El proceso de matematizacion progresiva

EN EL TRATAMIENTO DE PATRONES

Ana Bressan ▪ María Fernanda Gallego

En los dos últimos decenios ha habido un cambio significativo en las matemáticas (su ámbito de aplicación y el medio por el que se lleva a cabo), y en la comunidad acerca de la comprensión de lo que es saber y hacer matemáticas. Una serie de informes y artículos recientes han intentado caracterizar la naturaleza de las matemáticas contemporáneas, y señalar los cambios en la instrucción que se derivan de la propuesta de reconceptualización. La idea principal de esta nueva conceptualización es pensar las matemáticas, en términos generales, como "la ciencia de los patrones".[1]

El objetivo de este documento es doble: por un lado el trabajo con sucesiones o secuencias como fuente de generalización y de usos de modelos en distintos marcos, teniendo en cuenta que estos procesos constituyen una habilidad de razonamiento esencial para la resolución de problemas y, por el otro, resaltar el valor del estudio de patrones para la introducción del concepto significativo de variable y del lenguaje algebraico, como tránsito desde el álgebra informal que puede comenzar desde la escolaridad primaria al álgebra formal de la escuela secundaria.[2]

Introducción

La matemática actual, a través de sus procesos de modelización, pone en evidencia patrones escondidos que nos ayudan a comprender el mundo en que vivimos. Más que aritmética o geometría, la matemática hoy se interpreta

---

1 Hoffman, *Everybody Counts,* National Research Council, Washington, 1989.
2 Van Amerom, B., *Reinvención del álgebra*, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1998.
Van der Kooij, H., *Algebra: A tool for Solving Problems*, Universidad de Utrecht, Utrecht, 2001.

como una disciplina diversa que trata con datos, medidas y observaciones provenientes de la ciencia, con inferencia, deducción y prueba y con modelos matemáticos de los fenómenos naturales, de la conducta humana y de los sistemas sociales. El proceso de hacer matemática va más allá que calcular o deducir, implica la observación de patrones, la comprobación de conjeturas y la estimación de resultados.

La búsqueda de regularidades se considera un contenido procedimental general y de carácter transversal respecto a todos los contenidos de la matemática (aritméticos, geométricos, de proporcionalidad, estadísticos, probabilísticos…) y de las otras disciplinas, tanto naturales como sociales. De hecho, la ciencia se construye sobre la investigación de regularidades y sus posibilidades de generalización.

> La disciplina intrínseca en las proporciones y en los patrones de formación de los fenómenos naturales se manifiesta también en la mayoría de las obras humanas clásicas y armoniosas, y evidencia el vínculo existente entre las cosas. Los límites de la disciplina nos permiten vislumbrar la armonía del cosmos y tomar parte en ella, tanto en lo que se refiere al mundo físico como a nuestro modo de vivir.[3]

Es el hombre quien busca, experimenta, describe, crea y generaliza propiedades y relaciones nacidas a partir de la reflexión y abstracción, buscando regularidades y patrones como medios para organizar su realidad.[4]

En general, toda regularidad del entorno puede ser modelizada en términos matemáticos, ya sean aritméticos, algebraicos o funcionales, del azar o de la estadística, con gráficos o fórmulas, con elementos de la geometría, etcétera.

Los siguientes son ejemplos de regularidades dentro del mundo natural, social y artificial que han dado pie o son fuente de aplicación de modelos matemáticos:

- el movimiento de los cuerpos,
- el sistema solar,
- el cuerpo humano,
- las plantas, las flores y los animales,
- la normalización de los sistemas de unidades desarrolladas por los diversos países,
- el diseño de muebles, vajilla y la arquitectura en general,
- los juegos de azar, etcétera.[5]

---

3 Doczi, G., *El poder de los límites. Proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura*, Troquel, Buenos Aires, 1996, p. 1.

4 Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task,* Reidel, Dordrecht, 1973.

5 Para ampliar este tema se sugiere consultar, por ejemplo, a Theoni Pappas, *El encanto de la matemática y La magia de la matemática*; Adrián Paenza, *Matemática…¿estás ahí? Episodio 1 y 2*; Gardner M., *Nuevos pasatiempos matemáticos*; Doczi, G. *El poder de los límites*, o en www.wikipedia.org.

Figura 1. La forma pentagonal estrellada y su simetría asociada se aprecia en flores y frutos de variadísimas plantas.

