Educación matemática en los Países Bajos:

UN RECORRIDO GUIADO*

Marja van den Heuvel-Panhuizen[1]

El artículo que presentamos a continuación forma parte del proyecto de *Correo del Maestro* de poner al alcance de los profesores obras de actualización en temas de enseñanza de las matemáticas. Agradecemos a la doctora Marja van den Heuvel-Panhuizen, autora del presente ensayo, su entusiasmo por colaborar y el permitirnos hacer llegar su trabajo a lectores de habla hispana. Si bien el artículo se ocupa de la educación matemática en los Países Bajos, éste es sumamente útil para reflexionar sobre cómo aprenden matemáticas los niños, sobre cómo éstas deberían enseñarse, y sobre lo que sucede en ese ámbito en nuestro sistema educativo.

1 Introducción

Este artículo se ocupa de la educación matemática en los Países Bajos, y ofrece un recorrido guiado por los aspectos principales del sistema holandés de educación en esta disciplina. El título del artículo se refiere, asimismo, a los aspectos de orientación de la educación matemática, al papel del profesor y al del currículo. El recorrido se enfocará en la enseñanza del número en la escuela primaria. Las dos preguntas principales de las que nos ocuparemos son:

1. ¿Cómo se enseña aritmética en la escuela primaria en los Países Bajos?
2. ¿Qué contiene el currículo holandés de aritmética?

Hace alrededor de quince años, la primera pregunta fue investigada también en un estudio llamado *Cómo hacen aritmética los holandeses*[2] (Van den Heuvel-Panhuizen y Goffree, 1986). En comparación con el enfoque de la investigación

* Traducido del inglés por Héctor Escalona en colaboración con *Correo del Maestro*.

[1] Referencia bibliográfica: Marja van den Heuvel-Panhuizen, *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Instituto Freudenthal, CD-ROM para ICME9, Universidad de Utrecht, Utrecht, 2000.
Una primera versión de este artículo se presentó en la Conferencia de Investigación sobre "Enseñanza de la aritmética en Inglaterra y los Países Bajos" (Homerton College, Universidad de Cambridge, 26-27 de marzo de 1999). Una versión más breve de este artículo ha sido publicada en Anghileri (2001); *véase* Van den Heuvel-Panhuizen (2001).

[2] En holandés el título es *Zo rekent Nederland*.

www.o2-photo.com

Universidad de Utrecht, Países Bajos.

educativa que prevalecía en ese tiempo, éste fue un estudio bastante poco convencional. Se pidió a los profesores describir cómo enseñaban matemáticas en un día determinado, y sus informes por escrito tuvieron formato libre. Los profesores podían ocuparse de lo que fuera que les pareciese importante en relación con la enseñanza de las matemáticas impartida en ese día. Cada profesor era libre, además, para elegir el tema de las lecciones de matemáticas.[3] Se analizaron en total 160 informes. Los trabajos de los profesores aportaron una visión exhaustiva de la práctica en el aula. También la manera de exponer las conclusiones de la investigación fue poco convencional: se presentaron los resultados mediante estampas de aula. Se utilizaron ejemplos tomados de los informes de los profesores para ofrecer una imagen de la enseñanza de las matemáticas en la práctica. Además, se incluyeron notas sobre las conclusiones de la investigación en los márgenes de cada página. Se hicieron comentarios y se dieron explicaciones y opciones respecto a lo sucedido en las aulas. Las notas iban encaminadas a estimular a los lectores a reflexionar sobre su propia enseñanza y sobre la educación matemática en general.

El panorama holandés de la educación matemática ha cambiado significativamente de quince años a la fecha,[4] y las conclusiones de ese estudio han dejado de ser válidas. No obstante, hay motivos sólidos para volver a sacarlo a la

[3] Desde luego, los profesores se muestran del modo más favorable. Esto, sin embargo, está habitualmente prohibido en la investigación educativa. En general, una muestra de las actividades en el aula debe ser representativa; pero, ¿se puede conseguir esto en algún momento? En vez de esforzarse por lograr esto, el estudio reflejó con precisión lo que es posible alcanzar en la práctica en el aula desde la perspectiva de los profesores. Al adoptar este punto de vista, la investigación mostró dónde podrían comenzar las posibles mejoras.

[4] En comparación con el presente, hace quince años se hacía más hincapié en las conexiones con la realidad. En general, se buscaba más la matematización horizontal que la matematización vertical.

luz. En primer lugar, fue una investigación eficaz que se pudo llevar a cabo con facilidad y generó información práctica útil. Los estudios de este tipo ofrecen una buena perspectiva de lo que ocurre en las aulas. En segundo lugar, los informes anotados de los profesores ayudan en el proceso de reforma y en la implantación de un sistema nuevo. Incitan a la reflexión y el análisis sobre la educación desde el punto de vista tanto práctico como teórico.

El motivo principal para referirnos a este estudio, no obstante, es la *advertencia* que aportó. El análisis de los datos mostró una amplia diversidad en las prácticas de aula. Además, puso también al descubierto una discrepancia entre las ideas respecto a los métodos de enseñanza en el papel –la teoría de la enseñanza, por así decirlo– y lo que ocurría en el aula, o al menos lo que se decía que ocurría en el aula.[5] Se debe tener en cuenta estos hechos durante el recorrido guiado, que no va a llevar a los lectores a las aulas o a proporcionarles una muestra de la práctica holandesa en el aula, sino más bien a presentarles el marco teórico de la enseñanza de las matemáticas y las actividades didácticas acordes con estas ideas.

Desde luego, este recorrido guiado no puede ofrecer una visión exhaustiva del sistema holandés de educación matemática. Éste es demasiado complejo, y además –y esto podría sorprender a más de uno– la dificultad reside en que no existe un sistema holandés unificado. En su lugar, hay ciertas ideas comunes acerca del qué y el cómo básicos de la enseñanza de las matemáticas. Estas ideas han sido perfeccionadas a lo largo de los últimos treinta años, y la acumulación y repetida revisión de estas ideas ha dado como resultado lo que hoy se conoce como *Educación Matemática Realista* (EMR). Durante este periodo se ha hecho hincapié en diferentes aspectos[6] del marco teórico que sirve de guía para el trabajo holandés de investigación teórica y aplicada en el campo de la educación matemática.[7] Junto con esta diversidad, el marco teórico mismo está sujeto a un proceso constante de renovación. Inherente a la EMR, con su idea básica de las matemáticas como actividad humana, está el concepto de que la EMR nunca podrá ser considerada una teoría fija o acabada de la educación matemática. La EMR se considera una *obra en marcha* (Van den Heuvel-Panhuizen, 1998). El acento en diferentes aspectos es el motor de este desarrollo continuo.

---

[5] El estudio MORE también puso de manifiesto esta discrepancia (*véase* Gravemeijer, Van den Heuvel-Panhuizen, Van Donselaar, Ruesink, Streefland, Vermeulen, Te Woerd y Van der Ploeg, 1993).

[6] Una diferencia en cuanto a énfasis es, por ejemplo, que algunos representantes de la EMR hacen más hincapié en el aprendizaje constructivo y otros insisten más en el punto de vista de la enseñanza reconstructiva.

[7] Para conocer más sobre la investigación teórica y aplicada en relación con la EMR, *véase* el trabajo de Koeno Gravemeijer presentado en esta conferencia.

Además de estas actividades nacionales, también se aprendió mucho de lo que sucedía en el exterior. La EMR no es una innovación aislada, y tiene mucho en común con otros movimientos de reforma en matemáticas. Esto significa que en la EMR el lector podrá reconocer similitudes con sus propias ideas sobre cómo enseñar y aprender matemáticas. Puede haber también ciertas diferencias. Insistimos en que vale la pena reflexionar sobre ellas para buscar pistas sobre cómo mejorar más en el qué y el cómo de la educación matemática.

2 EMR: el sistema holandés de educación matemática

Historia y filosofía básica

El desarrollo de lo que hoy se conoce como EMR inició alrededor de 1970. Los cimientos fueron colocados por Freudenthal y sus colegas del antiguo IOWO, el predecesor más remoto del Instituto Freudenthal. El impulso actual en pro del movimiento de reforma fue el comienzo del proyecto Wiskobas, puesto en marcha por Wijdeveld y Goffree. El primer mérito del proyecto consistió en que la educación matemática holandesa no fue afectada por el movimiento de la Matemática Moderna (*New Math*). La forma actual de la EMR ha sido determinada, en su mayor parte, por el punto de vista de Freudenthal (1977) respecto a las matemáticas. Freudenthal sentía que las matemáticas deben tener conexión con la realidad, mantenerse apegadas a la experiencia de los niños y ser pertinentes a la sociedad para que tengan valor humano. En vez de ver las matemáticas como una asignatura por transmitir, Freudenthal insistió en la idea de las matemáticas como actividad humana. Las clases de matemáticas deben dar a los estudiantes la oportunidad *guiada* de *re-inventar* las matemáticas haciéndolas. Esto significa que, en la educación matemática, el foco de atención no debe ser las matemáticas como un sistema cerrado, sino la actividad, el proceso de matematización (Freudenthal, 1968).

Más tarde, Treffers (1978, 1987) formuló explícitamente la idea de dos tipos de matematización en un contexto educativo: distinguió entre la matematización *horizontal* y la *vertical*. En términos generales, se puede entender estos dos tipos como sigue: en la matematización horizontal los estudiantes crean herramientas matemáticas que les ayudan a organizar y resolver un problema planteado en una situación de la vida real. La matematización vertical es el proceso de reorganización dentro del sistema matemático mismo; por ejemplo: hallar atajos y descubrir conexiones entre conceptos y estrategias, y después aplicar estos descubrimientos. Así pues, la matematización horizontal implica pasar del mundo de la vida al mundo de los símbolos, en tanto que la matematización vertical significa moverse dentro del mundo de los símbolos (*véase* también

Freudenthal, 1991). Aunque en esta distinción no parece haber ninguna ambigüedad, Freudenthal afirma que ello no significa que la diferencia entre estos dos mundos esté perfectamente definida. También insistió en que estas dos formas de matematización son de igual valor. Además, se debe tener en mente que la matematización puede tener lugar en diferentes niveles de comprensión.

Mala interpretación de realista

Pese a esta clara afirmación respecto a la matematización horizontal y la vertical, la EMR llegó a conocerse como "educación matemática del mundo real". Esto se dio especialmente fuera de los Países Bajos, pero hubo la misma interpretación dentro de ellos. Hay que aceptar, entonces, que el nombre de *Educación Matemática Realista* origina cierta confusión a este respecto.

Sin embargo, el motivo por el que se llamó *realista* a la reforma holandesa de la educación matemática no es sólo por su conexión con el mundo real, sino que guarda relación con la insistencia de la EMR en ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos pueden imaginar. La traducción holandesa de *imaginar* es "*zich* REALISE*ren*". Esta insistencia en hacer que algo sea real en la propia mente dio a la EMR su nombre. En cuanto a los problemas que se presentan a los estudiantes, esto significa que el contexto puede provenir del mundo real, pero ello no es siempre necesario. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas, o incluso el mundo formal de las matemáticas, aportan contextos idóneos para un problema en tanto éstos sean reales en la mente del estudiante.

