LAS FRACCIONES: UN ENFOQUE REALISTA

In rational Numbers: An Integration of Research. Edited by Carpenter, Th. et al. L. Erlbaum, 1993

L. Streefland
Universidad de Utrecht

Traducción interna para el GPDM: Nora Da Valle

El término ***realista*** puede ser malinterpretado con facilidad. Obviamente su primer significado: que la matemática que va a ser enseñada está conectada firmemente con la realidad, o a la inversa: que la realidad sirve tanto como una fuente de la matemática representada mentalmente y como su dominio de aplicación. Este capítulo incluye la descripción de cuatro unidades para la construcción de un curso de fracciones. Estas unidades, reflejan este aspecto de lo realista aunque en diferentes niveles. Más aún, de este modo, las fracciones pueden desarrollarse como una realidad para los que aprenden. Esto significa que el término realista se refiere a la manera en la cual los alumnos comprenden (sus) fracciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Ellos necesitan desarrollar herramientas tales como modelos visuales, esquemas y diagramas para tender un puente entre lo concreto y lo abstracto. Esos son los vehículos de pensamiento para que los alumnos logren situarse en la realidad matemática y progresar dentro de ella. Una descripción extendida de un proceso individual a largo plazo ilustra esto. Refleja los intentos de integrar el proceso de enseñanza/aprendizaje de las fracciones. La investigación de este desarrollo va a resultar en cursos que se ocupen de fomentar ambos procesos: el enseñar y el aprender.

Los matemáticos, desde Klein hasta Freudenthal, y los psicólogos, en particular Piaget y Davydov, se han comprometido explícitamente con el problema que plantea la enseñanza de las fracciones. Muchos otros continúan refiriéndose al desafío que representan las fracciones dentro de la educación matemática (Milton, 1983; Usiskin, 1979). En el contexto del interés en el aspecto matemático, es hora de focalizar la atención en esas preguntas acerca de las fracciones en la educación matemática que son de fundamental importancia para aprender a pensar matemáticamente.

Moviéndonos de lo general a lo específico, las siguientes oraciones numéricas presentan un punto de partida ideal para la discusión:

- 1/2 + 1/3 = 5/6
- 1/2 -1/3 =1/6
- 1/2 x 1/3 = 1/6
- 1/2 : 1/3 = 1 1/2

Relacionemos cada una de estas oraciones numéricas con una barra de chocolate que contenga seis partes. Media barra es igual a tres partes y dos partes son iguales a un tercio. Si combinamos tres partes y dos partes, falta sólo una parte o un sexto para completar la barra. Entonces 1/2+1/3=5/6. De manera similar, la diferencia entre un medio y un tercio de una barra puede ser determinada comparando tres partes con dos partes, lo que conduce a.

1/2-1/3=1/6

Para 1/2x1/3, la partición se hace en etapas. De las dos partes que representan un tercio de una barra, se debe sacar un medio de una de las partes, lo que significa que 1/2x1/3=1/6. Finalmente, para la división, se puede deducir el resultado de la comparación de tres partes con las dos partes. Esto muestra que el último entra una vez y media en el primero. Por lo tanto, 1/2:1/3=1 ½.

De esta manera, mediante una representación (por ejemplo, una barra de seis partes), las principales operaciones con fracciones pueden ser percibidas y llevadas a cabo. El establecer significado es uno de los principales asuntos, tanto histórica como actualmente, en la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

¿Cómo adquieren los niños una comprensión del significado de las fracciones?

Para contestar esto se presenta un resumen de la investigación y el desarrollo realizado a lo largo de los últimos 10 años en los Países Bajos. La sección siguiente examina cómo las fracciones adquieren su significado presentando dos bloques de construcción para un curso de fracciones: las actividades de reparto equitativo y los arreglos de asientos en situaciones del compartir de un modo justo (ver Streefland, 1991, para una descripción completa). En las siguientes secciones, otros bloques de construcción son revisados. Reflexiones relevantes y marcos teóricos basados en la visión de las fracciones en Freudenthal (1983), Streefland (1984, 1986 y 1991), y Treffers y Goffree (1985) son considerados. Se describe y analiza un ejemplo del proceso de aprendizaje de un estudiante, que tuvo lugar durante un período de dos años, con respecto a una característica central a la adquisición del concepto de fracciones: el ceder o construir una resistencia a los factores de distracción N (números naturales), o sea, la tendencia a trabajar con las fracciones como si estas fueran números naturales.

¿CÓMO ADQUIEREN SIGNIFICADO LAS FRACCIONES?

A modo de ilustración de nuestras actividades de aprendizaje, presentamos a continuación dos actividades: el reparto equitativo y la división en subgrupos de los que participan del reparto. En las situaciones que resultaron de estas actividades, las fracciones adquirieron significado como objeto de estudio de la matemática. Lo que sucedió en el análisis anteriormente mencionado es que la columna de las oraciones numéricas fue dada por sentada porque esa fue la intención del autor, como en el caso de la barra de chocolate con seis partes. Lo mismo puede decirse de los bloques simbólicos de construcción usados para expresar tanto operaciones como fracciones. ¿Debemos suponer, por ejemplo, que los símbolos para ambos números y operaciones para las fracciones tienen el mismo significado que el que tienen en el contexto de los números naturales? Cuando los niños los tratan de esa manera, como 1/2+1/3 = 2/5 ¿por qué esto no es correcto y cómo podemos hacer una distinción clara para los alumnos?

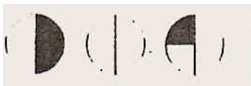
La Actividad de Compartir de una Manera Equitativa

Comencemos con un ejemplo: "Dividir 3 pizzas entre 4 chicos." Cada chico va a recibir ¾ de una pizza, siempre y cuando el reparto haya sido hecho de manera equitativa. Las porciones pueden ser descriptas como herramientas lingüísticas que más adelante serán denominadas "fracciones". Primero los alumnos estiman sus respuestas. ¿"Cada persona obtiene más o menos que una mitad?" Al oír más acerca de esto, los alumnos pueden comenzar a distribuir medias pizzas, y luego considerar qué hacer con el resto. Las fracciones están íntimamente relacionadas con la división en mitades de manera reiterada (½, ¼, ¾, 1/8,…) y esto puede ser usado como *punto de referencia* para la estimación. Es preferible que los alumnos mismos elijan esos puntos de referencia para la estimación antes que ofrecer estas referencias elegidas por otros. (Streefland, 1982)

1. Uno por uno:

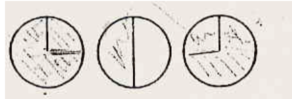
Todos reciben ¼ de pizza +1/4+1/4. que es 3x ¼ ó ¾

2. Primero dos, luego uno:



Todos reciben ½ pizza, y luego ¼ más: ½+ ¼ ó ¾

3. Los tres a la vez:



Dos chicos reciben 1-1/4, y dos chicos reciben ½+ ¼,

Llama la atención que en el reparto equitativo, como una fuente variada para la producción de fracciones, el concepto mismo de fracción y de las operaciones informales con fracciones, se relacionen directamente entre sí. En esta clase de enfoque, es imposible constituir mentalmente el aspecto de parte- todo de las fracciones sin también involucrarse con una visión o las operaciones que anticipan reglas. Cuando se les adjudica una medida, peso o precio a lo que se está distribuyendo, entonces las fracciones toman la función de operadores.

Nuestro ejemplo de compartir de manera equitativa ilustra un proceso compuesto de división, operación informal, y abreviación. La siguiente representación expresa esto en forma simbólica:

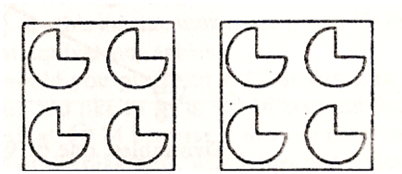
3/4 = ¼ + ¼ + ¼
¾ = 3 x ¼
¾ = ½ + ¼
¾ = ¼ + ½
¾ = 1 – ¼

La comparación de la primera y la tercera línea muestran que dos cuartos están escondidos en un medio y se sigue de esta manera. Es decir que lo que ya fue visible en el material dibujado, ahora puede ser reafirmado mental y simbólicamente – es decir que ½ es un ***pseudónimo*** de ¼ + ¼ ó viceversa.

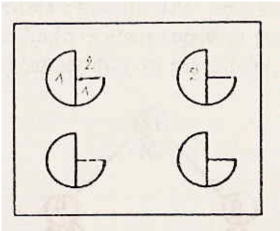
Fracciones equivalentes

La exploración de situaciones como: "Dividir 6 panqueques entre 8 chicos" y "5 pizzas entre 4 chicos" produce fracciones equivalentes y números mixtos. Consideremos: "Dividir 6 panqueques entre 8 chicos". Se mencionan expresiones de miembros de la clase durante nuestra experiencia de enseñanza. (Streefland, 1991).

Frans dibujó la siguiente figura sobre papel y escribió que esto era lo mismo que 3 panqueques para 4 personas, sólo que "Ahora es el doble":



Margreet todavía necesitó el apoyo de los nombres, y llamó a las personas involucradas en el reparto: “1,2,…,8.” Ella usó estos símbolos para indicar las porciones que cada persona recibió y dibujó lo siguiente:

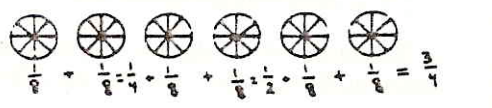


Marja escribió: “Primero cada uno recibe una mitad y después un cuarto.” Kevin usó su papel para distribuir los pedazos. Distribuyó los pedazos de cada panqueque sistemática y equitativamente en 8 platos dibujando líneas que los conectaban.

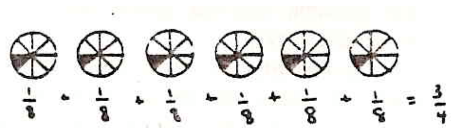
Las experiencias previas de dividir 3 pizzas entre 4 chicos fueron tenidas en cuenta. Cinco alumnos dividieron los panqueques exclusivamente en cuartos. Y 11 chicos hicieron mitades y cuartos. Ninguno los dividió en octavos.

En base a los resultados previos, se juzgó necesario prestar atención tanto a la división unidad por unidad y a describir los resultados del proceso sucesivamente, como a las etapas intermedias del proceso de compartir. El problema se basó en una historia de un restaurante francés en el cual los panqueques se servían de esta manera. “El primer panqueque es servido y dividido entre los que lo van a compartir. Se hace lo mismo con el segundo y así sucesivamente – un proceso al cual los chicos denominaron *división francesa.* Esta actividad produjo una gran cantidad de lo que nosotros llamamos *material monográfico*, como se muestra en los dos ejemplos del trabajo de los alumnos en la fig. 12.1.

Todos los chicos estaban bastante familiarizados con la partición en mitades reiterada y su descripción hasta 1/8, y también con las conexiones mutuas relacionadas y sus equivalencias. Ellos también aplicaban equivalencias cuando abreviaban sus descripciones, como: 1/8 + 1/8 = 1/4, 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2.



1. 1/8	1. 1/8 + 1/8 = 1/4
2. 1/8 + 1/8 + 2/8 = 1/4	2. 1/8 + 1/8 +1/8 = 3/8
3. 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8	3. 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2
4. 1/8 +1/8 + 1/8 +1/8 = 1/2	
5. 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 5/8	
6. 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = ¾	



1. 1/8
2. 1/8 + 1/8 = 1/4 = 2/8
3. 1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/4 + 1/8 = 3/8
4. 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 2/4 = 4/8
5. 1/8 + 1/8 + 1/8 +1/8 + 1/8 = 5/8
6. 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = ¾ = 6/8

Fig. 12.1 Ejemplos del trabajo de los alumnos para el problema de dividir 6 panqueques entre 8 chicos.

En general, esta clase de actividad condujo a los chicos a producir una variedad de equivalencias (como 3/4 = 6/8 y 5/4 = 1 y 1/4) como un medio para variar la distribución en situaciones más complicadas con números más grandes. El “tragado” mutuo de una fracción por otra, como 1/2 por ¾, ó 3/4 por 6/8 llevó al uso de pseudónimos para la descripción de fracciones equivalentes.

