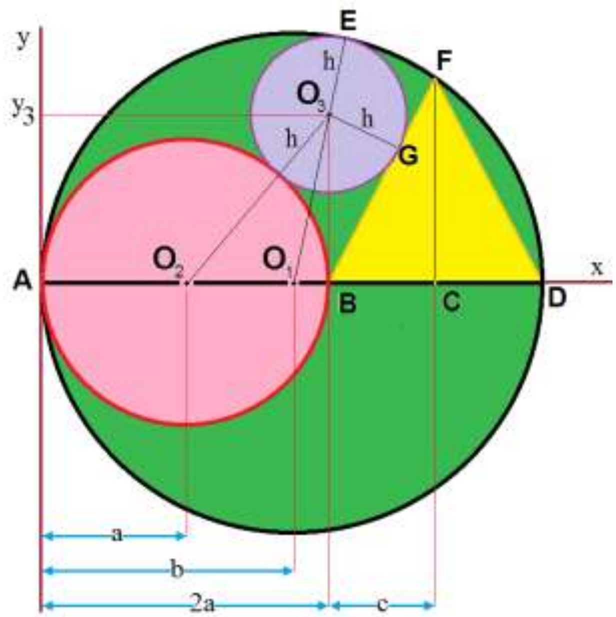
TEMPLO JAPONÉS

Autor: Oscar Bressan, GPDM

Sangaku o **San Gaku** son tablillas de origen japonés con problemas matemáticos principalmente geométricos, creadas durante el período Edo (es una división de la historia de Japón, que se extiende desde el 24 de marzo de 1603 hasta el 3 de mayo de 1868).

Un Sangaku es una tablilla de madera con figuras geométricas ubicadas en los templos y santuarios como ofrendas votivas a los dioses o como desafíos a los congregados y visitantes, escritos en *kanbun*, una forma antigua de japonés. Cada tablilla Sangaku contiene entre 1 y 10 problemas, y cada problema está formado de la siguiente manera: arriba (o a la derecha) de la tablilla se ubican las figuras geométricas; abajo (o a la izquierda) se encuentran la pregunta y soluciones (procedimiento, respuesta o ambas si las hay); y por último el creador del Sangaku, el profesor, la escuela y la fecha de su colgado.



El problema Sangaku que vamos a ver es de 1803. Ivan Moscovich en su libro "El gran libro de juegos matemáticos para la mente" (Volumen 1) lo describe así:

> *"Ubica sobre el diámetro del gran círculo verde, dos figuras: un triángulo isósceles y un círculo más pequeño color rojo. Coloca el triángulo de modo que su base apoye sobre el diámetro del círculo grande. Y ubica el círculo rojo de modo que su diámetro pase por el diámetro del círculo grande desde la base del triángulo hasta la circunferencia del círculo grande. Ahora agrega un tercer círculo* (violeta) *que sea tangente a los otros dos y al triángulo. Si dibujas un segmento desde el centro del tercer círculo hasta el punto en que el círculo rojo y el triángulo se intersecan, ¿puedes demostrar que ese segmento es en realidad perpendicular al diámetro del círculo verde grande?"*

En el capítulo Soluciones Moscovich escribe*: "La solución que se da en la tablilla Sangaku es la siguiente: imagina que la perpendicular se dibuja separada del segmento especificado en el acertijo. Si en realidad son segmentos diferentes, entonces comenzarán en el centro del círculo violeta y se dirigirán hacia puntos diferentes en el diámetro. En la mayoría de los acertijos Sangaku* *que han llegado hasta el presente no se incluye la prueba del teorema de modo que para nosotros es difícil y a veces imposible comprenderlos."*

Aquí vamos a tratar de demostrar el acertijo de un modo relativamente simple. Todos los parámetros que vamos a usar están en base a la figura.

La estrategia que desarrollaremos es buscar el punto O_3 (que es el centro del círculo violeta que equidista de las circunferencias del círculo verde y del círculo rojo con coordenada x igual a "2 a") y luego verificar que ese punto es la distancia mínima al triángulo amarillo.