3 Cómo intentan los holandeses enseñar aritmética en la escuela primaria

La EMR refleja cierto punto de vista sobre las matemáticas como asignatura, sobre cómo aprenden matemáticas los niños y sobre cómo se deberían enseñar las matemáticas (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Es posible caracterizar estos puntos de vista en términos de los seis principios siguientes.[8] Algunos de ellos tienen su origen en el punto de vista del aprendizaje y otros están más estrechamente ligados con la perspectiva de la enseñanza. La lista que sigue es una mezcla de principios, donde cada uno refleja una parte de la identidad de la EMR.

[8] Esta lista de principios es una versión adaptada de los cinco dogmas del marco para la teoría de instrucción de la EMR que distinguió Treffers (1987): "exploración fenomenológica por medio de contextos", "tender puentes con instrumentos verticales", "construcciones y producciones propias de los alumnos", "instrucción interactiva" y "entrelazamiento de líneas de aprendizaje". Los primeros tres principios descritos en esta sección tienen consecuencias importantes para la evaluación de la EMR (*véase* Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

1. *Principio de actividad*

Es claro que la idea de matematización se refiere al concepto de las matemáticas como una actividad que, según Freudenthal (1971, 1973), se aprende mejor haciendo (*véase* también Treffers, 1978, 1987). Los estudiantes, en vez de ser receptores de matemáticas ya hechas, son tratados como participantes activos en el proceso educativo, en el cual desarrollan toda clase de herramientas y discernimientos matemáticos por sí mismos. Según Freudenthal (1973), utilizar currículos estructurados científicamente, donde los estudiantes se enfrentan a las matemáticas ya hechas, es una "inversión antididáctica". Se basa en la falsa suposición de que los resultados del razonamiento matemático, colocados en un marco temático, pueden ser transferidos de manera directa a los estudiantes.

El principio de actividad significa que los estudiantes se enfrentan a situaciones problema en las cuales, por ejemplo, pueden producir fracciones y, poco a poco, desarrollar una forma algorítmica de multiplicar y dividir, con base en un modo informal de trabajar. En relación con este principio, las "producciones propias" desempeñan un importante papel en la EMR.

2. *Principio de realidad*

Como en la mayoría de los sistemas de educación matemática, la EMR busca que los estudiantes sean capaces de aplicar las matemáticas. La meta global de la educación matemática es que los estudiantes utilicen su comprensión y herramientas matemáticas para resolver problemas. Esto implica que deben aprender "las matemáticas de modo que sean útiles" (*véase* Freudenthal, 1968).

En la EMR, no obstante, este principio de realidad no sólo es reconocible al término del proceso de aprendizaje en el campo de aplicación; también se concibe la realidad como una fuente para aprender matemáticas. Así como las matemáticas surgieron de la matematización de la realidad, así también el aprendizaje de las matemáticas debe tener su origen en la matematización de la realidad. Incluso en los primeros años de la EMR se insistía en que, si los alumnos aprendían matemáticas de forma aislada, divorciada de sus experiencias, las olvidarían rápidamente y no serían capaces de aplicarlas (Freudenthal, 1973, 1971, 1968). En vez de comenzar con ciertas abstracciones o definiciones que se aplicarán más tarde, hay que partir de contextos ricos que demanden una organización matemática o, en otras palabras, contextos que puedan ser matematizados (Freudenthal, 1979, 1968). De este modo, mientras trabajan sobre problemas de contexto, los estudiantes desarrollan herramientas matemáticas y la comprensión.

3. *Principio de nivel*

Aprender matemáticas significa que los estudiantes pasan por diversos niveles de comprensión: de la capacidad para inventar soluciones informales relacionadas con un contexto, a la creación de diversos niveles de atajos y esquematizaciones, a la adquisición de una comprensión de los principios subyacentes y el discernimiento de relaciones más amplias. La condición para llegar al siguiente nivel es la capacidad para reflexionar sobre las actividades realizadas. Esta reflexión puede ser suscitada por interacción. Los modelos sirven como un importante recurso para salvar esta distancia entre las matemáticas informales, relacionadas con contextos, y las matemáticas más formales. Primero, los estudiantes desarrollan estrategias estrechamente ligadas al contexto. Más adelante, ciertos aspectos de la situación de contexto pueden hacerse más generales, lo que significa que el contexto adquiere más o menos el carácter de un modelo y, como tal, ofrece un apoyo para resolver otros problemas relacionados. Finalmente, los modelos dan a los estudiantes acceso a un conocimiento matemático más formal. Para que cumplan con la función de tender puentes entre los niveles informal y formal, los modelos deben pasar a ser, de un "modelo de" una situación específica, a un "modelo para" todo tipo de otras situaciones equivalentes.[9]

El contexto del autobús es un ejemplo de la vida diaria capaz de evolucionar hacia un nivel más general y formal. En un principio, se utiliza la ilustración para describir los cambios en la parada de autobús (*véase fig*. 1). Más tarde el contexto del autobús se convierte en un "modelo para" entender todo tipo de enunciados numéricos, y después los estudiantes pueden ir mucho más allá del contexto real del autobús. Incluso son capaces de utilizar el modelo para razonar retrospectivamente (*véanse* los últimos dos enunciados de la *fig*. 2).

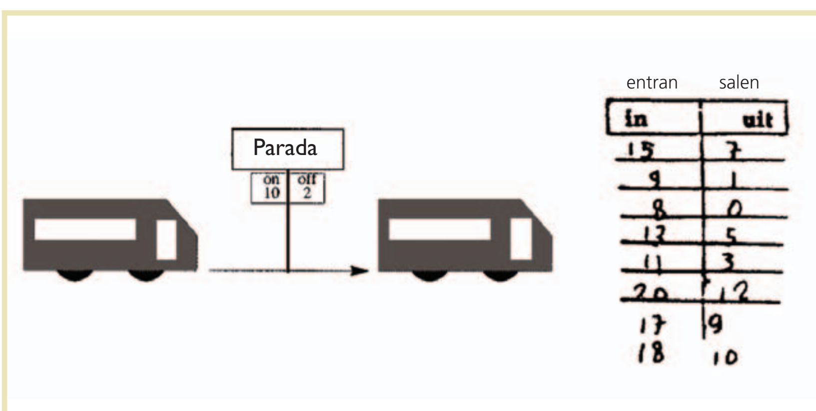


Figura 1. *En la parada de autobuses.* Tomado de Streefland, 1996, pp. 15 y 16.

[9] Fue Streefland quien, en 1985, detectó el cambio en los modelos como mecanismo crucial en el crecimiento de la comprensión. Más adelante, esta idea de un paso del "modelo de" al "modelo para" llegó a ser un elemento importante dentro del razonamiento de la EMR sobre el adelanto de los estudiantes en su comprensión de las matemáticas (*véase* Streefland, 1991; Treffers, 1991; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995).

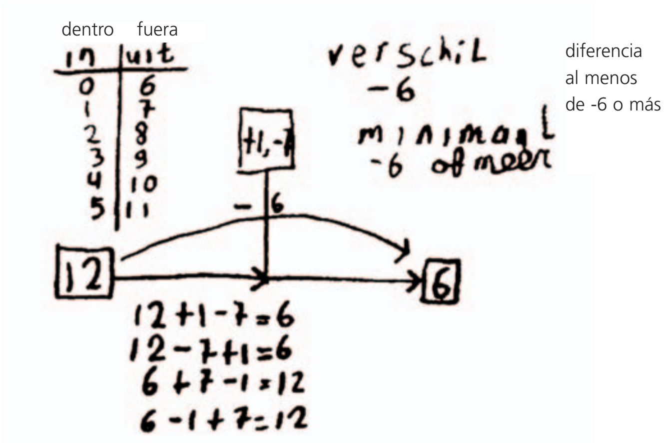


Figura 2. *Dos enunciados numéricos.* Tomado de Streefland, 1996, p. 17.

Un requisito importante para que los modelos funcionen de esta forma es que estén arraigados en situaciones concretas y que sean también suficientemente flexibles para ser útiles a niveles más altos de actividades matemáticas. Esto significa que los modelos proporcionarán a los estudiantes un punto de apoyo durante el proceso de matematización vertical, sin obstruir el camino de regreso a la fuente.

La fortaleza del principio de nivel es que orienta el crecimiento en comprensión matemática y confiere coherencia longitudinal al currículo. Esta perspectiva de largo plazo es característica de la EMR. Se pone mucha atención a la relación entre lo que se aprendió antes y lo que se aprenderá después. Un ejemplo muy claro de un modelo *longitudinal* de este tipo es la línea numérica. Comienza en el primer grado como *a)* un collar de cuentas en el que los estudiantes practican toda clase de actividades de contar. En grados superiores, esta cadena de cuentas se transforma sucesivamente en *b)* una línea numérica vacía para apoyar sumas y restas,[10] *c)* una doble línea numérica como apoyo en problemas sobre razones y *d)* una barra de fracción/porcentaje para apoyar el trabajo con fracciones y porcentajes (*véase fig.* 3).

4. *Principio de entrelazamiento*

Es también característico de la EMR que las matemáticas, como asignatura escolar, no están separadas en ejes distintos de aprendizaje. Desde una perspectiva matemática más profunda, no es posible separar los capítulos dentro de las

[10] *Véase* el trabajo presentado en esta conferencia por Julie Menne sobre su programa de "Saltar hacia adelante" para estudiantes de bajo aprovechamiento en los primeros grados.

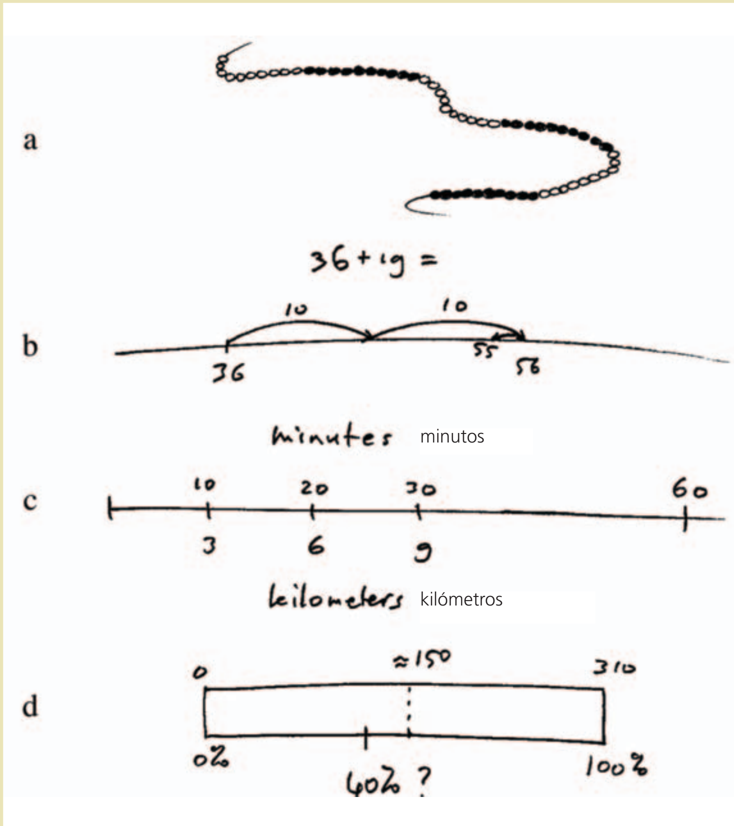


Figura 3. Diversas formas de presentar la línea numérica.

matemáticas. Más aún, resolver problemas de contexto rico suele significar que uno tiene que aplicar una amplia variedad de herramientas y discernimientos matemáticos. Por ejemplo, si los niños deben estimar el tamaño de la bandera que se representa en la figura 4, esta estimación implica no sólo mediciones, sino además razones y geometría.