El material monográfico basado en situaciones de distribución puede ser guardado para tratarlo en mayor profundidad y expandirlo, para aplicarlo a la propia producción en un nivel simbólico. Debería ser obvio que pueden aparecer toda clase de cuestiones de reconstrucción que tengan que ver con el desarrollo de la distribución – por ejemplo, la determinación del curso de una situación de división a partir de la ilustración o las porciones numéricas.

Ejemplo 1. 5 pizzas fueron divididas entre 8 chicos; cada uno de ellos recibió 1/4 + 1/4 + 1/8 ¿Cómo fueron servidas las pizzas?

Si alguno de aquellos que comparten la pizza se retirara, entonces esto cambia tanto la distribución como la notación. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

Una familia que consiste de un padre, una madre, Pedro y Ana, comen pizzas al mediodía. La primera se reparte equitativamente. Mientras tanto, se prepara la segunda en el horno. La madre divide ésta en cuatro partes iguales, también. Luego ella dice: “Oh, qué tonta que soy, yo ya comí demasiado. Ustedes tres pueden compartir ésta.” “ No”, dice Ana. “uno de estos pedazos es suficiente para mí”, y, volviéndose hacia Pedro y su papá, agrega, “ustedes pueden compartir el resto. “No fue necesario repetir esto a Pedro y su papá. Dividan los pedazos. ¿Cuánto recibe cada uno de los miembros de la familia?

Este problema fue una fuente de toda clase de descubrimientos para los alumnos (Streefland, 1991).

Marja estaba tan conciente de que el papel funciona meramente como un modelo de la realidad que ella (sola) dibujó pizzas cuadradas.

Mark, a su vez, realizó un gran salto conceptual al convertir “la mitad de un cuarto” en ½ / 4, (lo que Pedro y su papá habían eventualmente compartido entre ellos)

El mencionar el nombre de los participantes fue una buena idea porque nueve de los chicos los usaron en sus dibujos, ya sea completos o abreviados con iniciales.

La descripción varió considerablemente, entre el más abreviado uso de símbolos (la mamá 1/4 de pizza, Ana 1/2, Pedro 5/8 y el papá 5/8), hasta el uso de una combinación de escritura completa y símbolos numéricos (“Pedro recibe una mitad y después 1/8.”) El término “uno y medio” fue usado también para denominar lo que comieron Pedro y su papá, con lo cual los alumnos (luchando con la relación correcta) quisieron decir: un cuarto y medio.

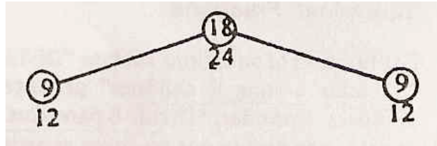
En algunas instancias, Kevin dejó los pedazos sin nombre y usó las dos descripciones: “1/4 + 1/4 + 1/8” y “tres pedazos”.

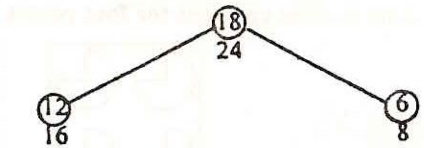
El uso del cero como un elemento neutral también se evidenció aquí de una manera natural, y algunos de los chicos parecían estar concientes de esto. Sanny describió la porción de la mamá como “un cuarto + 0 = ¼”, mientras Marja escribió “¼ 0” y Nanja “¼ + 0 = ¼.”

La Actividad del Arreglo de Mesas

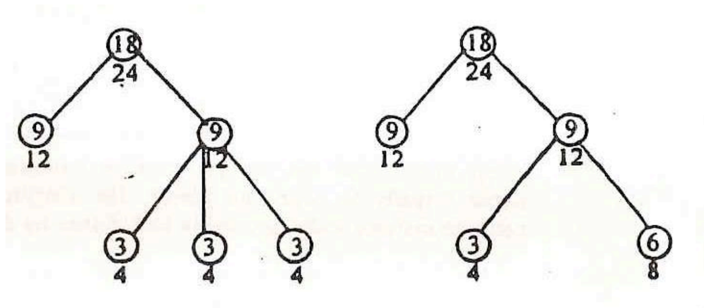
Las situaciones más extendidas, como “Dividir 6 barras de chocolate entre 8 chicos” pueden ser aclaradas tanto sirviendo en etapas como variando los arreglos en cuanto a dónde o cómo se sienta la gente.

La situación, ilustrada por 18 pizzas en una mesa donde están sentadas 24 personas, requirió la construcción de un símbolo adecuado: 18 24. Un restaurante puede reubicar sus mesas para adecuarse a las necesidades o gustos de un grupo – para mantener una división equitativa en el reparto de una pizza. Esto involucró todo tipo de actividades de organización y estructuración, como el diseño de diagramas que expresaron los diferentes arreglos de las mesas y sillas:

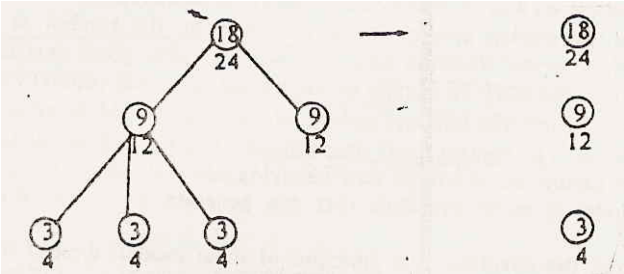




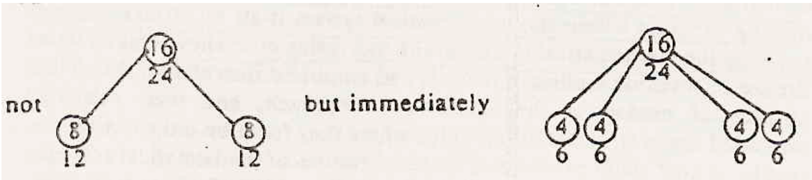
Estas clases de diagramas no sólo reflejan un compartir equitativo, sino también simplifican la comunicación entre alumnos y maestros. La progresión de tres pasos de la situación al símbolo y al diagrama también puede ser un soporte, en una gran medida, de los procesos de pensamiento de los alumnos. La construcción de diagramas para los arreglos de mesas evocó la construcción espontánea de una variedad de diagramas más elaborados o abreviados:



Eventualmente, los árboles son podados hasta convertirse en no más que un tronco:



Otro método importante de abreviación es comenzar con un diagrama con más de dos mesas. De esta manera, se encuentran más rápidamente situaciones más adecuadas:



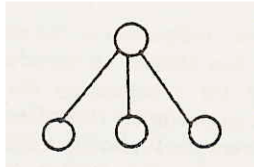
Estos contextos conducen a directivas que contemplan el número de mesas y el número de personas por mesa. De esta manera, se encuentran numerosas posibilidades que producen las tablas de equivalencias resultantes.

La cuestión, "¿Dónde preferirías sentarte?" al comienzo puede causar reacciones muy diferentes, como: "A mí me gustaría sentarme en 18 24 porque es la que tiene más pizzas." La esquematización progresiva de los diagramas, que significa una aplicación de un aumento de eficiencia de las abreviaciones, podría ser interrumpida en cualquier etapa para decidir el resultado de esa situación particular por medio de servir y distribuir. Se debe prestar atención a servir pedazo por pedazo por la precisión de este método de división. Más aún, esta manera de trabajar es la fuente para la construcción de fracciones por medio de fracciones unitarias (de numerador 1), como mostraron nuestros ejemplos de "división francesa".

Otra manera de salir del diagrama para decidir el resultado es reconocer situaciones claras en las cuales han sido realizadas divisiones previas.

El símbolo de la mesa da lugar a un número de preguntas:

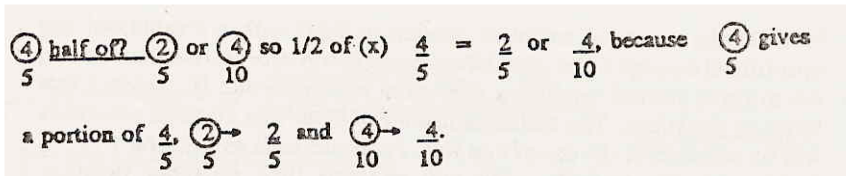
1. ¿Es equitativa la distribución de 18 24 en ⑥ 8 y 12 16?
2. ¿Recibes más con ③ 4 o con ⑦ 8? ¿Cuánto más?
3. Con ③ 4, cada persona recibe $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; ¿cómo fueron servidas y distribuidas las pizzas?
4. En su plato una persona tiene 1/12 + 1/6 + 1/6 + 1/6 de pizza. ¿Cómo se sirvieron y distribuyeron las pizzas? ¿A qué mesa estaba sentada esta persona?
5. Otra persona tiene 1 y 1/3 pizza; ¿en qué mesa podría haber estado sentada?
6. Alguien hace un diagrama de un arreglo de mesas y sillas:



¿Cuántas pizzas y comensales pueden estar involucradas aquí? Completa el diagrama con un número a tu elección; ¿cuánta pizza recibe cada persona?

7. ¿Puede alguien a quien se le ha servido 1/2 + 1/3 haberse sentado a la mesa ② 5?
8. A alguien se le ha servido 1/2; ¿a qué mesas podría estar sentado?
9. Alguien está sentado a la mesa ④ 5. ¿En qué mesa se le hubiera servido sólo la mitad de esa cantidad?

Particularmente para la pregunta nueve, el soporte del diagrama del arreglo de mesas y sillas resulta muy útil:



④/5 <u>mitad de 2</u>②/5 ó ④ /10 entonces ½ de (X) 4/5 = 2/5 ó 4/10. porque ④/5 da una porción de 4/5, ②/5 →2/5 y ④/10→ 4/10.

El punto principal aquí es la conexión entre razones y fracciones, mientras simultáneamente se distinguen una de la otra por medio de notaciones diferentes.

Además de la comparación directa de estas situaciones, el arreglo de mesas y sillas deseado se obtiene conectando lo que está sobre la mesa con un precio determinado. El precio es una de las muchas variables que deberían ser explotadas tanto como sea posible dentro del contexto que se está considerando. Esto también se aplica a la comida misma, la cual se sirve teniendo en mente los distintos modelos (rectángulos, círculos, etc.).

Las preguntas que surgen con respecto a los arreglos de mesas y sillas conducen a la construcción de formas que contienen acceso a las operaciones en conexión con:

1. La distribución equivalente y fracciones.
2. El ordenamiento de las situaciones de distribución equivalente y las fracciones.
3. La determinación de las diferencias al operar; y, de esta manera, también en:

a. La resta (y la suma)
b. La multiplicación a través de la intervención en situaciones, y
c. La división en su aspecto de distribución, obtenida a través de una repartición uniforme de las porciones.

La construcción individual y las producciones de los alumnos pueden jugar un rol importante aquí (Gravemeijer, Van den Heuvel-Panhuizen, & Streefland 1990; Streefland, 1991). Esto no sólo sirve de soporte para la construcción de diagramas de arreglos de mesas y sillas y la oportunidad que estos ofrecen a los alumnos de aplicar toda clase de abreviaciones de manera espontánea; sino también provee una transición natural a las tablas de razones al podar de manera óptima los árboles que muestran los arreglos de mesas y sillas e introducen clases de tablas ($\frac{1}{2}\rightarrow$ ① 2, ② 4, ③ 6…) a través de la porción que uno recibe. Por este medio, el proceso de matematización progresiva adquiere nuevos impulsos y posibilidades a través de la abreviación (Streefland, 1982). Esto es reducido a su forma más simple de expresión, es decir que las actividades que facilitan el paso hacia las operaciones, ahora están aseguradas más firmemente que nunca en fuentes concretas para estas fracciones.

Una Reflexión acerca de la Construcción de las Fracciones

¿Cómo proveen las actividades sugeridas a los alumnos un concepto significativo y operativo de fracción? Proveen una representación concreta que está orientada hacia la producción de material de referencia – es decir material que se refiere a las situaciones. El significado matemático de este material se verá, eventualmente en el uso de símbolos. Las fracciones como 3/5, 5/8 y 1 y 1/4 deben convertirse en símbolos genuinos y también retener sus funciones de referencia. Las fracciones simbólicas sólo pueden ser entendidas cuando las fracciones representan algo. El material deber ser rico y lo suficientemente diverso para crear un fundamento sólido – una base amplia de orientación – para la construcción de niveles intermedios y formales del conocimiento de fracciones. Para lograr esto, uno debe comenzar en primer lugar con actividades como el reparto equitativo en situaciones de distribución como la división de 18 barras de chocolate entre 24 chicos.