Observemos, usando Pitágoras, que la distancia entre O_2 y O_3 es:

$$(a + h)^2 = a^2 + y_3^2$$

De igual modo la distancia entre O_1 y O_3 es:

$$(b - h)^2 = (2 a - b)^2 + y_3^2$$

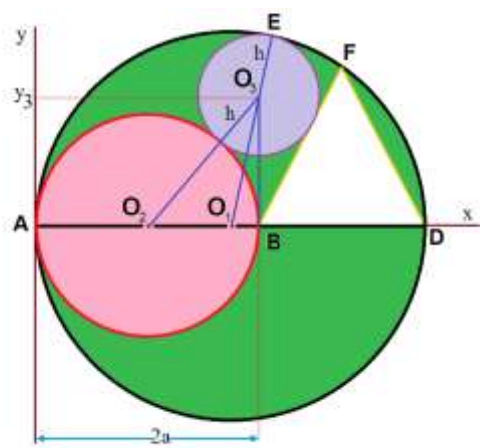
Tenemos entonces dos ecuaciones con dos incógnitas (y_3, h) de resolución simple. El resultado es:

$$h = \frac{2 a (b - a))}{a + b}$$

$$y_3 = \pm \frac{2 \sqrt{2 b a^2 (b - a)}}{a + b}$$

La doble solución de y_3 (o sea el $\pm$) corresponde a la solución en el primer cuadrante (+) y la solución reflejada en el cuarto cuadrante (-). Como estamos trabajando en el primer cuadrante solo consideraremos la solución positiva.

Lo que hemos encontrado hasta ahora es que el punto O_3 equidista una distancia "h" de las circunferencias roja y verde, su coordenada x valga "2 a" y hemos determinado cuanto vale su coordenada y_3. En consecuencia el diámetro del círculo violeta debe valer "h".



Nos falta demostrar que la distancia mínima entre el punto O_3 y el lado BF del triángulo también sea "h". Para ello observamos que este lado es parte de la recta definida por:

$$y = m_{BF} (x - 2 a)$$

o bien:

$$m_{BF} x - y = 2 m_{BF} a$$

donde m_{BF} es la pendiente de BF. De la primera figura se encuentra que:

$m_{BF} = FC/BC$

La base del triángulo es

$BD = 2b - 2a$

y en consecuencia

$BC = CD = b - a$.

La distancia del punto O_1 a C es

$O_1 D - CD = b - (b - a) = a$

La ecuación de la circunferencia del círculo verde, pensada con centro en el origen es:

$y^2 + x^2 = b^2 \quad \rightarrow \quad y = (b^2 - x^2)^{½}$

y para un x = a tenemos que y vale

$y = (b^2 - a^2)^{½}$

y esto es justamente FC, o sea la altura del triángulo amarillo

En consecuencia la pendiente de BF es

$m_{BF} = FC/BC = (b^2 - a^2)^{½} /(b\text{-}a) = (b\text{-}a)^{½} (b+a)^{½} / (b\text{-}a) = ((b+a)/(b\text{-}a))^{1/2}$

Por otro lado, si tenemos una recta cualquiera en el plano expresada como:

$\alpha x + \beta y = \gamma$

y un punto P(k, t), la distancia mínima entre ellos es (se toma valor absoluto porque la distancia siempre se considera positiva):

$$\text{Distancia mínima} = \left| \frac{\alpha k + \beta t - \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right|$$

Si tenemos en cuenta que la ecuación de la recta es m_{BF} x - y = 2 m_{BF} a y las coordenadas de O_3 son O_3 (2 a; y_3) y aplicamos la fórmula anterior llegamos a:

$$\text{Distancia mínima de } O_3 \text{ al triángulo} = \left| \frac{m_{BF}\ 2a - y_3 - 2\, m_{BF}\ a}{\sqrt{m_{BF}{}^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{y_3}{\sqrt{m_{BF}{}^2 + 1}} = \frac{2a(b-a)}{a+b}$$

que es exactamente h. **Entonces tenemos que h es la mínima distancia al triángulo amarillo, y está en la coordenada x igual a "2a".**

El acertijo queda demostrado, debe destacarse que es realmente ingenioso y notable que se haya presentado en 1803.