De igual forma, la actividad del espejo de la figura 5 muestra claramente cómo pueden ir de la mano la geometría y la aritmética elemental.

La fortaleza del principio de entrelazamiento reside en que confiere coherencia al currículo. Este principio tiene que ver no sólo con la relación mutua entre los diferentes capítulos de las matemáticas; también se lo encuentra en las distintas partes de un mismo capítulo. En el eje de números, por ejemplo, temas como el sentido numérico, la aritmética mental, la estimación y los algoritmos están estrechamente relacionados; esta cuestión se considera con más detenimiento en una sección ulterior.

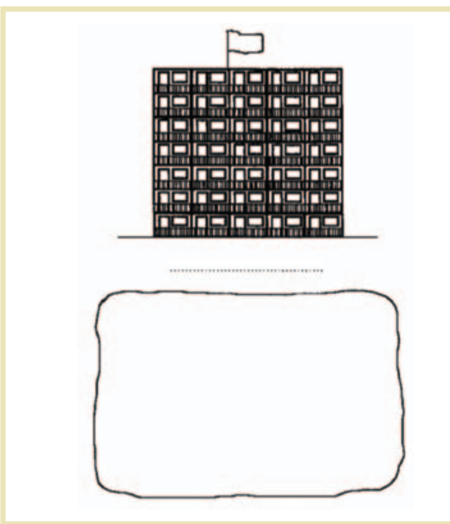


Figura 4. *Problema de la bandera.*

Figura 5. *Reflejar y contar.* Tomado de Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen y Buys, 1999.

5. *Principio de interacción*

Dentro de la EMR, se considera el aprendizaje de las matemáticas como una actividad social. La educación debe ofrecer a los estudiantes oportunidades para darse a conocer unos a otros sus estrategias e inventos. Al escuchar lo que otros averiguan y comentar estos hallazgos, los estudiantes toman ideas para mejorar sus estrategias. Más aún, la interacción suscita reflexión, lo que permite a los estudiantes alcanzar un nivel más elevado de comprensión.

La trascendencia del principio de interacción implica que la enseñanza a clases completas desempeña un importante papel en el enfoque EMR de educación matemática. Sin embargo, esto no significa que la clase entera avanza colectivamente y que todos los estudiantes siguen el mismo camino y alcanzan igual nivel de desarrollo al mismo tiempo. Por el contrario, dentro de la EMR se considera a los niños como individuos, cada uno de los cuales sigue una senda individual de aprendizaje. Este punto de vista sobre el aprendizaje suele desembocar en peticiones de dividir las clases en grupos pequeños de estudiantes, cada uno de los cuales sigue su propia trayectoria de aprendizaje. En la EMR, no obstante, hay una fuerte preferencia por mantener junta la clase como unidad de organización[11] y por adaptar en cambio la educación a los diferentes niveles de habilidad de los estudiantes. Esto se puede hacer dando a los estudiantes problemas susceptibles de ser resueltos en diferentes niveles de comprensión.

6. *Principio de orientación*

Uno de los principios fundamentales de Freudenthal (1991) para la educación matemática es que ésta debe dar a los estudiantes una oportunidad *orientada* de *re-inventar* las matemáticas. Esto implica que en la EMR tanto los profesores como los programas educativos desempeñan un papel crucial en cómo adquieren cono-

[11] Dentro de la estructura de mantener junto al grupo, es posible aplicar diversos métodos de enseñanza que van desde la enseñanza a clases completas hasta el trabajo en grupo y el trabajo individual.

cimientos los estudiantes. Profesores y programas conducen el proceso de aprendizaje, pero no de una forma fija mostrando a los estudiantes lo que deben aprender. Esto entraría en conflicto con el principio de actividad, y daría lugar a una pseudocomprensión. En cambio, los estudiantes necesitan espacio para construir herramientas y discernimientos matemáticos por cuenta propia. A fin de alcanzar esta deseable condición, los profesores deben proporcionar a los estudiantes un ambiente de aprendizaje en el cual pueda surgir el proceso de construcción. Un requisito es que los profesores deben ser capaces de prever dónde y cómo anticipar los discernimientos y destrezas de los estudiantes, que apenas asoman en el horizonte (*véase* también Streefland, 1985). Los programas educativos deben contener escenarios que tienen el potencial de funcionar como palancas para cambiar la comprensión de los estudiantes. Respecto a estas situaciones, es importante que retengan siempre la perspectiva de la trayectoria de enseñanza-aprendizaje de largo plazo con base en las metas deseadas. Sin esta perspectiva, no es posible orientar el aprendizaje de los estudiantes.

Si bien en el nivel microdidáctico la EMR tiene mucho en común con el enfoque constructivista de educación matemática, en el nivel macrodidáctico del currículo se hacen evidentes ciertas diferencias importantes. De hecho, el enfoque constructivista carece de un nivel macrodidáctico en el que se tomen decisiones respecto a las metas de educación y trayectorias de enseñanza-aprendizaje que es necesario cubrir para alcanzar estas metas. A diferencia de la EMR, el enfoque constructivista es más una teoría del aprendizaje que una teoría de la educación. El principio de orientación conduce a las ideas de currículo de la EMR.

4 ¿Cuáles son los factores que determinan el currículo holandés de matemáticas?

A diferencia de otros países, en el nivel de escuela primaria de los Países Bajos no se toman decisiones centralizadas respecto a programas de estudios curriculares, libros de texto o exámenes (*véase* Mullis *et al*., 1997). Nada de esto requiere la aprobación del gobierno holandés. Por ejemplo, las escuelas deciden qué series de libros de texto utilizarán. Incluso pueden crear su propio currículo. En general, lo que se enseña en las escuelas primarias es, en su mayor parte, responsabilidad de los profesores y equipos escolares, y los docentes gozan de bastante libertad de enseñanza. Por citar algunos ejemplos más, los profesores tienen llave del edificio escolar, se les permite hacer cambios en sus horarios sin consultar al director de la escuela (que también suele impartir una clase) y, como último ejemplo, la recomendación del profesor al término de la escuela primaria, más que una prueba, es el criterio más importante para asignar un estudiante a un nivel determinado de educación secundaria.

Pese a esta libertad para tomar decisiones en materia educativa –o probablemente habría que decir gracias a la ausencia de decisiones centralizadas en materia educativa–, los temas matemáticos que se enseñan en las escuelas primarias no difieren mucho entre sí. En general, todas siguen el mismo currículo. Esto da lugar a la pregunta: ¿qué es lo que éste determina?

Hasta hace poco tiempo, había tres factores determinantes y fundamentales para el seguimiento macrodidáctico en la educación holandesa en matemáticas en la escuela primaria:

- Las series de libros de texto de matemáticas.
- El *Proeve*, un documento que recomienda el contenido matemático a enseñar en la escuela primaria.
- Las metas fundamentales por alcanzar al término de la escuela primaria como las describe el gobierno.

4.1 El papel determinante de los libros de texto

En la actual reforma mundial de la educación matemática, hablar sobre los libros de texto –para no mencionar su utilización– suele suscitar una asociación negativa. De hecho, muchos movimientos de reforma buscan deshacerse de los libros de texto. En los Países Bajos, no obstante, ocurre lo contrario. Aquí, el mejoramiento de la educación matemática depende en gran medida de los nuevos libros de texto. Éstos desempeñan un papel determinante en la educación matemática. De hecho, los libros de texto son los instrumentos más importantes que orientan la enseñanza de los profesores. Esto es cierto tanto respecto al contenido como a los métodos de enseñanza, si bien por lo que toca a los segundos la orientación que se ofrece no es suficiente para llegar a todos los profesores. Muchos estudios pusieron al descubierto indicios de que la implantación de la EMR en la práctica del aula todavía no es óptima (Gravemeijer *et al.*, 1993; Van den Heuvel-Panhuizen y Vermeer, 1999).

Este papel determinante de los libros de texto no significa, sin embargo, que los profesores holandeses sean prisioneros de sus libros de texto. Como se ha señalado, éstos gozan de bastante libertad de enseñanza, y las escuelas deciden qué series de libros de texto utilizarán. Actualmente, alrededor de 80% de las escuelas primarias holandesas usan una serie de libros de texto de matemáticas inspirada en mayor o menor medida en la EMR. En comparación con lo que ocurría hace diez o quince años, esta proporción ha cambiado significativamente. En ese tiempo, sólo la mitad de las escuelas trabajaba con una serie de libros de texto de este tipo (De Jong, 1986). Una serie de libros de texto es creada por editoriales comerciales. Los autores de los libros de texto son desarrolladores independientes de la educación matemática, pero llegan a emplear las ideas respecto a actividades didácticas producto de la investigación aplicada del Instituto Freudenthal (y sus predecesores) y del SLO, el Instituto Holandés para el Desarrollo del Currículo (*Dutch Institute for Curriculum Development*).

4.2 El *Proeve*: una descripción de dominios de las matemáticas de la escuela primaria

Una ayuda importante en el desarrollo de los libros de texto es también la orientación que, desde mediados de la década de 1980, ha provenido de una serie de publicaciones llamadas el *Proeve*.[12] Treffers es el principal autor de esta serie. En ella hay descripciones de los diversos dominios dentro de las matemáticas como asignatura escolar. El trabajo sobre el *Proeve* todavía está en curso, y en último término habrá descripciones respecto a todas las destrezas numéricas básicas, algoritmos escritos, razones y porcentajes, fracciones y números decimales, medición y geometría. Aunque el *Proeve* está escrito en un estilo fácil con muchos ejemplos, no ha sido redactado como una serie para profesores. En cambio, se pretende que sea un apoyo para los autores de libros de texto, educadores de maestros y asesores escolares. Por otra parte, muchos de estos expertos en educación matemática fueron, y todavía son, contribuyentes importantes a la realización de esta serie.

Si se mira en retrospectiva el movimiento holandés de reforma de la educación matemática, se concluye que la reforma tuvo lugar de un modo interactivo e informal, sin interferencia del gobierno. En cambio, desarrolladores e investigadores, en colaboración con formadores de maestros, asesores escolares y profesores, idearon actividades didácticas y ejes de aprendizaje que más tarde se incluyeron en los libros de texto.