La distribución conecta a los objetos con los participantes de una manera natural. Las situaciones resultantes pueden ser construidas variando las maneras de servir en las mesas y los tipos de arreglos de mesas y sillas. La conexión original – preservando las razones – debe ser tenida en mente si uno no quiere afectar lo equitativo de la distribución. Los arreglos de sillas y mesas y las variaciones en el servicio son medios ideales para romper una situación de distribución abierta desde varios puntos de vista. (Streefland, 1991)

La imagen visual relacionada con la construcción del símbolo 18 24 se refiere fuertemente (inicialmente) al contexto, expresamente 24 chicos sentados a una mesa y 18 pizzas sobre ella. Las situaciones modelo desarrollan en modelo de situaciones – manejadas por las unidades o en una base global los objetos sobre la mesa, los arreglos de mesas y sillas, y la distribución, tanto como sus representaciones esquemáticas. En el caso de los arreglos de mesas y sillas, por ejemplo, el símbolo como se lo construyó se refiere a la situación y la esquematización ocurre en el trasfondo de la historia de los arreglos de mesas y sillas. Es el contexto mismo que funciona como un modelo, una situación modelo. Con esta situación modelo y la esquematización que la acompaña, un modelo de proceso cognitivo es hecho posible que puede generar situaciones de división equivalentes.

En general, el carácter y la función de estos modelos depende del acento relativo que se coloque en la matematización horizontal y vertical, donde la matematización horizontal se caracteriza por moverse desde los problemas reales hacia la matemática y viceversa y la matematización vertical se caracteriza por hacer progresos dentro del sistema matemático mismo estructurando y ordenando el material matemático con una eficiencia creciente. Esto explica el uso de situaciones modelo en la instrucción realista y empirista, la ausencia virtual de modelos en un enfoque mecanicista, y su uso relativo (dado que se toma un sólo lado) en métodos estructuralistas en los cuales solamente funcionan verticalmente- es decir, como una materialización construida de manera artificial de los conceptos y las estructuras matemáticas. (Gravemeijer y otros 1990; Treffers, 1987; Treffers y Goffree, 1985).

Sólo en la forma descripta, se produce la construcción de la fracción como un objeto mental, mientras mantiene una relación estrecha con la razón. La relación entre lo que se sirve y el número adecuado de personas involucradas en la situación de reparto debe ser construida mentalmente una y otra vez. A través del reparto equitativo, estas relaciones son transmitidas y materializadas en porciones individuales en una variedad de modos.

"Cada persona recibe 5/8…" De esta manera 5/8 es conectada fuertemente con una cierta representación – basada en la distribución francesa: 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 5 x 1/8 = 5/8 tanto como en la división global; por ejemplo, cada persona primero recibe 1/2 y después 1/8 más. La estimación, "algo más que ½"; puede mediar entre la situación y el resultado. Las fracciones familiares, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$,… son usadas como puntos clave para la estimación. Una conexión significativa se puede desarrollar de esta manera entre ⑤ 8 y 5/8. El grado de concreción es determinada primariamente por la representación emergente. Estas actividades pueden tener lugar mentalmente, con un soporte de un dibujo en un papel, formando modelos, distribuyendo, describiendo por medio de símbolos y procedimientos similares.

De este modo, una puede hacer dibujos de situaciones familiares para explotar con éxito el nivel concreto. Se ponen así en movimiento tanto la matematización horizontal como la vertical. El fundamento para niveles más altos se coloca formando modelos concretos. La exploración en el papel las situaciones de distribución demanda una representación simbólica concreta. Esta puede tener lugar con creciente eficiencia. Se pueden desarrollar varios tipos de modelos: linear (línea numérica), circular, rectangular (modelo de área) porque la realidad representa una rica variedad en términos de las formas de los objetos que se van a distribuir. La representación simbólica en una distribución resulta en una variedad de posibles diagramas monográficos (pequeños) como un marco descriptivo: Las fracciones son producidas para describir relaciones contenidas en compilaciones y separaciones. La diferencia entre la formación del concepto y las operaciones para el aprendizaje no es ya necesaria; el concepto de formación y la operación con comprensión se producen de la mano.

Se enfatiza el concepto de equivalencia. Además de las equivalencias como 1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8… (y ① 2 = ② 4 = ③ 6 =…) otras equivalencias como 5/4 = 1 y 1/4 pueden ser vistas. El concepto de ppseudónimo provee la equivalencia con un fundamento para los alumnos y simplifica la comunicación con respecto a esto. El comparar y ordenar situaciones de distribuciones siguen siendo actividades esenciales, dando lugar a un proceso de matematización vertical. De este modo, los conceptos de fracciones y razones se entrelazan firmemente.

Los Factores de Distracción (o distractores) N

La tentación de usar las reglas aritméticas de los números naturales al trabajar con fracciones es fuerte cuando los alumnos no tienen una comprensión adecuada de las fracciones. El operar en un nivel simbólico con numeradores y/o denominadores independientemente, sin considerar su relación conceptual, indica que el concepto de fracciones de los alumnos no está lo suficientemente afianzado. Una resistencia creciente a los factores de distracción N de los números naturales, a los cuales yo denomino *factores de distracción (o distractores) N* (Streefland, 1984), es demostrada por la habilidad creciente para encontrar argumentos para refutar estas operaciones incorrectas e indica la calidad de un concepto operativo de las fracciones (Streefland, 1986). El desarrollo de la resistencia a hacer errores frente a los factores de distracción N no solamente está implicada automáticamente en la producción de bloques de construcción para la adquisición de un concepto firme de fracciones; deber ser acompañada intencionalmente de la construcción de la resistencia a este fenómeno obstinado. Hay ejemplos de este tipo de actividad disponibles para contribuir directamente a este tipo de resistencia, como la reconstrucción de una situación a partir de un resultado dado y compilado.

Lo que se considera en la literatura de investigación como un razonamiento proporcional, aditivo incorrecto representa, teóricamente, el mismo fenómeno que los errores de los factores de distracción N en el caso del cálculo con fracciones. Involucra la comparación y construcción de razones basada más en las diferencias absolutas que en las relativas. Por ejemplo, un tono de púrpura es creado combinando 2 unidades de rojo con 4 unidades de azul. Un alumno, cuando se le pide que cree el mismo tono basado en 4 unidades de rojo, decide usar 6 unidades de azul, argumentando que "también es 2 más". O, cuando se lo confronta con una porción de "1/3 + 1/4", un alumno piensa que había 3 + 4 participantes en la situación original de repartir

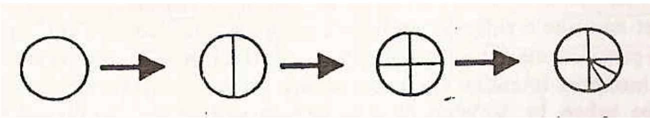
Así como los errores producidos por factores de distracción N son un caso producido por una falla al ver las fracciones como números que describen una razón (o, al menos un valor de razón), el razonamiento aditivo incorrecto en situaciones proporcionales es un caso de falta de percepción de la razón entre pares de números usados con la intención de construir o comparar. De todas maneras, se debe ser cuidadoso al sacar conclusiones en lo que respecta a la calidad del concepto de fracciones de los alumnos. Los errores que involucran el razonamiento aditivo al resolver problemas de comparación, no siempre implican una completa falta de conocimiento conceptual. Los números específicos presentados en un problema pueden complicar el procedimiento de solución hasta un punto en el cual los alumnos buscan un camino de salida que resulta en una violación de la constante de la razón requerida. Los números en este caso prueban ser más poderosos que el concepto existente sin causar necesariamente daño a dicho concepto. Este punto está apoyado por el trabajo de Noelting (1980ª, 1980b), quien describió a un alumno que usaba razonamiento proporcional en un caso, pero en el siguiente caso volvía a un razonamiento aditivo incorrecto.

Relación con Otra Investigación

Varios autores conocidos han considerado la repartición equitativa como una fuente para las fracciones. Piaget, Inhelder y Szeminka (1948), por ejemplo, se focalizaron en una repartición equitativa dentro de las unidades únicas o simples.

Su investigación resultó en un fundamento teórico, produciendo cuestiones como: (a) hay una ***relación fija*** entre el número de cortes para la división de una unidad y el número resultante de partes: y (b) los chicos necesitan tener a su disposición esquemas ***que anticipen*** la división de unidades. El orden de Piaget, de todas maneras, ignora el hecho que dividir por cuatro sigue a dividir por dos a través de dividir reiteradamente por la mitad como algo dado por supuesto y que sin duda, ocurre espontáneamente en los niños relativamente pequeños (Streefland, 1978).

Dividir por tres y por cinco parece necesitar y esquema anticipado, especialmente en el caso de unidades circulares. Por otra parte, uno debe ser cuidadoso en estos asuntos para no interpretar una falta de habilidades técnicas en la realización de tareas de división como una falta de comprensión. Es más, las divisiones que se requiere que los alumnos realicen en el papel en sus clases de matemática para la construcción de fracciones, no deberían ser evaluadas con respecto a una falta de habilidades técnicas, sino teniendo en cuenta en qué manera proveen una medida que sustente su conocimiento de estas fracciones. Esto implica ignorar la demanda de una precisión geométrica, porque los dibujos de los chicos tienen que funcionar como modelos tanto para pensar como para operar. Piaget et al. (1948) ha denominado la división paso a paso de una unidad como comportamiento divergente, como dibujar una medida circular en tres parte de esta manera:



Desde nuestro punto de vista, la división de unidades no deber ser restringida de antemano de esta manera. Si no, descartaríamos materiales ricos y útiles para el aprendizaje de fracciones.

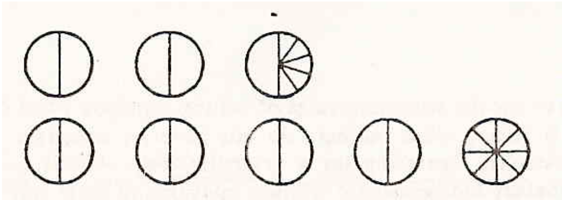
Davydov y Tsvetkovic (1969) dejaron de lado el compartir de una manera equitativa y optaron en su lugar por un enfoque superficial basado en magnitudes y mediciones, particularmente mediciones de la longitud. Desjardin y Hétu (1974) comenzaron a partir de problemas que dieron lugar a actividades como la mezcla de colores.

Un enfoque comprensivo se encuentra en el Proyecto de los Números Racionales (PNR), el cual se basa en la teoría de enseñanza-aprendizaje de Diennes para la matemática y el análisis racional de Kieren (1976). En el fundamento teórico del (PNR), la partición y la subconstrucción de la parte-todo están en primer plano. La partición y la parte-todo están relacionadas con la razón que, a su vez está relacionada con la equivalencia. La primera relación es considerada como establecida; la segunda es hipotética. La partición y la subconstrucción de la parte-todo de los números racionales son básicos para la comprensión y subconstrucción de los números racionales (Behr, Post, y Silver, 1983) y preceden al concepto de razón, el cual es muy natural en la promoción del concepto de equivalencia. El punto de partida del PNR es matemático, mientras que el nuestro es realista. La pregunta apremiante ahora es: ¿Cuáles son las consecuencias de esta diferencia?

La partición está en la parte superior de la jerarquía del PNR. Desde nuestro punto de vista, una cuestión esencial tiene que ver con dónde tiene lugar ese tipo de actividad y bajo qué circunstancias – en breve, en qué contexto. En las secciones previas se mostró que, en nuestro enfoque, la razón lidera el camino, aún cuando se trate de situaciones como el compartir 6 barras de chocolate entre 8 chicos después de haber compartido 3 barras entre 4 chicos. Siempre que se pueda comparar situaciones de intercambio, se puede determinar la equivalencia basada en el cambio y arreglo de mesas.