4.3 Metas fundamentales de la educación matemática

Hasta hace poco tiempo no había una interferencia real del gobierno holandés en cuanto al contenido de los programas educativos. Había sólo una ley general que

[12] El título completo de esta serie es *Diseño de un programa nacional para la educación matemática en escuelas primarias* [*Proeve van een Nationaal Programma voor het reken- wiskundeonderwijs op de basisschool*]. La primera parte de esta serie fue publicada en 1989 (*véase* Treffers, De Moor y Feijs, 1989). Adviértase que el título se refiere a un "programa nacional", aunque no hubo interferencia por parte del gobierno. A los autores les agradó la idea de etiquetar esto como un programa nacional a fin de lograr un programa común; en este objetivo tuvieron éxito.

contenía una lista de las asignaturas por enseñar. Qué temas debían enseñarse dentro de estas asignaturas era, casi totalmente, responsabilidad de los profesores y equipos escolares. Hace pocos años, no obstante, el criterio del gobierno cambió y, en 1993, el Ministerio Holandés de Educación propuso una lista de objetivos a lograr, llamados *Metas fundamentales*. Estas metas describen lo que los estudiantes deben aprender en cada asignatura al término de su estancia en la escuela primaria (a la edad de doce años). En cuanto a matemáticas, la lista contiene 23 metas, separadas en seis dominios (*véase* tabla 1). El contenido de la lista concuerda con los documentos del *Proeve* mencionados.

En comparación con las descripciones de metas y programas de otros países, es notable que en esta lista no se mencionan ciertos temas matemáticos muy extendidos; por ejemplo, resolución de problemas, probabilidad, combinatoria y lógica. Otro rasgo sorprendente de esta lista es que sea tan simple. Ello significa que los profesores gozan de mucha libertad para interpretar las metas. Al mismo tiempo, sin embargo, esta lista no ofrece mucho apoyo a los profesores. En consecuencia, tuvo un trato de documento *muerto*: se guarda en un cajón cuando llega a la escuela. Con todo, esta primera lista de metas fundamentales fue importante para la educación matemática holandesa. La publicación de la lista por parte del gobierno confirmó y, de cierto modo validó, los cambios recientes del currículo holandés.

Los cambios predominantes fueron los siguientes:

- Debía ponerse más atención a la aritmética mental y la estimación.
- Las operaciones formales con fracciones dejaron de ser medulares en el currículo; ahora los estudiantes deben hacer operaciones con fracciones sólo en situaciones de contexto.
- Se incluyó oficialmente la geometría en el programa de estudio.
- Y también el uso de la calculadora con discernimiento.

Sin embargo, no todos estos cambios han sido incluidos en los libros de texto ni implantados en la práctica actual en el aula. Esto es especialmente cierto respecto a la geometría y al uso de calculadora.

A partir de 1993 hubo debates acerca de estas 23 metas fundamentales (*véase* Wit, 1997). Casi todos coinciden en que estas metas nunca serán suficientes para apoyar las mejoras en la práctica de aula ni para comprobar el resultado de la educación. El gobierno concibe esto último como un poderoso instrumento para salvaguardar la calidad de la educación. Respecto a ambos propósitos, se juzgó que las metas fundamentales fracasaban. El simple hecho de enunciarlas no basta para alcanzarlas. Las metas fundamentales tampoco son apropiadas para poner a prueba el resultado de la educación. Se escucharon muchas quejas en el sentido de que no se habían formulado con la precisión suficiente para ofrecer patrones

Tabla 1. Metas fundamentales en matemáticas en la escuela primaria holandesa

		Al terminar la escuela primaria, los estudiantes:
Destrezas generales	1	Pueden contar hacia adelante y hacia atrás con unidades que cambian
	2	Pueden hacer tablas de suma y tablas de multiplicación hasta diez
	3	Pueden resolver problemas fáciles de aritmética mental de forma rápida y con discernimiento de las operaciones
	4	Pueden estimar calculando la respuesta de forma global, también con fracciones y decimales
	5	Disciernen la estructura de los números enteros y el sistema de valor de posición de los decimales
	6	Pueden utilizar la calculadora con discernimiento
	7	Pueden convertir problemas simples, no presentados de forma matemática, en un problema matemático
Algoritmos escritos	8	Pueden aplicar los algoritmos estándar, o variaciones de éstos, a las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división en situaciones simples de contexto
Razón y porcentajes	9	Pueden comparar razones y porcentajes
	10	Pueden resolver problemas simples de razón
	11	Entienden el concepto de tanto por ciento y saben hacer cálculos prácticos con porcentajes presentados en situaciones simples de contexto
	12	Entienden la relación entre razones, fracciones y decimales
Fracciones	13	Saben que las fracciones y los decimales pueden tener varios significados
	14	Pueden localizar fracciones y decimales en una línea numérica y convertir fracciones en decimales; también con ayuda de una calculadora
	15	Pueden comparar, sumar, restar, dividir y multiplicar fracciones simples en situaciones simples de contexto por medio de modelos
Medición	16	Pueden leer el tiempo y calcular intervalos de tiempo; también con ayuda de una calculadora
	17	Pueden hacer cálculos con dinero en situaciones de contexto de la vida diaria
	18	Disciernen la relación entre las cantidades más importantes y las correspondientes unidades de medición
	19	Conocen las unidades corrientes de medición de longitud, área, volumen, velocidad, peso y temperatura, y pueden aplicarlas en situaciones simples de contexto
	20	Pueden leer tablas y diagramas simples, y elaborarlos con base en sus propias investigaciones de situaciones simples de contexto
Geometría	21	Dominan ciertos conceptos básicos con los cuales organizan y describen el espacio de un modo geométrico
	22	Pueden razonar geométricamente utilizando bloques de construcción, planos de planta, mapas, imágenes y datos sobre ubicación, dirección, distancia y escala
	23	Pueden explicar imágenes de sombra, combinar formas e idear e identificar recortables de objetos regulares

de medida aplicables a las pruebas. Se escucharon estos argumentos no sólo en cuanto a las matemáticas, sino también en relación con todas las asignaturas de escuela primaria respecto a las cuales se formularon metas fundamentales.

4.4 Bosquejos de trayectorias longitudinales de enseñanza-aprendizaje: un nuevo factor para el seguimiento macrodidáctico

Durante varios años no se vio con claridad qué dirección sería la elegida para mejorar las metas fundamentales: proveer ya sea una lista más pormenorizada de metas para cada grado expresadas en términos de funcionamiento, o bien, una descripción que apoyara a la enseñanza en vez de la pura aplicación de pruebas. En 1997, el gobierno optó tentativamente por la segunda y pidió al Instituto Freudenthal que las elaborara para las matemáticas. Esta decisión dio como resultado la puesta en marcha del Proyecto TAL[14] en septiembre de 1997. El propósito de este proyecto, que el Instituto Freudenthal lleva a cabo conjuntamente con el SLO y el CED,[15] es contribuir al mejoramiento de la práctica de aula, comenzando por la de los primeros grados. El motivo para comenzar en los grados de menor nivel fue que, al mismo tiempo, el gobierno tomó medidas para reducir el tamaño de los grupos en estos grados. Los productos del Proyecto TAL podrían llegar a ser con el tiempo, el cuarto factor orientador para el seguimiento macrodidáctico en la educación matemática de las escuelas primarias holandesas.

Para comenzar, un bosquejo de trayectoria sobre los números enteros

El primer foco de atención del proyecto fue formular una descripción de una trayectoria de enseñanza-aprendizaje longitudinal sobre la aritmética de números enteros. La primera descripción para los grados inferiores (K1, K2 –preescolar 2 y 3 en México– y 1º y 2º grados de primaria)[16] se publicó en noviembre de 1998. Le siguió la versión definitiva un año después (Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen y Buys (eds.), 1999). Ahora la atención se centra en la continuación de una trayectoria de números enteros para los grados superiores de la escuela primaria (de 3º a 6º grados), y recientemente se ha comenzado a formular una trayectoria de enseñanza-aprendizaje respecto a medición y geometría. En el futuro se formularán otros ejes respecto a fracciones, decimales y porcentajes.

---

14 TAL es una abreviatura en holandés que significa Metas Intermedias Anexas a Trayectorias de Enseñanza-Aprendizaje.

15 El SLO es el Instituto Holandés para el Desarrollo de los Currículos, el CED es el Centro de Asesoría Escolar para la ciudad de Rotterdam. En un futuro cercano es probable que otros institutos participen también oficialmente en el Proyecto TAL.

16 Estos grados cubren a los estudiantes de 4 a 8 años de edad.

En la trayectoria de números enteros se interpreta la aritmética en un sentido amplio, que incluye conocimiento de los números, sentido numérico, aritmética mental, estimación y algoritmos. De hecho, se pretende que la descripción ofrezca una perspectiva general de cómo están relacionados estos elementos numéricos unos con otros, tanto en sentido longitudinal como de sección transversal.

Un nuevo enfoque de la descripción de metas como marco para apoyar la enseñanza

Los pasos que los estudiantes darán (de una forma u otra) en su camino para alcanzar las metas al término de la escuela primaria son cruciales en los bosquejos de trayectoria, y pueden verse como metas intermedias. Como metas, no obstante, difieren en muchos aspectos de las descripciones habituales de las metas de fin de curso, que son demasiado rígidas para considerarlas idóneas como base directa para la aplicación de pruebas. De hecho, en varios sentidos los bosquejos propuestos de las trayectorias de enseñanza-aprendizaje son lo contrario de las descripciones de metas que tradicionalmente se supone que orientan la educación. En vez de descripciones no ambiguas de metas en términos conductuales, la trayectoria de enseñanza-aprendizaje brinda a los profesores un bosquejo más o menos narrativo de cómo puede realizarse el proceso de aprendizaje siempre y cuando se concrete en efecto un entorno educativo en particular. La descripción contiene muchos ejemplos, incluso videograbados en un disco compacto, del comportamiento y el trabajo de los estudiantes en relación con actividades medulares de la enseñanza.

Dar a los profesores una perspectiva directa de cómo evoluciona la comprensión matemática de los niños de los grados Preescolar 1 al 2º grado de primaria (dado el caso hasta 6º grado) y de cómo contribuye la educación a este desarrollo es el propósito principal de esta alternativa a la insistencia tradicional en metas claras como el motor más potente para mejorar la práctica de aula. De ningún modo, sin embargo, se pretende que los bosquejos de trayectoria sean recetarios. Más bien se busca que proporcionen a los profesores un mapa mental educativo que puede ayudarles a hacer ajustes al libro de texto, de ser necesario. Otra diferencia respecto a la descripción tradicional de metas es que no hay una estructura de prerrequisitos estrictos. Además, los procesos de aprendizaje no se consideran un proceso continuo de pasos pequeños, ni se ve a las metas intermedias como una lista de comprobación para ver cuánto han avanzado los estudiantes. De hecho, un enfoque de este tipo descuida las discontinuidades del proceso de aprendizaje y no tiene en cuenta el grado en que la comprensión y el ejercicio de destrezas son determinados por el contexto y cuánto difieren ambos entre los individuos. En vez de una lista de comprobación de habilidades aisladas, los bosquejos de trayectoria procuran exponer con claridad cómo éstas se construyen, unas en relación con las otras. Lo que se aprende en una etapa es comprendido y ejecutado en un nivel más alto en una etapa siguiente.

La fuerza vinculante de los niveles y su uso didáctico

Es esta característica de niveles del proceso de aprendizaje –un elemento constitutivo de la EMR– lo que da coherencia longitudinal a la trayectoria de enseñanza-aprendizaje. Otra implicación crucial de esta característica de niveles es que los estudiantes pueden comprender algo en niveles diferentes. En otras palabras, pueden trabajar sobre los mismos problemas sin hallarse en el mismo nivel de comprensión. La distinción de niveles en la comprensión, que puede tener apariencias diferentes en los distintos subdominios dentro del eje de los números enteros, es muy fructífera para trabajar en el adelanto de la comprensión de los niños. Ofrece puntos de apoyo para estimular este progreso.

Niveles de conteo como primer ejemplo

Como ejemplo, podríamos considerar los niveles de conteo[17] que han sido distinguidos respecto a la etapa inicial del desarrollo del concepto de número en el jardín de niños y el comienzo del 1er grado. Se han identificado los tres niveles siguientes (*véase* Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen y Buys, eds., 1999):

- conteo relacionado con contexto,
- conteo ligado a objetos,
- (hacia) un modo más formal de contar.

Para explicar esta distinción de niveles y dar una idea de cómo puede utilizarse para hacer accesibles los problemas a los niños y provocar cambios en los niveles de habilidad, podemos pensar en la capacidad de conteo resultativo hasta diez. ¿Qué ocurre si a un niño no le dice nada la pregunta *cuántos* (*véase fig*. 6)? ¿Significa esto que el niño simplemente no es capaz de hacer un conteo resultativo?

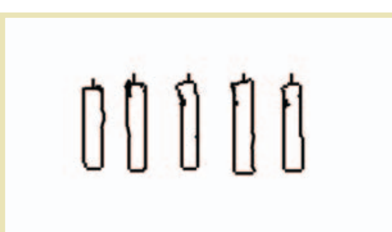


Figura 6. *¿Cuántos...?*

Si no es el caso, puede hacerse evidente si el profesor pasa a una pregunta relacionada con contexto, en vez de una pregunta simple de *cuántos*. Por ejemplo:

- *¿Cuántos años tiene la niña?* (refiriéndose a las velas de un pastel de cumpleaños) (*véase fig*. 7).
- *¿Qué tan lejos puedes saltar?* (refiriéndose a los puntos de un dado).

[17] Para indicar que no hay una división estricta entre contar y calcular, en la trayectoria de enseñanza-aprendizaje la destreza de contar se llama “contar y calcular”.

Figura 7. *¿Cuántos años...?* Tomado de Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen y Buys, eds., 1999, p. 26.

- *¿Qué tan alta es la torre?* (refiriéndose a los bloques con los que está construida la torre).

En las preguntas relacionadas con contexto, éste confiere significado al concepto de número. Este conteo relacionado con contexto antecede al nivel del conteo relacionado con objetos, en el que los niños manejan la pregunta directa *cuántos* en relación con un conjunto de objetos concretos sin referencia alguna a un contexto significativo. Más adelante, tampoco es ya necesaria la presencia de objetos concretos para responder preguntas de *cuántos*. Por la vía de la simbolización, los niños han alcanzado un nivel de comprensión en el que son capaces de lo que se podría llamar *conteo formal*, lo cual significa que pueden reflexionar sobre relaciones de números y que pueden hacer uso de este conocimiento.

Niveles de cálculo como segundo ejemplo

Respecto al campo del cálculo inicial en el 1er grado (con números hasta 20), se han identificado los tres niveles siguientes (*véase* Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen y Buys, eds., 1999):

- Calcular por conteo (o mediante conteo). Por ejemplo, calcular 7+6 depositando siete monedas de un florín y seis monedas de un florín y contando el total una por una.
- Calcular por estructuración. Por ejemplo, calcular 7+6 depositando dos monedas de cinco florines y tres monedas de un florín.
- Calcular formalmente (y con flexibilidad). Por ejemplo, calcular 7+6 sin usar monedas y utilizando el conocimiento que uno tiene sobre 6+6.

Se mostrará cómo se manifiestan estos niveles en la práctica de aula en la lección del *Restaurante* que se analiza en la siguiente sección (*véase* §5.1).

En grados más altos, cuando los estudiantes hacen cálculos en un nivel formal, se reconocen los niveles mencionados en las tres estrategias de cálculo para sumas y restas hasta 100:

- La estrategia de salto (esta estrategia guarda relación con calcular por conteo; implica conservar el primer número como entero: 87-39=... 87-30=57; 57-7=50; 50-2=48).
- La estrategia de separar los números en decenas y unidades (esta estrategia guarda relación con calcular por estructuración; implica hacer uso de la estructura decimal: 87-39=... 80-30=50; 7-7=0; 50-2=48).
- Calcular con flexibilidad (esta estrategia implica hacer uso del conocimiento de relaciones numéricas y propiedades de las operaciones: 87-39=... 87-40=47; 47+1=48).

Niveles didácticos

El discernimiento de estos niveles didácticos proporciona a los profesores un sólido pilar para tener acceso a cómo los niños comprenden y para trabajar sobre los cambios en la comprensión. Después de comenzar, por ejemplo, con preguntas relacionadas con contexto ("¿cuántos años tiene la niña?"), el profesor puede hacer a un lado el contexto gradualmente y llegar a las preguntas relacionadas con objetos ("¿cuántas velas tiene el pastel de cumpleaños?"). Las categorías de niveles respecto a los cálculos hasta 20 y 100 difieren notablemente, por ejemplo, de los niveles basados en tipos de problemas[18] y de los niveles basados en el tamaño de los números por procesar. También se desvían de las distinciones más generales entre concreto y abstracto en los niveles de comprensión[19] y de las distinciones de niveles que van desde realizar operaciones con números con base en materiales hasta procedimientos mentales, con la verbalización como estadio intermedio.[20] Las ideas con las cuales se identifican más los niveles de TAL en los primeros grados se hallan en el trabajo de Donaldson (1978) y Hughes (1986).[21]

Hasta aquí hemos analizado algunas de las ideas principales en las que se basan los bosquejos de trayectoria. Como se ha señalado, el Proyecto TAL apenas comienza a trabajar en ellas. Aún no se sabe cómo funcionarán en la práctica escolar ni si realmente ayudan a los profesores. Sin embargo, las indagaciones realizadas hasta ahora (De Goeij, Nelissen y Van den Heuvel-Panhuizen, 1998; Groot, 1999; Slavenburg y Krooneman, 1999) nos dan una sensación general de que efectivamente ayudan a los profesores, y que la trayectoria de enseñanza-aprendizaje del TAL sobre la aritmética de números enteros para los primeros

[18] Los tipos de problemas de CGI pueden considerarse ejemplos de distinción de niveles basada en tipos de problemas.

[19] Como los niveles piagetianos de crecimiento cognitivo.

[20] Como los niveles que distingue Galperin.

[21] Con todo, hay ciertas diferencias significativas entre sus ideas y las ideas del TAL sobre los niveles. Donaldson, por ejemplo, no aplicó sus ideas al conteo, y Hughes no identificó lo que se conoce como conteo relacionado con contexto en el TAL.

grados de primaria ha puesto en marcha algo que, de una forma u otra, pueden llevar a un nivel más alto no sólo a los niños, también a la educación matemática holandesa.

El interés del equipo del TAL se despertó al descubrir que hacer un bosquejo de trayectoria no era sólo cuestión de poner por escrito lo que ya era conocido en un sentido popular y accesible para los profesores, sino que además el trabajo sobre la trayectoria daba como resultado el surgimiento de ideas nuevas sobre cómo enseñar matemáticas y una revisión de nuestra forma corriente de pensar en la enseñanza.

5 Tres ejemplos de la práctica de la EMR en el aula

La respuesta a la pregunta *qué* respecto al currículo holandés de aritmética se limitará a dar una impresión de ella con base en los tres problemas siguientes:

- 6 + 7 =
- 81 ÷ 6 =
- 4 x *f* 1.98 =

Es evidente que esta selección no cubre la totalidad del currículo holandés de aritmética. Es sólo una breve perspectiva en pasos gigantescos: se mostrará un problema para los primeros grados, uno para los grados intermedios y uno para los grados finales de la escuela primaria. Lo que estos ejemplos tienen en común es que pueden resolverse en diferentes niveles y, por tanto, pueden ser suelo fértil para el adelanto. También dejan claro que la pregunta *qué* respecto al currículo holandés de aritmética nunca podrá desligarse del *cómo*.

5.1 Restaurante

La lección del *Restaurante* es una de las que se presentan en el disco compacto y pertenece a la trayectoria de enseñanza-aprendizaje del TAL sobre números enteros para los primeros grados. Fue videograbada en una clase mixta con niños de *Kinder* 2 y primer grado, esto es, de cinco y seis años de edad (preprimaria y primer grado de primaria en México). La profesora, Ans Veltman, pertenece al personal del equipo del TAL; también diseñó la lección, aunque ella estaría en desacuerdo al respecto: Ans considera que su estudiante Maureen fue quien desarrolló esta lección. Maureen abrió un restaurante en un rincón del aula, y todos fueron invitados a comer. La tarjeta del menú muestra a los niños lo que pueden ordenar y cuánto cuesta. Los precios están en florines enteros (*véase fig*. 8).

Figura 8. La tarjeta de menú del restaurante de Maureen.

El propósito de la profesora con esta lección es trabajar en un problema difícil de suma "pasando por el número diez". La forma como lo hace refleja, no obstante, un mundo de libertad para los estudiantes. La profesora anunció a los niños que podían elegir dos cosas del menú y les preguntó cuáles elegirían y cuánto costarían. En otras palabras, aparentemente no había orientación por parte de la profesora, pero la verdad era lo contrario. Si elegían un panqueque y un helado, que cuestan 7 florines y 6 florines, respectivamente, la profesora sabía por adelantado en qué problema trabajaría la clase; esto es, el problema de sumar arriba de diez, que es en lo que ella deseaba que trabajaran.

Hay un monedero con un poco de dinero para pagar lo que se ordena, y la profesora dispuso que hubiera en él monedas de cinco florines y de un florín. (Esto muestra una vez más la sutil orientación por parte de la profesora.) Enseguida, los estudiantes comienzan a ordenar. Niels elige un panqueque y un helado. Jules escribe la orden en un pequeño pizarrón. Los otros niños exclaman: "Sí... yo también". Coinciden con la elección de Niels. Entonces la profesora pregunta cuánto costaría esta elección en total.