La interrelación entre la razón y las fracciones resulta en una jerarquía diferente de la proporcionada por el PNR: la razón (de situaciones de compartir) – equivalencia – división, parte-todo. Como una consecuencia de estas diferencias, los diferentes problemas asumen diferentes niveles de dificultad. Cuando los chicos son instruidos tanto en el proyecto del PNR como en el nuestro, por ejemplo, Behr, Post y Wachsmuth (1982) afirmaron: "Sucede que 3/5 y 5/8, por ejemplo, son fracciones muy difíciles de ordenar por algún otro medio que no sea un algoritmo abstracto como la conversión a un decimal o el uso de un denominador común o una multiplicación cruzada; las estrategias residuales rara vez podrían aplicarse a este caso" (página 31). Hemos encontrado, no obstante, que muchas etapas previas pueden reconocerse en este problema, ninguna de las cuales tiene que ver con algún algoritmo abstracto de ningún modo. Los alumnos podrán comparar estas fracciones siguiendo cualquiera de los siguientes métodos:

1. Relacionar las fracciones dadas a situaciones adecuadas de distribución y hacer más arreglos de mesas, por ejemplo, ③5 - ③5 ③5 ③5 ③5 ③---- ⑮25, y ⑤ 8----⑤ 8 ⑤ 8 ⑤ 8-----------⑮24, que quiere decir que 5/8 es mayor que 3/5 porque al compartir 15 golosinas distribuidas entre 24 chicos es un poco más beneficioso que compartir la misma cantidad con 25 chicos.
2. Relacionar las mismas fracciones con situaciones de distribución realizando el razonamiento: "el que come más, también paga más," con un precio de, por ejemplo 40 centavos por barra, conducirá a la misma conclusión.
3. Realizar distribuciones equitativas en el papel, también puede mostrar el ordenamiento:



A pesar de un enfoque integral al problema de las fracciones, el PNR, en nuestra opinión, le ha prestado mucha atención a realizar un progreso de caso en caso, en lugar de tomar las ideas generales y los principios. Esta conclusión es afirmada por el hecho de que las estrategias locales usadas por los alumnos no influyeron ni el análisis global del campo ni el material experimental del curso decisivamente.

De todos modos, algunos otros descubrimientos fueron obtenidos por Behr et al. (1982) como:

a. Los chicos utilizan un sistema personal operaracional para dividir por la mitad de manera sucesiva.
b. Las tareas de partición se desarrollan en una gran variedad de maneras
c. Los factores de distracción N son en realidad un resultado de la obstinación
d. Se encuentran enfoques similares cuando se realizan tareas de comparación. Más aún, el PNR mostró que teniendo una regla de algoritmo a nuestra disposición para convertir fracciones en equivalencias no garantiza el uso de conceptos que hayan sido comprendidos por los alumnos.

Comentarios Finales del Compartir

Los arreglos de mesas y sillas y su construcción simbólica crean un fundamento para un proceso de esquematización progresiva a través de las maneras de abreviar. Al darle un valor determinado a lo que está sobre la mesa desde el comienzo y dejando que la fracción para cada partición trabaje sobre él, las fracciones adquieren un significado como operadores. Más aún, se coloca un fundamento para operar a través de las cantidades mediadoras. El dinero puede jugar un rol mediador en esta etapa de comparar y ordenar situaciones. De esta manera también se provee acceso a las fracciones decimales. También, estas conexiones a cantidades que se utilizan repetidamente, contribuyen no sólo a concebir situaciones, sino a ser concientes de ellas.

Dos características de este enfoque ameritan nuestra atención. El símbolo del arreglo de mesas y sillas, y las situaciones de distribución y la esquematización en ese contexto, tienen un número de limitaciones con respecto a situaciones de medición. Luego de transitar por este camino, la instrucción tiene que tomar una nueva dirección. Un segundo camino que contenga no sólo situaciones de distribución, tiene que ser iniciado, siempre que uno apunte a una posibilidad de aplicar los conceptos de fracción y razón de una manera más amplia.

La segunda característica, que es absolutamente esencial, adopta el principio de mirar hacia atrás para poder anticipar. El material producido a través de las construcciones y producciones de los alumnos no sólo avanza para captar lo que está en el futuro sino que cada paso hacia delante a lo largo del camino del aprendizaje significa de hecho mirar hacia atrás a las fuentes concretas de comprensión del concepto. Este punto es ilustrado, por ejemplo, en lo siguiente: En una distribución, se le da a alguien $1\frac{1}{4}$ barras de chocolate. ¿A qué mesa podría haber estado sentada esta persona?

Esta pregunta evoca la transición de un número mixto a una fracción. Es aún más importante el hecho de volver a mirar la tabla con la situación original de distribución que tiene la función de llegar a la equivalencia. Las tablas adecuadas como ⑤ 4; ⑩ 8,... pueden, a través de la distribución francesa, otra vez estar conectadas a 5/4, 10/8,... De esta manera: $1\frac{1}{4}$ = 5/4 y 10/8 = 1 y 2/8 = 1 y 1/4 y así sucesivamente. Este y todos los ejemplos, ilustran la función reiterativa de la reflexión en un proceso de aprendizaje a largo plazo: una mirada en perspectiva y otra retrospectiva en una sola actividad. (Kilpatrick, 1985; ver también Streefland, 1992).

LA CANTIDAD COMO UN MEDIO Y LA OPERACIÓN A UN NIVEL SIMBÓLICO

Al ponerle una medida o un precio a una unidad dada, la fracción que al comienzo describía una relación de parte-todo convierte a la fracción en un operador. Por conveniencia usamos el término *precio adjunto* cuando aplicamos medidas o precios. Se puede dar el *precio adjunto* cuando se explora la división.

Los modelos visuales pueden ilustrar la medida o el precio. Por ejemplo:

Una persona recibe $\frac{3}{4}$ de una barra de chocolate. Una barra entera cuesta 1 con 20 florines holandeses. ¿Cuánto cuesta la porción representada por el sombreado?

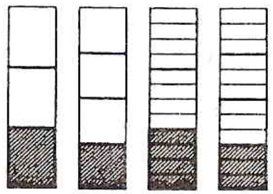
La determinación de la medida y el precio de todo tipo de combinaciones provee un método indirecto de determinar la suma, resta, producto y cociente de las fracciones. La discusión aquí se reduce a la suma y la resta. 1/2 + 2/5 = ? es asociada con la situación de pizza. Una pizza cuesta 5 florines holandeses (f). Alguien que se come ambos pedazos ha consumido 1/2 x f5 = f2.50 y 2/5 x f5 =

f2 – un total de f4.50. De esta manera los alumnos también pueden determinar el precio de 9/10 de pizza. Se crea una conexión implícita entre 1/2 + 2/5 y 9/10. Estas conexiones pueden ser hechas más explícitas considerando la misma combinación, pero con una moneda diferente, por ejemplo los francos belgas, 100.00 por pizza o los francos franceses, 20.00 por pizza. La conexión entre 1/2 y 2/5 y 9/10 se hace evidente a través de la independencia de la unidad de precio. Los resultados pueden ser chequeados utilizando ppseudónimos.

El precio también puede ser omitido. En este caso, los alumnos mismos eligen un precio cómodo, sin que el precio esté conectado de ninguna manera con el método de suma de fracciones que utiliza al denominador. Tampoco se le presta atención a la verbalización de las reglas que han sido descubiertas. Una actividad que se enfatiza es la conexión entre el contexto del problema y la combinación apropiada de fracciones. En otras palabras, los alumnos necesitan adquirir las habilidades necesarias para elegir la operación correcta y expresar la operación simbólicamente.

Los modelos visuales también pueden usarse de esta manera al trabajar. Esto es necesario no sólo para conectar ciertos modelos a operaciones adecuadas, sino también para resaltar el proceso de formación de modelos en ese contexto. Para evitar quedar pegados a pizzas y precios, ahora usamos tiras de rectángulos claramente divisibles como modelos:

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$



Al dividir cada tira en doce pedazos, es posible comparar 1/3 y 1/4 y leer la diferencia.

Producción Propia en un Nivel Simbólico

En esta sección, el foco está en separar y juntar fracciones para adquirir la habilidad de producir fracciones equivalentes y profundizar el concepto de operación.

Si damos una mirada a las operaciones previas, se revela la presencia de una gran cantidad de material de construcción y material generado por lo alumnos. En las fases previas, ha tenido lugar la producción sin restricciones. Esta manera de trabajar conduce a una etapa de producciones propias en un nivel simbólico. Las actividades de este grupo se caracterizan por quitar o juntar fracciones.

Una fracción tal como 3/4 se quita de acuerdo a la decisión propia del alumno. Por ejemplo, 3/4 = …+…; 3/4 = …+…+…+. Por otra parte, uniendo 1/2 + 1/4 = conduce a un arreglo compacto. Las descomposiciones de fracciones más difíciles, tal como 5/6, pueden realizarse con la ayuda de la división francesa, que a esta altura ya se ha convertido en un procedimiento standard: 5/6 = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6. Nuevas composiciones, como 5/6 = 3/6 + 2/6, pueden entonces ser formadas, las cuales oportunamente, actúan como un mediador entre 5/6 y 1/2 + 1/3. La equivalencia de 3/6 y 1/2 puede determinarse de una variedad de maneras: por ejemplo, sabiendo que 1/2 es un ppseudónimo de 3/6, por medio del precio adjunto, o usando nuevamente los arreglos de mesas y sillas como un mediador.

El objetivo principal de estas actividades se logra al hacer la composición de diagramas monográficos para fracciones dadas aplicando, entre otras cosas, la idea del ppseudónimo. La composición de un diagrama monográfico para ordenar fracciones también se comprende aquí. Una aseveración tal como "1/2 es mayor que 1/3" puede ser confirmada o refutada de la siguiente manera:

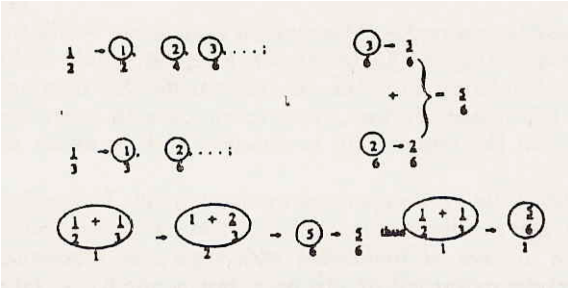
1/2 es mayor que 1/3
2/4 es mayor que 2/6
3/6 es mayor que 2/6, entonces
3/6 es 1/6 mayor que 2/6

La secuencia siguiente refleja el resultado de otro modo:

3/6 = 2/6 + 1/6
3/6 – 2/6 = 1/6
3/6 – 1/6 = 2/6

Otra serie de ejemplos trata con la determinación de resultados de una cierta combinación, como 1/2 + 1/4. Para este tipo de tarea se puede diseñar varias situaciones o modelos. Las soluciones posibles se pueden encontrar dividiendo visualmente una barra de chocolate, colocándole un precio adjunto adecuado, determinando un título apropiado para los diagramas monográficos en los cuales se encuentra el caso en cuestión; o aplicando arreglos de mesas y sillas como un modelo interno.

La última posibilidad puede llevarse a cabo en una variedad de maneras. Por ejemplo:



Un progreso en las actividades quiere decir que los alumnos pueden resolver un problema en un nivel simbólico de manera cada vez más refinada. Esto se produce utilizando una variedad de situaciones de modelos pensados y a través de la aplicación de métodos que se conviertan en más matemáticos de manera gradual y reflejen una distancia creciente de la fuente concreta. (Streefland, 1987).

Además de las numerosas instancias de construcciones y producciones, es la asimilación de una variedad de situaciones de aplicación tanto como la invención de contextos simples lo que aumenta la calidad de las producciones propias de los alumnos. Las reglas para las operaciones no son articuladas en este punto, pero los alumnos igual tratan con cuestiones como: ¿Por qué no puede 1/2 + 1/3 ser igual a 2/5?