He aquí un resumen de lo que hicieron los niños:

- Maureen contó 13 monedas de un florín. Seis monedas para el helado y siete monedas para el panqueque (calcular mediante conteo) (*véase fig*. 9).
- Thijs y Nick cambiaron cinco monedas de un florín por una moneda de cinco florines, y pagaron el helado con "5" y "1" y el panqueque con "5" y "1" y "1". Entonces vieron que los dos cincos hacen diez y los tres unos hacen 13 en total (calcular por estructuración) (*véase fig*. 10). Más tarde, Nick puso las monedas en fila: "5", "5", "1", "1", "1".

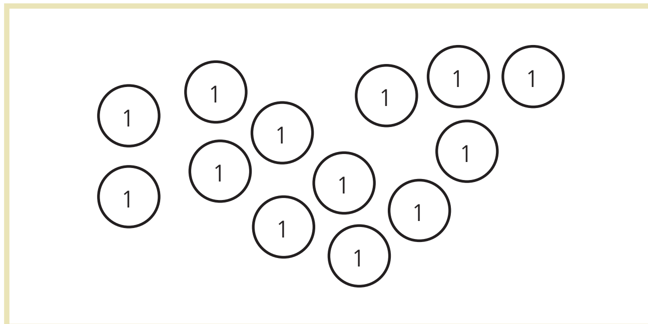


Figura 9. La estrategia de Maureen.

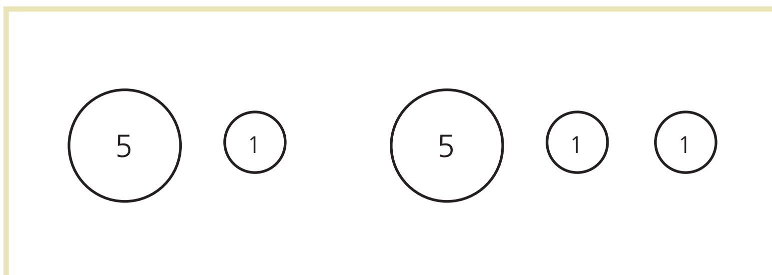


Figura 10. La estrategia de Thijs.

- Luuk ideó la siguiente estrategia: "Primero pongo tres florines de los seis con los siete florines, y eso da diez florines, y tres son trece" (calcular por estructuración y hacia el cálculo formal).
- Hannah no utilizó las monedas, sino que calculó: "6 y 6 son 12, y 1 son 13 florines". A otro estudiante se le ocurrió que: "7 y 7 son 14, menos 1 son 13" (cálculo formal y flexible).

Esta lección de *Restaurante* deja en claro que los niños con diferencias en cuanto a destreza y nivel de comprensión pueden trabajar en clase sobre un mismo problema. Para ello, es necesario que se plantee a los niños problemas susceptibles de ser resueltos en diferentes niveles. La ventaja para los estudiantes es que el hecho de compartir y comentar sus estrategias entre ellos puede funcionar como una palanca para elevar su comprensión. La ventaja para los profesores es que los problemas de este tipo les ofrecen una muestra representativa de la comprensión de su grupo en cualquier momento dado, así como una perspectiva longitudinal de la trayectoria que necesitan seguir. La muestra representativa de estrategias en un momento cualquiera indica lo que está por llegar a su alcance en el futuro inmediato. Como tal, esta muestra representativa de estrategias contiene asideros que servirán al profesor para la enseñanza ulterior.

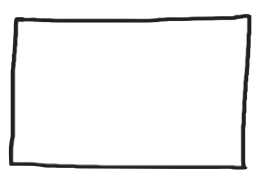
5.2 Velada de padres

La siguiente escena de aula[22] muestra cómo contribuyen los principios de la EMR al crecimiento en la comprensión matemática. El punto de partida de la lección es la exploración de un problema de contexto que –y esto es indispensable– pueda ser resuelto en varios niveles de comprensión. Mediante la exposición y la discusión de las estrategias de solución en clase, los estudiantes que resolvieron primero el problema utilizando una estrategia muy larga pueden avanzar hacia un nivel más alto de comprensión. A resultas de este proceso, que se conoce como *matematización progresiva*, es posible constituir conceptos matemáticos nuevos.

El escenario es un aula de tercer grado. Los estudiantes tienen de ocho a nueve años. La profesora comienza con la presentación de un problema sobre una velada de padres que se está organizando. La pregunta se refiere al número de mesas necesarias para sentar a los padres (*véase fig*. 11).

"Esta noche habrá una velada de padres.
Los papeles que recibí de ustedes me dicen que asistirán 81 personas.
La reunión se celebrará en el salón grande.
Los padres se sentarán alrededor de mesas grandes.
Seis personas pueden ocupar cada mesa."

La profesora hace un dibujo de una de las mesas en el pizarrón:



Enseguida, la profesora pregunta:

"¿Cuántas mesas necesitamos para 81 personas?"

Figura 11. *Problema de las mesas.*

Los estudiantes comienzan a trabajar y la profesora camina por el aula. Cuando es necesario, ayuda un poco a los niños. Al cabo de aproximadamente diez minutos, la maestra pide a los niños mostrar su trabajo y explicar sus soluciones.

[22] Esta actividad de aula procede de Van Galen *et al.* (1991) (*véase* también Van Galen y Feijs, 1991); la presente estampa fue utilizada también por De Lange en su conferencia plenaria de la ICME 1996, en Sevilla, España.

Badr dibujó todas las mesas que necesitaba para sentar a todos los padres (*véase fig*. 12).

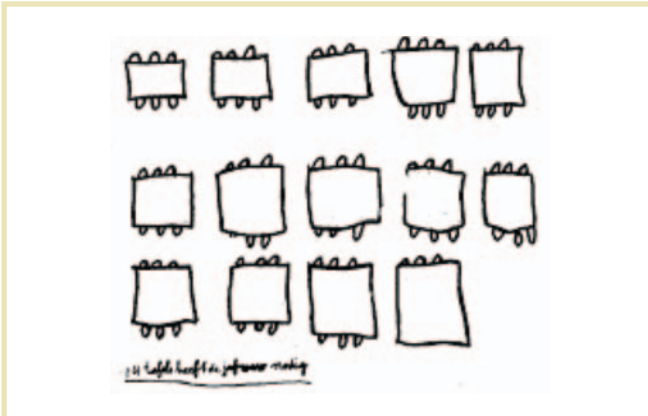


Figura 12. El trabajo de Badr.

Roy comenzó de igual forma, pero después de dibujar dos mesas completas dibujó dos rectángulos y puso en ellos el número seis. Mientras dibujaba más de estos rectángulos comprendió de pronto que, si tenía cinco mesas, podía sentar a 30 padres. Continuó dibujando rectángulos y después de otros cinco apuntó 60. Después dibujó otros dos, apuntó 72, luego uno más, y apuntó 78. Terminó con un rectángulo en el que puso el número 3 (*véase fig*. 13).

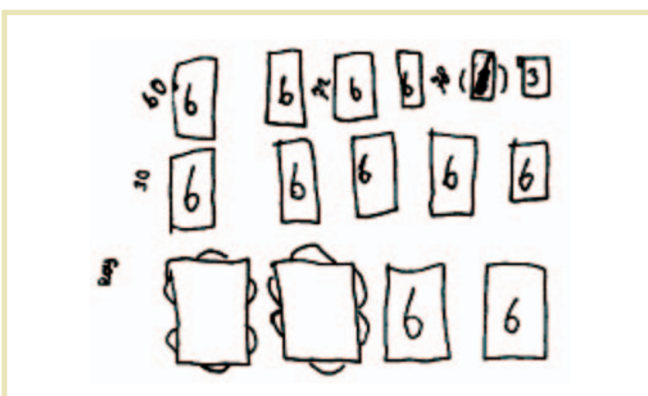


Figura 13. El trabajo de Roy.

Un tercer estudiante, Abdelaziz, se mostró aún más adelantado en cuanto a matematizar el problema. Aunque también él comenzó dibujando una copia de la mesa que estaba en el pizarrón, pasó de inmediato a una solución más formal utilizando su conocimiento de los múltiplos de seis. Apuntó 6 x 6 = 36, duplicó este número y llegó a 72, y después agregó dos mesas más al 72 y obtuvo la respuesta de 84 (*véase fig*. 14).

Figura 14. El trabajo de Abdelaziz.

Si se miran estas tres soluciones, es evidente que cierta matematización tuvo lugar en cada nivel, incluso en el trabajo de Badr, pues la visualización y la esquematización son también poderosos instrumentos para matematizar. En los otros dos ejemplos las matemáticas son más visibles, pero aún no están en el nivel que se busca. Este problema fue pensado como punto de partida para aprender la división larga. Para alcanzar esta meta, el problema debe ir seguido de otros problemas. Por consiguiente, una vez que terminó el debate en clase sobre las diferentes estrategias, la profesora planteó otro problema: el de las *cafeteras* (*véase fig*. 15).

> "Se ofrecerá a los 81 padres una taza de café.
> Puedes llenar 7 tazas con una cafetera.
> ¿Cuántas cafeteras se necesitarán?"

Figura 15. *Problema de las cafeteras.*

Desde un punto de vista matemático, este problema es el mismo que el anterior. En vez de dividir entre seis, ahora los estudiantes deben dividir entre siete. Para estos estudiantes, sin embargo, este problema es diferente por completo, y también es más difícil hacer una presentación visual de él.

Es más fácil dibujar mesas que cafeteras, aunque Badr intentó dibujarlas (*véase fig*. 16).

Después de dibujar dos cafeteras, Badr recordó el comentario acerca de cómo se puede hallar más rápidamente la respuesta multiplicando. Procedió a utilizar 10 x 7 =70 seguido de 70 +11=81, y concluyó que se necesitan 12 cafeteras.

Tanto la constitución de herramientas matemáticas (la representación de la situación problema, la esquematización, la suma repetida, la aplicación del co-

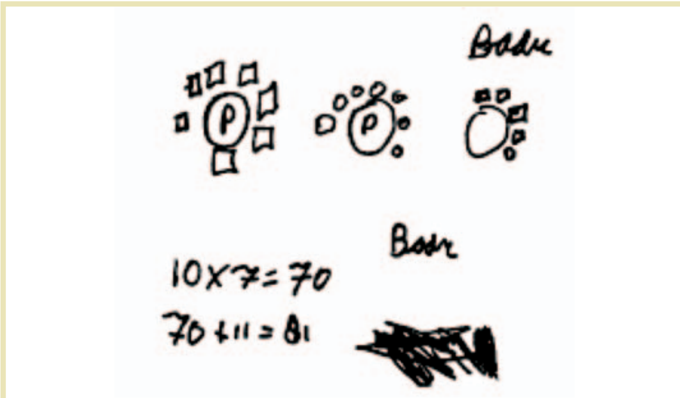


Figura 16. El trabajo de Badr sobre el *Problema de las cafeteras*.

nocimiento de operaciones numéricas, la forma de llevar la cuenta de los resultados y la comunicación sobre las estrategias) como el cambio de nivel de Badr fueron suscitados por los problemas dados a los estudiantes. En términos más precisos, fueron suscitados por problemas relacionados. De cierto modo, el contexto de este racimo de problemas induce a los alumnos a *re-inventar* las matemáticas y a alcanzar un nivel más alto de comprensión (*véase* también la *fig*. 19).