Reflexión

Al tratar de lograr la producción de un nivel simbólico, el proceso de aprendizaje puede revelar signos de inestabilidad. Debido al enfoque realista, un número de factores coincidentes y locales permanecen en el material educativo, el cual puede influir en este proceso de aprendizaje. Esta inestabilidad puede ser expresada al volver a un nivel menor, saliendo de los carriles durante esta esquematización, la inseguridad en la elección de los modelos y la aplicación de los diagramas, o la apariencia de saltos improbables en el proceso de aprendizaje. Expresado de una forma abreviada, el proceso de aprendizaje puede permanecer errático durante algún tiempo antes de establecerse un camino más estable. Por este motivo, esto debe ser tenido en cuenta al establecer actividades de aprendizaje que conduzcan a niveles más altos. El proceso de aprendizaje individual que observamos apoya esta posición porque el avance en los niveles y la dirección se hicieron gradualmente evidentes.

Comparando. La comparación de situaciones en las que se comparan dos o más magnitudes o los valores de las magnitudes se relacionan entre sí de cualquier modo son esenciales. Una vasta área de aplicación para esta actividad puede ser vista en la física, química, economía, y matemática de la escuela secundaria. Tales problemas son igualmente importantes en un nivel primario también. Las diferentes ramas para las fracciones y razones pueden, de esta manera ser interrelacionadas. Las situaciones de comparación y de orden (pizzas, barras de chocolate, bastones de caramelo, etc.) como ③5 y ⑤ 8 pueden ser introducidas a niños de 9 a 10 años utilizando el precio por porción como mediador. “El que come más, paga más” El proceso de matematización vertical básica se ve teniendo las fases siguientes:

1. Ordenar situaciones con la ayuda de un precio dado por unidad.
2. Ordenar situaciones con la ayuda de un precio fácil de manejar por unidad por propia elección.
3. Ordenar el resultado de las situaciones (porción por persona) eligiendo con una eficiencia creciente un precio fácil de manejar por unidad.
4. Ordenar fracciones o razones por el precio más bajo y fácil de manejar. La idea de precio gradualmente se conduce hacia un segundo plano y adquiere la función del denominador común menor.
5. Restar fracciones no similares y determinar la diferencia relativa o las razones no similares aplicando la regla del múltiplo común menor.
6. Clarificar, formular, y aplicar la regla del múltiplo común menor.

1. Para retener las formaciones progresivas de modelos, la línea numérica puede ser utilizada como un modelo para crear una secuencia similar para la suma de fracciones no similares. El precio fácil de manejar es reemplazado por uno refinado y elegido de manera inteligente, para elegir la unidad en la línea numérica. Por ejemplo, en la experiencia de enseñanza que aquí se narra, varios alumnos, incluyendo a Clara y Marja, mostraron una clara preferencia por el enfoque de precios pero también tuvieron éxito en su manejo de la línea numérica como herramienta para sumar fracciones, tales como 2/3 + 3/4. La decisión clave fue dónde poner el 1 en la recta numérica, de manera tal que ellos pudieran ubicar ambas fracciones sobre ella sin tener que dividirla nuevamente. Se puede crear una secuencia similar para la multiplicación de fracciones usando un rectángulo como un modelo de apoyo y encontrando un patrón de cerámicos adecuado.
2. Ciertos contextos que involucran un precio o valor dado son importantes. Por ejemplo, los 60 minutos como tiempo para cocinar en el Restaurante Smickel en el siguiente ejemplo: Algunos panqueques en el menú del Restaurante De Smickel’s llevaron 6 minutos para cocinarse, otros 5, 10 ó 12 minutos. Los problemas, para los cocineros que hicieron una variedad de panqueques, fueron particularmente desafiantes. Por ejemplo: Al cabo de una hora, Eddy, el cocinero de la primera sartén, había hecho 5 panqueques, no todos del mismo tiempo de cocción. ¿Cuáles panqueques pueden haber sido estos? ¿Y cuántos de cada uno? No es fácil colocar juntas unidades de partes desiguales, o en otras palabras, llenar una hora con “pedacitos de tiempo” diferentes. Luego de luchar mucho, probar, pensar y

razonar, la clase eventualmente tuvo éxito a través de los esfuerzos combinados en encontrar sumas adecuadas, no sólo para Eddy, sino para otros casos:

$1/4 + 1/4 + 1/6 + 1/6 = 1$ $\quad$ $2 \times 1/4 = 2/4 = 1/2$
$2 \times 1/4 + 3 \times 1/6 = 1$ $\quad$ $3 \times 1/6 = 3/6 = 1/2$

Y también tomando en cuenta el tiempo de cocción:

$1/4 \times 60 = 15$ $\quad$ $1/6 \times 60 = 10$
$2/4 \times 60 = 1/2 \times 60 = 30$

Estas actividades también sirvieron para objetivos como la aplicación de fracciones en operaciones con cantidades como $3/5 \times 60$ y $1\ 1/3 \times 60$.

3.El diseño esquematizado para situaciones de comparación y ordenamiento debería estar apoyado por recursos esquemáticos, en los cuales ocurre un proceso de esquematización progresiva a través de las abreviaciones. Estas esquematizaciones reflejan que el nivel ha subido debido al cambio de carácter de las abreviaciones espontáneas durante la esquematización. El poder productivo de la situación modelo de arreglos de mesas y sillas es transferida a diagramas de aplicación. De esta manera y utilizando la fuente concreta como apoyo, el material es producido en un nivel simbólico que conduce a abreviaciones extremas las cuales reflejan reglas formales como el método múltiple menos común.

4.En un cierto punto, el proceso de educación comenzará a seguir más de un camino. El camino único de situaciones de distribución debería entonces ser ampliado mediante la inclusión de caminos para otras situaciones de razones (por ejemplo: mezclas, relaciones de número y precio, monedas extranjeras, distancia y tiempo, recetas), por cuyo medio el carácter de la aplicabilidad de los recursos y métodos desarrollados pueden convertirse en más generales. Una condición aquí es permanecer en el curso de la esquematización, es decir, continuar aplicando los diagramas en un problema comparativo en el segundo nivel de relaciones numéricas.

Situaciones no comparativas. La esquematización progresiva para las situaciones no comparativas muestra las siguientes características:

a. El material producido y compilado se comienza a abreviar de manera creciente.
b. Se producen pequeños diagramas monográficos, más adelante, estos serán revisados y expandidos. De esta manera, el estatus del material cambia gradualmente de lo puramente descriptivo a material simbólico de fracciones real. Además, las propiedades y reglas son aplicadas de manera creciente como métodos de producción al mismo tiempo que variamos las operaciones y aplicamos equivalencias. El progreso en la matematización se expresa en una producción cada vez más variada de diagramas monográficos que van incrementando su sistematización, como se ilustra en la fig. 12.2

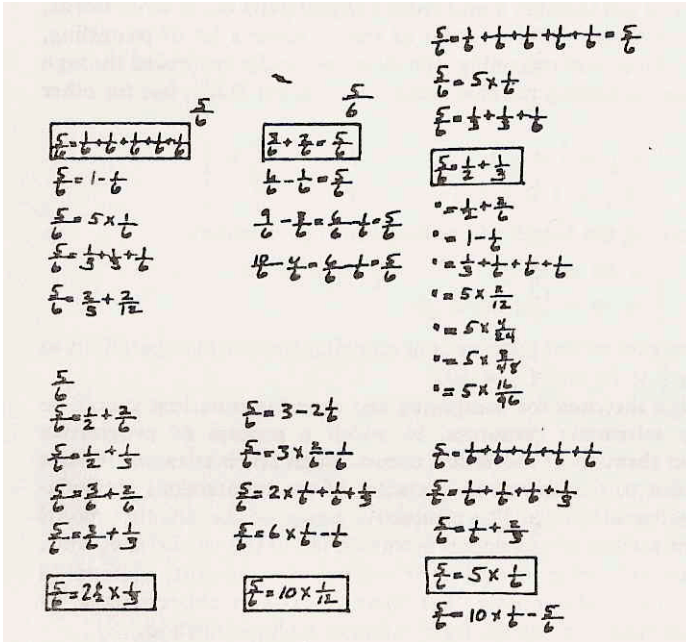


FIG. 12.2. Some "$\frac{5}{6}$ stories." From Streefland (1987).

Se van aplicando las propiedades y reglas de manera creciente para organizar el material matemático producido. Estas experiencias deberían proveer simultáneamente un acceso al álgebra. Una vez que se ha logrado el tercer nivel del sistema aritmético, esto servirá como una de las fuentes concretas del primer nivel para introducir álgebra, (Streefland, 1991; Treffers, 1987).

EJEMPLO DE UN PROCESO DE APRENDIZAJE PERSONAL EN UN PLAZO LARGO

Condujimos una experiencia de enseñanza por un período de más de 2 años y observamos y apuntamos los registros de aprendizaje individual, utilizando los materiales descriptos previamente. Para esclarecer el proceso de aprendizaje de un individuo, describimos el pensamiento de Frans en detalle usando los siguientes indicadores:

a) Adquisición de conceptos (fracción y razón) y errores por factores de distracción vinculados a N (números naturales).
b) El progreso en la esquematización
c) Un uso flexible de los modelos y la aplicación de diagramas (acompañados por cálculos flexibles)
d) La habilidad para imaginar o contextualizar problemas simbolizados formalmente.
e) Las construcciones individuales y producciones en un nivel simbólico.

Estos indicadores, en conjunto, caracterizan tanto el aspecto de matematización horizontal (ir de los problemas reales hacia la matemática y viceversa) como el de matematización vertical (la realización de progresos dentro de la matemática misma).

Frans era un alumno de habilidades promedio en un grupo de 19 alumnos por debajo del nivel promedio. Era un chico bastante inseguro a quien no le preocupaba ser notado de una manera positiva siempre que no fuera muy extrema. En general, Frans interactuaba en el grupo muy bien. Participaba activamente en la búsqueda de soluciones y también hacía sugerencias sin que le pidieran. Sus contribuciones al grupo tuvieron que ver principalmente con la matematización vertical.

Las contribuciones de Frans en las secciones interactivas del proceso educacional eran de mayor calidad que su trabajo escrito. Una tarea escrita de cualquier extensión resultaba muy difícil para él; el trabajo escrito parecía hacerlo sentir inseguro. Muchas de las notaciones que tienen que ver con las convenciones eran demasiado para él y le llevó más de un año dejar de tropezar con estos asuntos. Durante las entrevistas, su memoria de trabajo parecía recargarse fácilmente.

Había una rivalidad amistosa entre Frans y Stef (su compañera más brillante); Frans una vez quitó el impulso que tenía Stef para trabajar en su oferta mayor como comerciantes para la razón "más grande" para ¼. Esto continuó hasta llegar a:

Stef: De cien mil a cuatrocientos mil
Frans: De doscientos mil a ochocientos mil
Stef: De un millón a cuatro millones
Frans: De un infinito a cuatro infinitos

Como corolario de sus años en nuestra escuela jugó el papel de un turista norteamericano en la escuela de música. Su conciencia de sí mismo sobrevivió por completo en esta ocasión y él y su compañero de escena continuaron como "Frankie va a Hollywood."

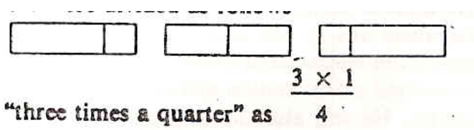
En la sección aritmética del examen nacional CITO para escuelas primarias, Frans resolvió 24 de los 27 problemas de fracciones y razones correctamente. En las secciones de lengua, aritmética y procesamiento de información, sus resultados percentiles fueron de 43, 75 y 77 respectivamente. Fue a estudiar a una escuela de comprensión para la educación vocacional elemental.

Cuestione Específicas en el Proceso de Aprendizaje Individual

Adquisición de conceptos y factores de distracción relacionados a los números naturales N Los primeros pasos en el camino para llegar al pensamiento abstracto fueron bastante problemáticos para Frans, particularmente en lo que concernía a la formación de modelos. Los dibujos de Frans mostraban características realistas: bastones de caramelo en lugar de líneas numéricas, manzanas con tallos, y mitades de manzanas con semillas en lugar de círculos, rectángulos y cuadrados. Luego de unos pocos meses, él podía asociar la cuarta parte con un cuarto. Aparentemente, el tenía momentos de una concientización repentina. El partir las fracciones por la mitad repetidamente era sustentado en su terminología por "cuartos" y "medios cuartos", y así sucesivamente.