5.3. Comprar hogazas de pan

La meta global última de la EMR es la numerización. Los niños deben ser capaces de entender los números y las operaciones numéricas. Entre otras cosas, esto implica que los niños deben ser capaces de decidir por sí mismos qué procedimiento de cálculo es apropiado para resolver un problema aritmético en particular. Deben saber cuándo es adecuado un cálculo mental, cuándo conviene utilizar una estimación y cuándo es mejor hacer aritmética de columnas en papel o utilizar una calculadora.[23] Ser capaz de tomar decisiones como éstas es una de las metas de orden más alto de la educación aritmética que se busca alcanzar en los grados superiores de la escuela primaria. El *Problema de comprar hogazas de pan* (*véase fig*. 17) es muy apropiado para trabajar en esta meta.

Lieke va a comprar cuatro hogazas de pan;
cada una cuesta *f* 1.98
¿Será suficiente con un billete de diez florines?

Figura 17. *Problema de comprar hogazas de pan.*

[23] Para conocer más sobre estrategias mentales y escritas, *véase* el trabajo presentado en esta conferencia por Meindert Beishuizen.

En la figura 18, el trabajo de los estudiantes muestra una extensa variedad de categorías de procedimientos de cálculo que es posible aplicar para resolver este problema. Los estudiantes A, B y C lo resolvieron de una u otra forma mediante aritmética de columnas. Los estudiantes D, E y F[24] utilizaron un método de

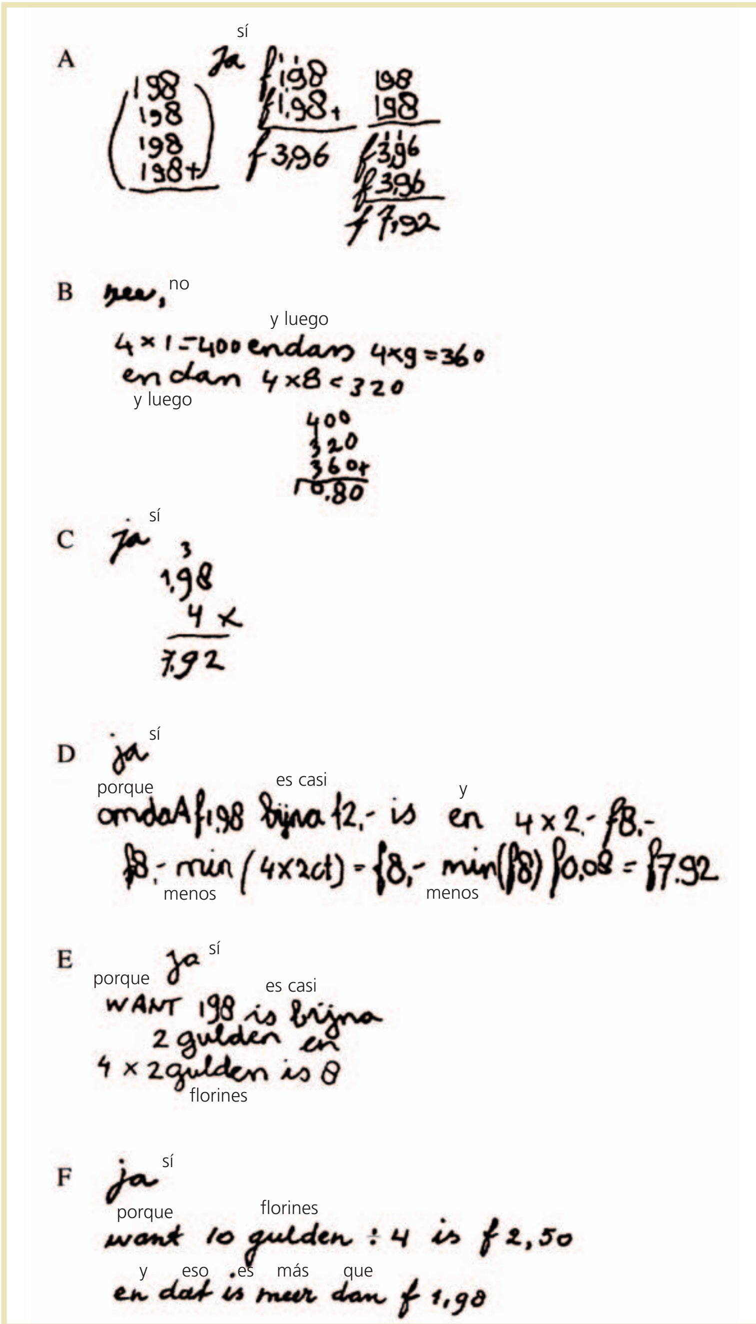


Figura 18. El trabajo de los estudiantes en el *Problema de comprar hogazas de pan* (traducción añadida por la autora).

[24] Ésta es la solución que Adri Treffers agregó al conjunto de su puño y letra.

estimación. Dentro de estas dos categorías principales, los estudiantes aplicaron varias estrategias.

La necesidad de debatir en clase

Como en los problemas de la *Velada de padres* y el *Restaurante*, un debate en clase acerca de cómo abordaron los estudiantes el *Problema de comprar hogazas de pan* ayudará a éstos a hacer una elección más apropiada la próxima vez. Especialmente si se trata de hacer estimaciones, un debate de este tipo ayudará a los alumnos a deshacerse de la idea de que su trabajo con números puede llamarse matemáticas sólo si hacen cálculos precisos. En problemas como el de *Comprar hogazas de pan* no se necesita un cálculo preciso, basta una estimación. Por otra parte, hacer una estimación para resolver este problema ¡abre el camino hacia el cálculo preciso inteligente! El trabajo del estudiante D es un buen ejemplo de esto.

Grupos de problemas

A fin de abrir el camino hacia el cálculo preciso inteligente, la pregunta global de "¿Alcanza el dinero?" va seguida de una pregunta más precisa como "¿Cuánto queda o cuánto más necesitas?" Como en el *Problema de la velada de padres*, esta serie de preguntas puede verse como una minitrayectoria con posibilidad de funcionar como palanca para lograr cambios en la comprensión de los estudiantes. De cierto modo, estos grupos de problemas son escenarios educativos que orientan la enseñanza e impulsan el aprendizaje.

Coherencia entre los procedimientos de cálculo

Además de abrir los ojos de los estudiantes a la elección apropiada de un procedimiento de cálculo en particular, la diversidad del trabajo realizado sobre el *Problema de comprar hogazas de pan* (*véase fig*. 19) proporciona al profesor una poderosa herramienta para analizar con los estudiantes cómo están relacionados los procedimientos. El trabajo de los estudiantes C y A muestra perfectamente que, en vez de una multiplicación de columnas, se puede aplicar una suma de columnas repetida. De hecho, la segunda es una etapa preliminar del algoritmo escrito estándar para la multiplicación. El trabajo del estudiante B muestra incluso lo que antecede a esta etapa preliminar: una especie de combinación de aritmética horizontal con el valor de los números enteros (en vez de procesar los números como dígitos) y aritmética de columnas.

Este procedimiento mixto es un elemento crucial de la trayectoria de enseñanza-aprendizaje que el equipo del TAL tiene en mente respecto a la aritmética en los grados superiores de la escuela primaria. La aritmética mental se considera la rama principal, de la cual se deriva más tarde la rama de aritmética de columnas. "Más tarde" significa, por ejemplo, que los algoritmos estándar para la suma y la resta (*véase fig*. 20, +*d* y –*d*) no están previstos antes del cuarto grado. No se tratan los algoritmos para la multiplicación y la división antes del quinto grado. En los años previos a estos grados, los estudiantes aplican procedimientos más o menos abreviados y mixtos que se basan en una forma *horizontal* de calcular con valores enteros. La figura 20 muestra cómo evoluciona gradualmente esta forma de calcular, relacionada con la aritmética mental, hacia los algoritmos estándar. Esto se cumple al menos respecto a la suma y la multiplicación. Por lo que se refiere a la resta, se sigue otro camino. El algoritmo de resta no surge de forma natural del enfoque de *valor-entero*. Por consiguiente, el algoritmo de suma podría dar acceso al algoritmo de resta (*véase* la flecha en la *fig*. 19). El algoritmo estándar abreviado para la división queda fuera del esquema. Este algoritmo ya no pertenece al currículo medular.

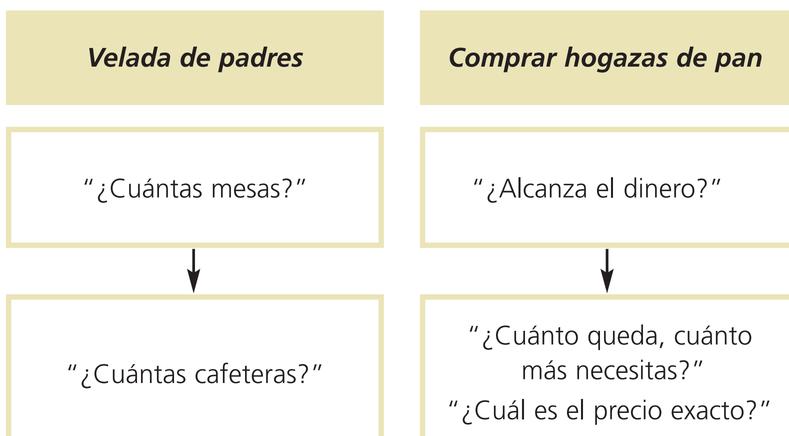


Figura 19. Problemas relacionados como herramienta didáctica para suscitar cambios en la comprensión.

El trabajo del estudiante como espejo de la educación

La resolución de este problema es algo que depende de cómo se ha enseñado a los estudiantes. Por ello, se puede ver el problema como un espejo de la enseñanza. Uno recibe lo que ha dado a los estudiantes. En el estudio en el que se reunió el trabajo de los estudiantes que se muestra en la figura 19, casi la mitad de los alumnos de cuarto y quinto años aplicaron un procedimiento de aritmética de columnas, y menos de un tercio de los estudiantes optó por una estimación global (*véase* Treffers, Streefland y De Moor, 1996). Otros estudios de este tipo de problemas pusieron de manifiesto una fuerte relación con el tipo de educación, y diferentes series de libros de texto dieron resultados distintos (Treffers, 1999). El trabajo de los estudiantes no deja duda de que todavía hay trabajo por hacer en los Países Bajos, pese a los buenos resultados encontrados en el estudio TIMSS (*véase* Mullis *et al*., 1997).