Sí encontró, de todas maneras, una gran dificultad para la representación simbólica de los resultados de la división. Él no tenía fe en las convenciones en estos asuntos. Esto es ilustrado por los siguientes ejemplos:

Tres bastones de caramelo divididos de la siguiente manera en cuatro partes:



Frans expresó "tres veces un cuarto" como $\frac{3 \text{ x } 1}{4}$

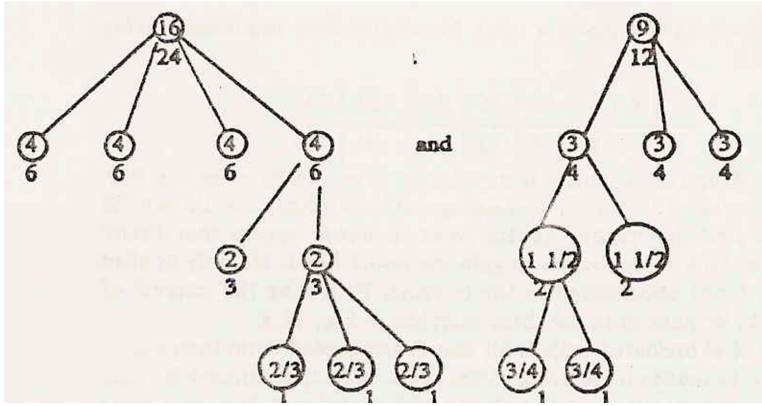
Una semana después, él describió 1/8 como "mitadeuncuarto." Un mes después era claro que era bastante adepto a tratar con los intercambios mutuos posibles entre mitades, cuartos y octavos. Diez semanas después, él escribió "3 y 1/8" por 1/8 + 1/4 queriendo decir 3/8, y "5 y 1/8" por 1/2 + 1/8 queriendo decir 5/8. Más de un año después, todavía estaba escribiendo 10 1/3 cuando quería decir 10/3, aún cuando sabía muy bien la diferencia de valor de las dos notaciones. Por otra parte, en situaciones verbales interactivas, era capaz de comprender y generalizar acerca de toda clase de relaciones. Las situaciones de distribución como ③ 4 y el resultado 3/4 pronto formaron una sólida unidad para él, en la cual ③ 4 representaba un sistema completo de mesas. A menudo salía con maneras originales de razonamiento para declarar la equivalencia de fracciones; por ejemplo “6/8 = 3/4 porque 1 entero = 8/8, eso es 2/8 más que 6/8, 2/8 = 1/4 y 1 entero menos 1/4 = 3/4.”

Frans desarrolló ideas sólidas concernientes a las fracciones. El asunto crucial para él era la simbolización. Esto aparentemente era por su resistencia a los factores en relación con los números naturales N. Frans rara era vencido por esta clase de error en su trabajo escrito, pero ocasionalmente cometía algún error cuando era provocado en entrevistas. Luego reconocía el conflicto, o si no explicaba espontáneamente lo que había estado incorrecto en un primer lugar. En general llevaba a cabo correctamente la comparación de situaciones y sus decisiones acerca de sus equivalencias.

Frans era conciente de las diversas posibilidades para tomar una postura relativa acerca de las oarejas de cantidades y las consecuencias que éstas tenían para la representación simbólica. No se observó ningún razonamiento aditivo durante su proceso de aprendizaje.

Esquematización Progresiva. Se hizo evidente que Frans era uno de los mejores alumnos de la clase cuando se trataba de construir diagramas para los arreglos de mesas y sillas y las tablas de razones. No sólo era conciente del potencial para generar que tenían los diagramas de árbol para producir arreglos de mesa equivalentes, sino también era capaz de aplicar esta fuerza de manera económica encontrando abreviaturas. Estas abreviaciones fueron un factor dominante comenzando con la construcción inicial de diagramas para los arreglos de mesas y sillas.

Al comienzo tenían que ver con librarse de las ramas superfluas. Frans llevaba esto a cabo de un modo sistemático, aunque algunas veces el diagrama derecho era continuado y a veces el diagrama izquierdo lo era:



La división en más de dos ramas también fue aplicada sistemáticamente después de algunos meses. Aún cuando su primera elección en romper la razón era un poco torpe, Frans no evitaba las secuencias numérico-esquemáticas. Por ejemplo, para 30/24, él elegía dividir por 4, por 2 y por 3, dejando de lado las ramas excedentes. En consecuencia, él después tenía que partir por la mitad 7 y 1/2 y dividir 3 y 3/4 en tres partes, tarea que resolvió de manera exitosa.

Al principio, la construcción de diagramas para el arreglo de las mesas influyó su esquematización de la tabla de razones, o pareció así. A mitad de camino, el segundo año del proyecto, cuando esto proceso ya había comenzado, Frans construyó las siguientes tablas para 18 8 y 14 6, concernientes a cuan fuerte era el café:

18	36	72	90
8	16	32	40

14	28	42	56
6	12	18	24

Luego construyó una tabla nueva, esta vez partiendo por la mitad reiteradamente:

18	9	$4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
8	4	2	1

14	7	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$
6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

Él no sacó conclusiones con respecto a la fuerza del café. Parecía que estaba probando el potencial de esta tabla para luego usarla para sus propios propósitos como un método para la esquematización. En esta etapa el trabajo de Frans no era sistemático. Algunas veces las tablas resultaban tener una superproducción de datos, los que después procedía a ignorar cuando estaba resolviendo el problema que tenía entre manos. O evitaba las tablas y ponía los datos directamente en números pares que compartieran un denominador común. Una semana después de construir los ejemplos previos, Frans construyó la tabla siguiente para las situaciones de distribución partiendo por la mitad 1 y 1/3 como resultado:

1 1/3	4	8	12	16	32	128	256
1	3	6	9	12	24	96	192

La característica más sobresaliente es el cambio en la regularidad luego del quinto par. Él construyó tablas para comparar cuan fuerte era el café, pero ni las completó ni encontró los resultados. En este punto, parecía que la disposición analítica de Frans había comenzado a ganar en un nivel más elevado. Sólo aplicaba tablas que había abreviado hasta un extremo. Luego de otra semana, entregó los tres ejercicios de la figura 12.3

Esta clase de tabla abreviada es todo lo que Frans necesitó a partir de ese momento. En la prueba dada, no hizo uso de las tablas para nada. De hecho, aplicó el método del denominador menos común para comparar situaciones que requirieran el uso de un denominador común. Esto era, en resumen, una contribución considerable al proceso de esquematización del grupo, particularmente en lo referente a abreviar tablas de razones.

Uso Flexible de Modelos y sus Aplicaciones en Diagramas Acompañados de Cálculos Flexibles. Fue claro que Frans aprendió rápidamente a manejar los materiales de esquematización que habían sido producidos. Luego de un comienzo algo vacilante, esto fue particularmente cierto para la tabla de razones. Cuando construía diagramas para la distribución de mesas pronto empezó a buscar el enfoque más eficiente para los números involucrados.

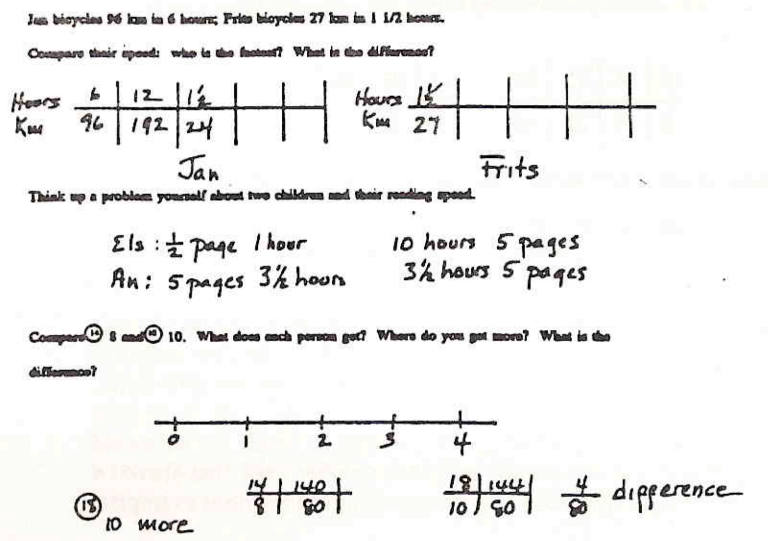


FIG. 12.3. Three exercises submitted by Frans.

Cuando estos ocasionalmente probaban ser algo problemáticos, su habilidad para tratar con los números (incluidas las fracciones) era por lo general suficiente para evitar quedarse estancado. Frans eligió la tabla de razones unas pocas veces espontáneamente como un método para la esquematización. Rara vez hizo uso de la aplicación flexible de los modelos visuales y sus visualizaciones al principio mostraron características realistas. Su trabajo algunas veces mostró esta característica al final del segundo año. En ese momento, el visualizó un problema de distribución teniendo que ver con botellas, dibujándolas. Él era también el único de la clase que continuaba dibujando figuras en forma de tiras o bastones en situaciones de distribución. Hasta el examen final no se pudo percibir ningún uso visual de modelos; allí, las barras de chocolate fueron representadas por círculos.

Frans parecía tener mayor habilidad para manejar modelos del tipo formal de modelos visuales, como la resta de fracciones disimilares usando la línea numérica y una unidad fácil de manejar, o la multiplicación de fracciones usando un rectángulo adecuado (barra de chocolate) como un modelo de apoyo. Por otra parte, mostró una marcada preferencia por los números, como lo indicó su disposición analítica.

Él probablemente era conciente de cómo manejar los modelos más que usarlos para apoyar sus operaciones. Esto fue verdadero en la línea numérica en particular. En la prueba final, por ejemplo, Frans, sí aplicó el rectángulo como un modelo de apoyo. Par determinar el largo de las secciones de la serpiente de Pasta dentífrica fracturada de Peter, Frans usó el dinero como modelo. En general, de todas maneras, él era mejor en la esquematización de los números que en la visualización de los modelos. Su inteligencia para el manejo de los pequeños números ciertamente contribuyó a esto.

La Habilidad para Construir Imágenes Mentales de Problemas Formales. Luego de unos pocos meses; Frans era capaz, con muy poco esfuerzo, de pensar problemas simbólicos para 2 y 1/2, 3 y 3/4 y así sucesivamente. Por ejemplo: 3 x 1 1/4 = 3 3/4. Él también podía pensar una historia que acompañara estos cálculos con pedazos acerca de la pasta dentífrica, pero esto no le resultaba para nada fácil. Tan pronto como se necesitaban más de tres palabras seguidas, sus poderes de verbalización fallaban. Sabía por experiencia que lo breve y bueno sería usualmente suficiente, como cuando 6 naranjas por 3 florines se comparaban con 8 por 6, su reacción al segundo grupo de naranjas era: “¡Qué molestia!”, expresado con disgusto.
Frans podía generalizar con rapidez y decía, “El doble,” cuando se lo confrontaba con un problema de cuántos chicos podrían ser alimentado con 7 panqueques y medio todos divididos por la mitad. El grupo tenía dificultades para encontrar una historia aplicable para 7 1/2 + 1/2 = 15, mientras que Frans simplemente lo daba vuelta y lo convertía en 7 1/2 + 15 = 1/2 y 2 x 7 1/2 = 15. Prefería, de todas maneras, dejar la historia del problema para sus compañeros. Ofrecía repetidamente esta clase de contribución. Es difícil decir si él visualizaba algo detrás de las sumas, ni tampoco aparentaba tener necesidad de esas visualizaciones. Frans resolvió 1/2 + 1/3 y la mesa ② 5 de la siguiente forma:

1/2 <1/2 + 1/3 < 1 y ② 5--> 2/5 < ½, entonces 2/5 < 1/2 + 1/3

Cuando estaba mediando el segundo año demostró, a su manera, que había superado el problema “de/veces”, lo que quiere decir que era capaz de traducir las descripciones de “una parte de” en situaciones de reparto equitativas a un lenguaje matemático con el signo de multiplicación. En retrospectiva, podemos decir que los símbolos eran las representaciones más adecuadas para Frans. Puede ser por este motivo que el permaneció algo incómodo por un tiempo, porque la simbolización era donde él también se chocaba con toda clase de convenciones existentes.

Las Construcciones Individuales y Producciones a un nivel simbólico. Una vez que encontró su camino en el laberinto de la notación, Frans se sintió como en casa en el nivel simbólico. Como se mencionó anteriormente, todavía estaba buscando principios o métodos para producir monografías de manera sistemática.

Luego de tres meses y medio, la producción libre de Frans se caracterizaba por un exceso de confianza y una cierta cantidad de caos. Lo intrigante de las contribuciones de Frans era que a través de su exceso de confianza, el excedía los límites de la aceptabilidad. Ese era el caso cuando no tomaba en cuanto los paréntesis mientras combinaba operaciones, y cuando cambiaba de manera inapropiada el singo =. Aparte de esto; su trabajo se caracterizaba por la aplicación de las cuatro operaciones, el uso de las mitades, cuartos y octavos, y la aplicación de equivalencias mutuas. Un ejemplo, en el que los paréntesis fueron pensados pero no anotado fue: 1/8 +1/8 +2/4 x 4 = 3. El diagrama monográfico de la figura 12.4 fue producido un mes después. Este trabajo revela que el registro monográfico de la división francesa, donde comenzó todo, ya no puede verse en la variedad de enfoques que Frans utilizaba. (dibujar figuras en forma de bastón era típico de Frans. Había sólo un alumno que continuaba haciendo esto).

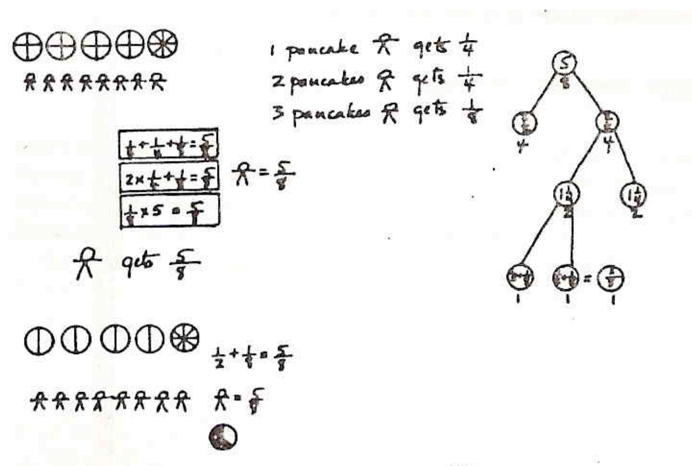
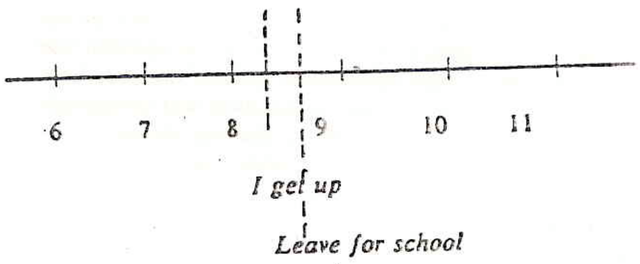


FIG. 12.4. Exploration of ⑤8.

Figura 12. 4 Exploración de ⑤ 8.

Al mes siguiente, comparó ⑤ 4 y ③ 4, aún más exhaustivamente que cuando había trabajado con ⑤ 8. Construyó un árbol sin podar para ⑤ 4, distribuido globalmente y por unidad, colocó el resultado de manera correcta en la recta numérica, y luego armó una monografía de orden comparable a otras, de este tipo, que ya había hecho. Durante las semanas siguientes, Frans armó una variedad de estas monografías. La aplicación eficiente del diagrama de arreglos de mesas y sillas para revelar la forma más simple de estas situaciones que involucraban números grandes, era característico de su trabajo. También era notable como manejaba las equivalencias: por ejemplo, para comparar 15 12 con 6 8, Frans aseveró que 15 12 = 10 8, entonces 15/12 es más que 6/8.

Un mes después Frans produjo un horario diario con una línea de tiempo y sumas apropiadas. Anotaba los eventos diarios en la línea y daba una explicación breve:



Para Frans era complicado escribir oraciones numéricas en símbolos; por ejemplo, él escribió 8 1/4 + 1/4 = 1/2 de 9 para su línea del tiempo para la mañana – levantarse a las ocho y cuarto y salir un cuarto de hora después – expresaba una manera imposible de traducir la hora: En holandés las ocho y media es llamada medio-nueve.

Cinco meses después Frans usaba la línea numérica para resolver un problema de unos chicos que dividían un bastón de caramelo de manera eficiente y no necesitaba otros apoyos. El material monográfico producido por este problema fue nuevamente característico de su trabajo. A su propio modo él buscó nuevamente las formas abreviadas más extremas, como fue evidente con su aplicación directa de seudónimos sin echar mano de notaciones intermedias, como 2 x 3/4 = 1 y 1/2 o a sus frecuentes formas abreviadas multiplicativas de oraciones numéricas aditivas.

Al mismo tiempo, un cierto tipo de caos fue reflejado en el trabajo de Frans. Antes de que una característica dada tuviera la oportunidad de ser elevada a un método para una producción más sistemática, Frans pasaba a otra cosa. Esto no tiene que ser visto necesariamente como contrapuesto a su disposición sistemática. Él parecía probar posibilidades, persiguiendo impulsivamente relaciones observadas espontáneamente antes de elegir un curso de acción más estable. Esto también se observó en su esquematización para la tabla de valores.

Cuatro meses más tarde, Frans comenzó una tabla de multiplicación para los semáforos que consistía de 2/3 de minuto verde, 1/2 minuto amarillo y 3/4 de minito rojo. Calculó correctamente hasta cuatro veces 1 y 11/12 y consistentemente remplazó 12/12 por un número entero. El expandió los productos de 60 como 1/2 x 60, 1/3 x 60, usando relaciones bastante obvias, como 1/10 x 60, 1/20 x 60, y 1/60 x 60.

Un mes después, en una producción momográfica más sistemática, los logros de Frans eran inconsistentes, algunas veces monótonos, algunas veces variados caóticamente. Las monografías monótonas se caracterizaban, de hecho, por ser extremadamente sistemáticas – por ejemplo, en la aplicación continua de la misma propiedad o regla. Su trabajo mostraba una variación en las operaciones principales, con la excepción de la división, una gran cantidad de aplicación de seudónimos (durante las clases, a menudo hacía sugerencias de este tipo), y la aplicación de las propiedades, como 3/4 = 1 – 1/4 = 2 – 1 y 1/4.

Era capaz, sin mayores problemas, de desarrollar un método personal para la multiplicación; y hacía lo mismo, hasta cierto punto, para la suma y la resta. Su tendencia a trabajar con equivalencias fuera de los límites del proceso de instrucción se podía ver en lo concerniente a la resta. Cuando aplicaba la línea numérica a la resta, no determinaba su enfoque eligiendo una unidad conveniente, sino por lo que los denominadores le sugerían.

Esta atracción hacia la cualidad especial de los números también se expresaba en la multiplicación. En 2 y 1/2 x 4/5, él razonaba diciendo que “1/5 x 2 y 1/2 = 1/2, y uno hace eso 4 veces.” Luego hacía 2 y 1/2 x 1 y 1/4 de la misma manera. Cuando multiplicaba, Frans prefería usar la barra de chocolate rectangular como modelo, más que un precio conveniente. Los métodos que él aplicaba eran siempre de comprensión, no dictados por reglas. Era de esta manera que aplicaba la medida de segmentos para la operación de división. Al principio, estaba asombrado cuando el resultado probaba ser más grande que el dividendo en los problemas como 2 1/2 : 1/2 , que rompían el estereotipo de “dividir hace las cosas más pequeñas.”

Al cabo de 2 años, era menos capaz de operar formalmente con fracciones de l queo su proceso de aprendizaje prometía. En la prueba de comparación, dejó las sumas de multiplicación y división en blanco.

Resumen

Frans al principio encontró los caminos de la matematización horizontal y vertical llenos de baches y promontorios. La construcción de modelos y la adquisición de un sistema de notación para las fracciones presentaron obstáculos considerables en la matematización horizontal. Sin el apoyo necesario, sólo podía librarse de la realidad con un gran esfuerzo, aún cuando no sucumbía a menudo a las tentaciones de los factores de distracción vinculados a N, y luego sólo cuando lo convencían que debía evitar estos errores durante las entrevistas.

Por otra parte, la comparación de situaciones y razonamientos con las razones fueron bastante fáciles para él. En este aspecto Frans se distanciaba sin mayor esfuerzo de la realidad y rápidamente se sentía cómodo en el segundo nivel, como se mostró en la manera en que manejaba las equivalencias. El problema para Frans era la dualidad de su disposición analítica (por medio de la cual pasaba rápidamente a un segundo nivel) y su dificultad en tomarle la mano a un sistema de notación para las fracciones. Esto lo confundía continuamente, como también lo hacía su tendencia a perderse en sus esfuerzos mentales.

Su trabajo al comienzo tenía algo de impulsivo, y sus contribuciones reiteradas para una matematización vertical tenían la naturaleza de incidentes que no formaban parte de un sistema. De todas maneras, él sí logró mantener un curso estable en la esquematización para marchar hacia el tercer nivel. En otras palabras, luego de estar por un tiempo en el límite entre los dos primeros niveles, él arrancó con una velocidad considerable. En el tercer nivel, la fuerza de Frans yacía mayormente en hacer construcciones pequeñas, locales, como las variaciones en un problema. Su aplicación de modelos era sólo incidental. Su conocimiento y una comprensión de los números ofrecían suficientes maneras de manejar los obstáculos numéricos durante la esquematización. Él no aparentaba tener mucha necesidad de ilustraciones concretas, y prefería dejar la concreción verbal de los problemas formulados formalmente a otros. Era como si la realidad como una fuente de aplicación, por una parte, y el trabajo simbólico en el segundo y tercer nivel, por otra, hubiesen sido dos mundos separados – por lo menos en lo concerniente a las fracciones.

Éste no fue el caso en lo que respecta a razones como un concepto de operativo) el cual pudo manejar con mayor facilidad. El proceso de aprendizaje de Frans no estaba todavía completado al cabo de estos dos años. Esto es así tanto como para la formalización del sistema, que eventualmente lograría, como para la conexión de este sistema con la realidad.

Los Factores de Distracción de los Números Naturales y el Proceso de Aprendizaje.

Nosotros también focalizamos en el progreso sostenido o el estancamiento, en el aprendizaje a largo plazo tomando en cuenta todas las construcciones creadas por los alumnos. Con respecto al estancamiento o progreso, el rendirse u oponer resistencia a los factores de distracción N, probó ser una cuestión importante. (Para una exposición más detallada, ver Streefland, 1991.) Este indicador es un medio poderoso, aunque también indirecto de demostrar cuan firme es un proceso de aprendizaje y debería ser encastrado en lo concreto, primer nivel, dondequiera que haya una cuestión de falla. El abandonar prematuramente las fuentes concretas e ir a una representación exclusivamente simbólica resultó en errores con respecto a los factores de distracción N. En la raíz de este problema yace la tendencia a asociar lo que uno está aprendiendo en los números naturales y la atracción poderosa ejercida por ellos. Errores similares han sido reportados ampliamente en la literatura de investigación (Hart, 1985; Haseman, 1986a, 1986b).

En procesos de aprendizaje individuales a largo plazo se distinguieron cinco nivele de resistencia a los factores de distracción N

1. *Ausencia de Conflicto Cognitivo (-CC).* En los casos en que para un mismo problema se han encontrado diferentes resultados, el alumno no tiene conflictos cognitivos. Esto se debe al hecho de que las soluciones encontradas en diferentes niveles son consideradas como dependientes del método. Por ejemplo: Un alumno decide que $1/2 + 1/2 = 2/4$, y luego, por medio de la distribución, llega a $1/2 + 1/2 = 1$. Ambos resultados son aceptados como correctos debido a los diferentes métodos involucrados.
2. *El Conflicto Tiene Lugar (+CC).* El alumno entra en un conflicto cognitivo cuando se confronta con el dilema descripto en el nivel 1. La solución de los factores de distracción N es refutada. Las soluciones son consideradas como independientes del método.
3. *El Rechazo Espontáneo a los* factores de distracción N *(RS).* El alumno se inclina a hacer un error de factores de distracción N, pero entra en conflicto consigo mismo y espontáneamente refuta este error. Esa refutación puede tener lugar simplemente en la forma de rechazo al error cometido; el rechazo también puede ser sustentado por argumentación y algunas veces también es seguido por la solución correcta.
4. *Libre de* factores de distracción N, (LD). El trabajo escrito está libre de factores de distracción N.
5. *Resistencia a* factores de distracción N, (LD). El alumno es, bajo cualquier circunstancia, resistente a factores de distracción N,

Representación gráfica. Sobre la base de los niveles mencionados anteriormente, es posible ilustrar gráficamente el proceso de aprendizaje de cada alumno. Esta representación gráfica fue inspirada en parte por el trabajo de Teule-Sensacq y Vinrich (1982). La capacidad de Frans para captar el objeto mental de las fracciones se representa gráficamente juntamente con la de uno de sus compañeros en la figura 12:5. El gráfico del grupo de alumnos como un total es representado en la figura 12.6.