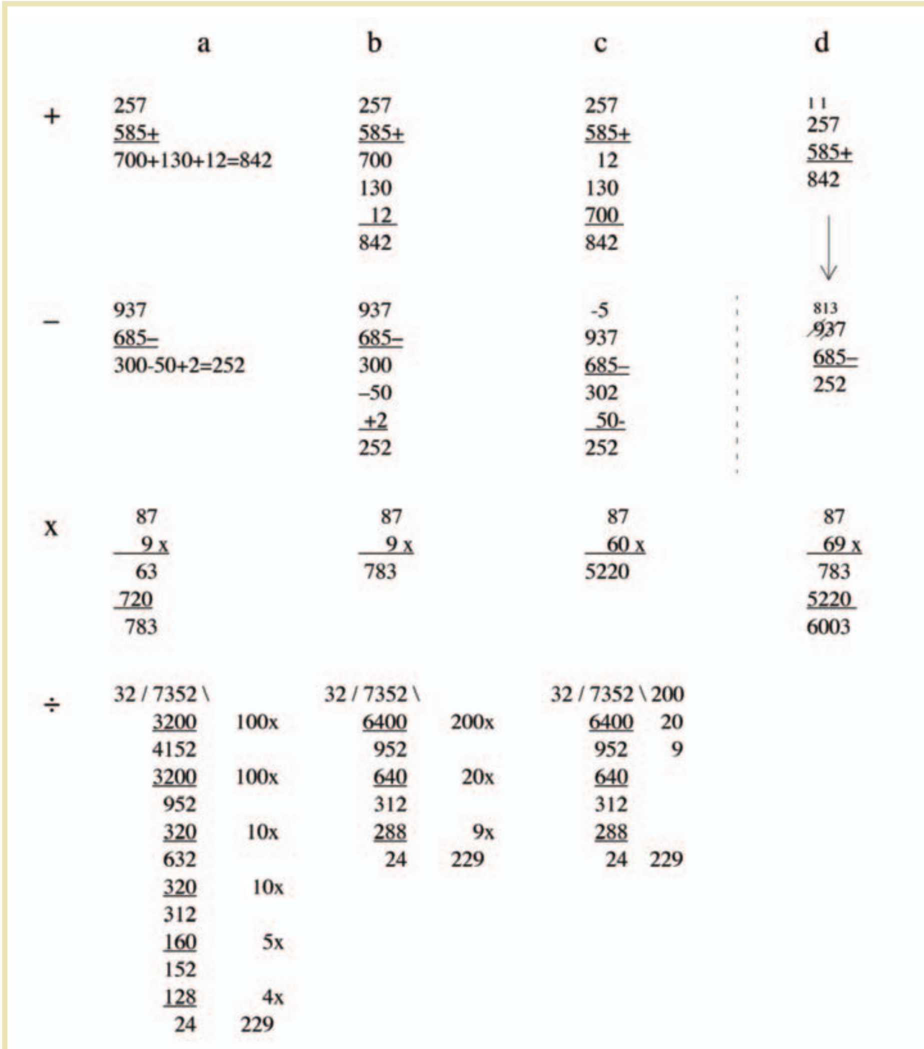


Figura 20. Trayectoria de enseñanza-aprendizaje propuesta[25] para la aritmética de números enteros en los grados superiores de primaria: del cálculo horizontal al vertical.

6 Para concluir

Con este último ejemplo concluye este recorrido guiado. Confiamos en que el paisaje holandés de la educación matemática ya no sea el territorio inexplorado que pudo haber sido antes que el lector iniciara el recorrido. Los educadores holandeses en matemáticas tienen, obviamente, una relación especial con los paisajes. Freudenthal (1991) puso al último capítulo de su último libro el título de "El paisaje de la educación matemática". Es probable que este capítulo haya inspirado a Treffers cuando adaptó un muy conocido poema del famoso poeta holandés

[25] Este esquema se desarrolló en las primeras etapas del trabajo sobre la trayectoria de enseñanza-aprendizaje sobre números enteros para los grados superiores de primaria. De entonces a la fecha ha cambiado un poco.

Hendrik Marsman para resumir la educación matemática en las escuelas primarias holandesas:[26]

Cuando pienso en Holanda

Cuando pienso en Holanda
veo largos ríos
atravesando lentamente
las infinitas planicies,
como una sucesión de líneas numéricas
que dibujan el horizonte.
Veo bloques aritméticos
de bases múltiples
que descienden y se pierden
en el inmenso espacio abierto
a través de esta tierra
de matemáticas reales.

Basado en "Denkend aan Holland" de H. Marsman
Adaptado al inglés por A. Treffers, 1996.
Versión en español: *Correo del Maestro*

[26] El poema adaptado al inglés fue presentado por Adri Treffers al comienzo de un encuentro internacional sobre educación matemática celebrado en la Universidad de Leiden del 14 al 15 de diciembre de 1996.

Referencias

DE GOEIJ, E., Nelissen, J y M. van den Heuvel-Panhuizen, TAL, *Tussendoelen Annexleerlijnen, Informe de consultoría* [TAL, Anexo de Metas Intermedias Trayectorias de Enseñanza-Aprendizaje], Instituto Freudenthal, Utrecht, 1998.

DE JONG, R., *Wiskobas in methoden* [Wiskobas en libros de texto], OW & OC, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1986.

DE LANGE, J., *Mathematics, Insight and Meaning*, OW & OC, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1987.

DE WIT, C.N.M., *Over tussendoelen gesproken. Tussendoelen als component van leerlijnen* [Hablando sobre metas intermedias. Las metas intermedias como componente de trayectorias de enseñanza-aprendizaje]. 's-Hertogenbosch: KPC Onderwijs Innovatie Centrum, 1997.

DONALDSON, M., *Children's Mind*, Fontana, Londres, 1978.

FREUDENTHAL, H., "Why to Teach Mathematics so as to Be Useful", *Educational Studies in Mathematics*, 1, 1968, pp. 3-8.

———, H., "Geometry Between the Devil and the Deep Sea", *Educational Studies in Mathematics*, 3, 1971, pp. 413-435.

———, H., *Mathematics as an Educational Task*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1973.

———, H. "Antwoord door Prof. Dr. H. Freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat" [Discurso del Prof. H. Freudenthal al serle otorgado un doctorado honorario], *Euclides*, 52, 1977, pp. 336-338.

———, H., "Structuur der wiskunde en wiskundige structuren; een onderwijskundige analyse" [Estructura de las matemáticas y estructuras matemáticas; un análisis educativo], *Pedagogische Studiën*, 56 (2), 1979, pp. 51-60.

———, H., *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

GRAVEMEIJER, K., M. van den Heuvel-Panhuizen, G. van Donselaar, N. Ruesink, L. Streefland, W. Vermeulen, E. Te Woerd y Van der Ploeg, D., *Methoden in het reken-wískundeonderwíjs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek* [Serie de libros de texto en educación matemática, un contexto rico para investigación comparativa]: CD-ß Press/Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1993.

GRAVEMEIJER, K.P.E., *Developing Realistic Mathematics Education*, CD-ß Press/Instituto Freudenthal, Utrecht, 1994.

GROOT., W., *Draagvlak voor tussendoelen* [Apoyo para metas intermedias], Den Haag: OC y W, 1999.

HUGHES, M., *Children and Number. Difficulties in Learning Mathematics,* Basil Blackwell Ltd., Oxford, 1986.

MENNE, J., *Oefenen in de rekenkring* [Practicando en el círculo aritmético], Instituto Freudenthal (publicación interna), Utrecht, 1996/1997/1998.

MULLIS, I. V. S., M. O. Martin, A. E. Beaton, E. J. Gonzalez, D. L. Kelly y T. A. Smith, *Mathematics Achievement in the Primary School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS), MA: Boston College, Chestnut Hill, 1997.

SLAVENBURG, A. y P. J. Krooneman, *Leerlijnen en tussendoelen in het reken-wískundeonderwijs gepeild* [Trayectorias de enseñanza-aprendizaje y metas intermedias en la educación matemática puestas a prueba], Regioplan, Amsterdam, 1999.

STREEFLAND, L., *Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron* [Las matemáticas como actividad y la realidad como fuente], Nieuwe Wiskrant, 5, 1, 1985, pp. 60-67.

———, L., *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

———, L., "Learning from history for teaching in the future", Conferencia impartida en la ICME-8 en Sevilla, España, 1996.

TREFFERS, A., *Wiskobas doelgericht* (Wiskobas encaminado a metas], IOWO, Utrecht, 1978.

———, Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

———, "Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990", en L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, CD-ß Press / Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1991.

———, E. de Moor y E. Feijs, *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel I. Overzicht einddoelen* [Diseño de un programa nacional para la educación matemática en las escuelas primarias. Parte I. Perspectiva general de las metas], Zwijsen, Tilburg, 1989.

———, L. Streefland y E. de Moor, *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3B. Kommagetallen* [Diseño de un programa nacional para la educación matemática en las escuelas primarias. Parte 3B. Números decimales], Zwijsen, Tilburg, 1996.

———, Conferencia no publicada presentada en la Panama Spring Conference en Noordwijkerhout, 1999.

———, M. van den Heuvel-Panhuizen y K. Buys (eds.), *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele Getallen. Onderbouw Basisschool* [Niños pequeños aprenden aritmética. Anexo de Metas Intermedias Trayectorias de Enseñanza-aprendizaje. Números enteros. Grados más bajos de la escuela primaria], Wolters-Noordhoff, Groninga, 1999.

VAN DEN BOER, C., "Allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs" [Niños inmigrantes en la educación matemática], *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs*, 15, 4, 1997, pp. 27-34.

VAN GALEN, F., M. Dolk, E. Feijs, V. Jonker, N. Ruesink y W. Uittenbogaard, *Interactieve video in de nascholing rekenwiskunde* [Video interactivo en la capacitación de profesores en servicio], CD-ß Press/OW & OC, Universidad de Utrecht, Utrecht, l99l.

———, F. y E. Feijs, "A mathematics lesson on videodisc", en L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, CD-ß Press/Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1991.

VAN DEN BRINK, J. F., *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen* [Educación realista en aritmética para niños pequeños], OW & OC, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1989.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. y F. Goffree, *Zo rekent Nederland* [Cómo hacen aritmética los holandeses], SLO, Enschede, 1986.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., "A representational model in a long-term learning process — the didactical use of models in Realistic Mathematies Education", Trabajo presentado en la AERA de 1995 en San Francisco, 1995.

———, Assessment and realistic mathematics education, CD-ß Press/Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1996.

———, "Realistic Mathematics Education: Work in progress", en T. Breiteig y G. Brekke (eds.), *Theory into practice in Mathematics Education*, Facultad de Matemáticas y Ciencias, Kristiansand (Noruega), 1998.

———, y H. J. Vermeer, *Verschillen tussen meisjes en jongens bij het vak rekenen-wiskunde op de basisschool*. [Diferencias entre niñas y niños en las matemáticas de escuela primaria], C-ß Press/Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1999.

———, "Realistic Mathematics Education in the Netherlands", en J. Anghileri (ed.), *Principles and practice in arithmetic teaching* (pp. 49-63), Open University Press Buckingham, Filadelfia, 2001.