El gráfico del grupo en conjunto indica que estamos tratando con un fenómeno de obstinación, a pesar del hecho que hubo intentos de contrarrestarlo desde el mismo comienzo de la experiencia de enseñanza. Se puede distinguir tres períodos durante el proceso de instrucción. Inicialmente, cuando las actividades estaban estrechamente ligadas a la materia concreta, los factores de distracción N no eran particularmente conspicuos, excepto en los procesos de aprendizaje de unos pocos chicos para quienes, a la larga, el fenómeno demostraba ser particularmente obstinado.

Más tarde, virtualmente todo el grupo pareció estar en una etapa crítica por un lapso considerable de tiempo cuando los desempeños tendían a caer a niveles menores. Hay dos explicaciones para esto: (a) el esfuerzo necesario para despegarse del nivel concreto, y (b) la confrontación interesante con la comparación de problemas como una fuente innegable de razonamiento aditivo incorrecto con razones.

El relapso al final del proyecto, luego de un período de estabilidad considerable en la mayoría de los procesos de aprendizaje de los alumnos, puede ser explicado por la búsqueda de reglas explícitas para calcular con fracciones en el contexto de un tema especialmente diseñado, llamado La Tierra de Juntos. Aquí todos los números todavía reflejaban un reparto equitativo. El número 2, por ejemplo, aparecía en 4/2 expresando que 4 golosinas eran compartidas por 2 personas, o como 6/3, y así sucesivamente. La cuestión más importante que fue abordada fue ¿Qué procedimiento tendrían que aplicar los alumnos en la Tierra de Juntos cuando hicieran cálculos? (Ver Streefland, 1991.) Estos procedimientos, dentro del contexto de la Tierra de Juntos, no habían cristalizado todavía hasta convertirse en métodos generales. Otra causa para el relapso fue la búsqueda de una solución en lo casos en los cuales los obstáculos numéricos eran

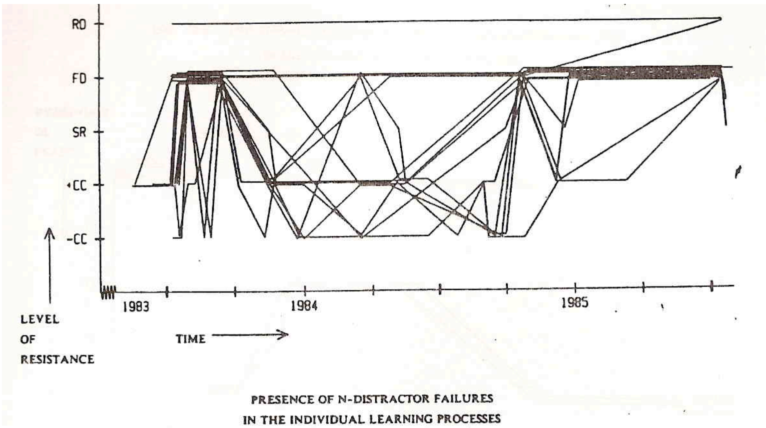


FIG. 12.6. Graphs of each student's level of resistance to N-distractors.

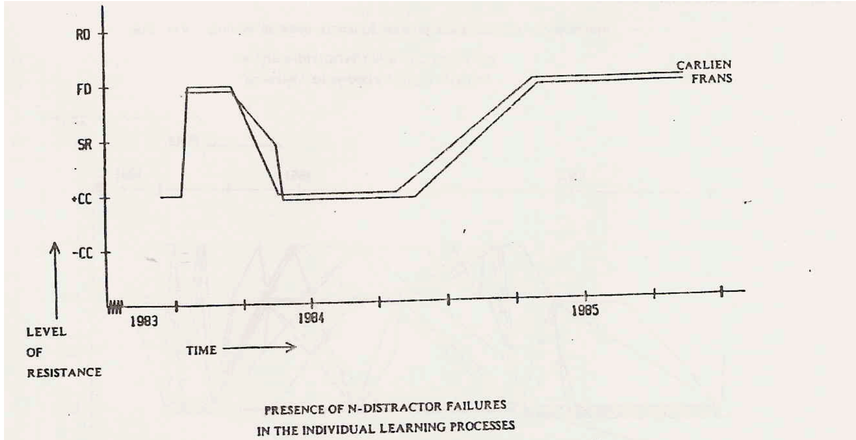


FIG. 12.5. Two students' levels of resistance to N-distractors over time.

Demasiado complejos y el contacto con la comprensión adquirida se rompía. Como puede ser visto en el gráfico final, había una gran diferenciación en el grupo con respecto a los factores de distracción N.

CONCLUSIONES

Primero y de fundamental importancia, sentimos que se debería dar poca importancia a los cálculos que involucran fracciones como tales. Las fracciones mismas no son el punto. La intención de la interrelación entre las fracciones y razones tuvo lugar primeramente para enfatizar la matematización de conexiones y relaciones. En otras palabras, el punto de la investigación fue el determinar cómo los alumnos aprenden a asimilar situaciones matemáticamente en las que las cantidades son puestas juntas de manera funcional de un modo u otro.

En la matematización de esas relaciones, los alumnos aprenden a estandarizar de tal manera que se logra igualar un componente, por lo cual la comparación y el orden entonces pueden ser redondeados determinando la diferencia relativa o desarrollando la división demandada. Si la educación matemática aborda las fracciones en la manera sugerida, en el futuro; la siguiente aseveración de Goethe perderá su significado para las generaciones de alumnos que vendrán:

> Recuerden de una vez y para siempre
> El aforismo más importante es:
> Los números enteros no contendrán un secreto para ustedes,
> Pero las fracciones uno grande,¡seguro que lo harán!
> (traducido del alemán por German Leen Streefland)

REFERENCIAS

Behr, M. J., Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Conceptos de los números racionales. En R. Lesh y M. Landau (eds.), *Adquisición de conceptos y procesos matemáticos (pag. 92-144). Nueva York: Académico.*

Behr, M. J. Post, T. R., y Watchsmuth, 1. (marzo de 1982) *La adquisición de los niños del concepto de equivalencia y orden para los números racionales* (Informe de un experimento clínico de enseñanza). Trabajo presentado en la reunión anual de 1982 de la Asociación Americana de Investigación Educacional, Nueva York.

Davydov, V. V. y Tsvetkovic, Z. (1969). Traducción interna del ruso al holandés de "Concerniente a las fuentes concretas del concepto de fracción" Moscú: Prosveshchenle Akadem'i'a Pedagogicheskikh Nauk, SSSR InstitutePsikhologii.

Desjardin, M., y J. C. (1974). La actividad matemática en la enseñanza de las fracciones. Les presses de l'université du Quebec, Saint-Foy.

Freudenthal, H. (1983). *La fenomenología didáctica las estructuras matemáticas.* Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel.

Gravemeijer, N,Van den Heuvel, M., y Streefland, L. (1990). *Los contextos, producciones libres, pruebas y geometría en la educación de la matemática realista.* Utrecht, Países Bajos: Grupo de Investigación, OW y OC.

Hart, K. M. (1985). Untersuchungen über Schülerfehler (Investigaciones acerca de los errores de los alumnos). *Der Mathematikunterricht* 31(6), 26-37

Hasemann. K.(1986a). Bruchvorstellung, und die addition von Bruchzahlen (La imagen conceptual de las fracciones y su suma). *Mathematik Lehren* 16, 16-19.

Aceman, K. (1986b). *Mathematische Lernprozesse. Analysen mit Kognitionstheoretischen Modellen* (Análisis por medio de los modelos de la ciencia cognitiva). Wiessbaden, Germany: Braunschweig.

Milton, P. (1983). ¿Todavía necesitamos enseñar las fracciones? In M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak, y M. Suydam (Eds), *Procedimientos del Cuarto Congreso Internacional de la Educación Matemática* (pag. 37-41). Boston. Birkhauser.

Kieren, T. E. (1976). Acerca de la base matemática, cognitiva y de instrucción de los números racionales. En R. Lesh (Ed.). *El número y la medida* (pag. 101-1049. Columbus: Universidad del estado de Ohio, ERIC, SMEAC.

Kilpatrick, J (1985). La reflexión y la recurrencia. *Estudios Educacionales en Matemática* 16(1), 1-27.

Noelting, G. (1980a). El desarrollo del razonamiento proporcional y el concepto de razón: Parte 1. Diferenciación de las etapas. *Estudios Educacionale en Matemática,* 11(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). El desarrollo del razonamiento proporcional y el concepto de razón: Part 2. La estructura del problema en etapas sucesivas: Estrategias de solución de problemas y el mecanismo de la reestructuración adaptativa. *Estudios Educacionales en Matemáticas,* 11(3), 331-363.

Piaget, J. Inhelder, B., y Szeminska, A. (1948). *El concepto de los niños de la geometría.* Londres: Routledge y Kegan Paul.

Piaget, J. Inhelder, B., y Szeminska, A. (1960). *La concepción de los niños de la geometría* (E. A. Lunzer, Trans.). Nueva Cork: Básico.

Streefland, L. (1978). Algunos resultados de la observación concerniente la constitución mental del concepto de fracción. *Estudios Educacionales de la Matemática* 9 (1), 51-73.

Streefland, L. (1982). Restando fracciones de diferente denominador. *Estudios Educacionales de la Matemática.* 13(3), 233-255.

Streefland, L. (1984). *Como enseñar las fracciones para que sean útiles.* Utrecht, Países Bajos: OW y OC.

Streefland, L. (1986). Un estudio racional de la educación de la matemática realista como una fuente teórica para la psicología: Fracciones como un paradigma. *Periódico Europeo de la Psicología de la Educación.* 1(2), 67-83.

Streefland, L. (1987). Producción libre de monografías de fracciones. En J. C. Bergeron, N Hercovics, y C. Kieren (Eds.), *La Psicología de la Educación Matemática*, PME X1 (Vol. 1, pag. 405-410. Montreal: PME.

Streefland, L. (1991). *Las fracciones en la educación de la matemática realista. Un paradigma de la investigación del desarrollo:* Dordrecht, Países Bajos: Editores académicos Kluwer.

Streefland, L. (1992). Estrategias de pensamiento en la instrucción matemática:¿Cómo es posible hacer tests? En R. A. Lesh y S. J. Lamon (Eds), *Evaluación del desempeño auténtico en la matemática escolar.* Washington, DC: Asociación Americana para el Avance de la Ciencia

Teule-Sensacq, P., y Vinrich, G. (1982) Resolution de problemes de division elementaire dans deux types de situation didactiques (La solución de problemas de división en un nivel elemental en dos tipos de situaciones didácticas). *Estudios educacionales de la matemática* 13(2). 177-203.

Treffers, A. (1987). *Tres dimensiones. Un modelo de objetivos y la teoría de la descripción en la Instrucción Matemática – El proyecto Wiskobas.* Dordrecht, Países Bajos: D. Reídle.

Treffers, A. y Gofffree, F. (1985). El análisis racional de la educación matemática realista. El prorama Wiskobas. En L. Streefland (Ed), *Los procedimientos de la novena conferencia internacional de la educación matemática* (Vol.2, pag. 97-123). Noordwijkerhout, Países Bajos: OW y WC, Universidad del Estado de Utrecht.

Usiskin, A. P. (1979). El futuro de las fracciones.