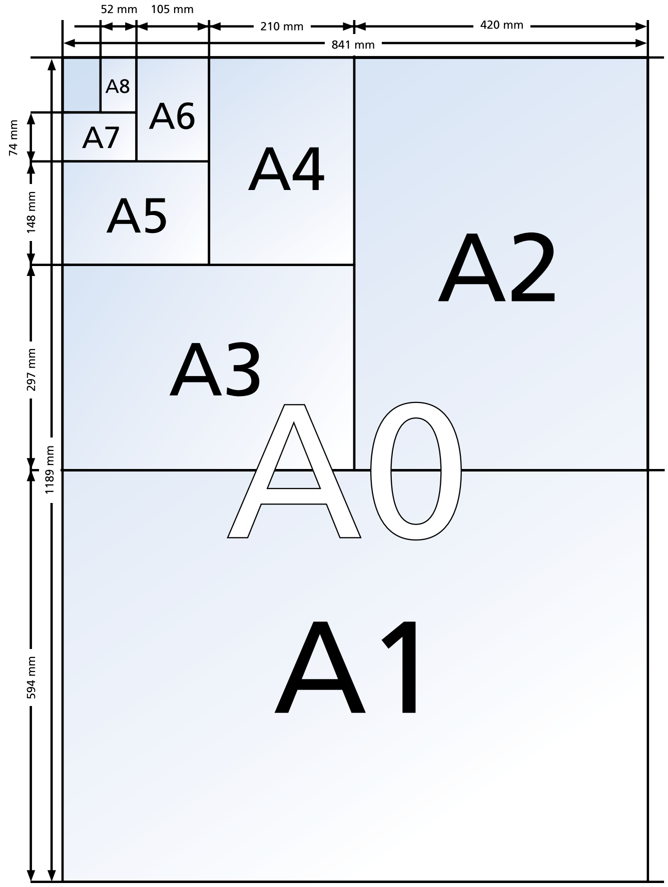


Figura 2. La norma DIN fija un patrón en la industrialización del papel con base en rectángulos que verifican la razón áurea.

Pero la matemática no sólo se brinda para modelizar otras realidades sino que en sí misma encierra regularidades. Ella se construye con base en la generalización de patrones. Un ejemplo interesante lo constituyen las sucesiones que se presentan en la figura 3, y que poseen múltiples propiedades dentro de la matemática misma y son aplicables como modelos para explicar tanto fenómenos naturales como artificiales.

Sucesión de Fibonacci	Sucesión de Pell	Sucesión de Padovan
$a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$	$a_{n+1} = a_{n-1} + 2a_n$	$a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n+2}$
con $a_o = a_1 = 1$	con $a_o = a_1 = 1$	con $a_o = a_1 = a_2 = 1$
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …	1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, …	1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, …
$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1618\ldots$ es el número áureo: $\phi(\text{phi}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1618\ldots$	$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 24142\ldots$ es el número de plata: $\theta(\text{theta}) = 1 + \sqrt{2} = 24142\ldots$	$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 13247179\ldots$ es el número de “plástico”:[6] P= 13247179… (descubierto por van deer Laan (1904-91))[7]

Figura 3. Ejemplos de generalización de patrones.

Esta mirada unificadora de las matemáticas impulsa el estudio de tópicos tradicionales de enseñanza en términos de patrones.[8] En particular, en los currículos de enseñanza primaria pueden trabajarse con este enfoque unificador temas como:

- la *proporcionalidad* (donde aparecen razones equivalentes, la teoría de las proporciones y las razones notables, el análisis de gráficos, etcétera),
- los *algoritmos* (las cuentas elementales, los criterios de divisibilidad, la regla de tres o el cálculo de mayor divisor común, etcétera),
- los *cuerpos y figuras* (las clasificaciones por sus propiedades, la relación de Euler en poliedros, el teorema de Pitágoras, las isometrías, etcétera),

[6] El número áureo y el plástico son *números mórficos* ya que poseen la propiedad de que existen dos números k y l para los que se cumple que $p + l = p^k$ y $p - l = p^l$. Para k = 2 y l = 1 se obtiene la razón áurea. Para k = 3 y l = 4, el número de plástico y son los únicos *números mórficos* conocidos (*ver Morphic numbers*).

[7] http://www.infovis.net/printMag.

[8] De hecho, en la mayoría de los currículos actuales aparece el tema patrones (identificar, extender, crear, generalizar), tanto numéricos como geométricos, aunque no suelen considerarse explícitamente patrones relacionados con el eje de medida y de la probabilidad.

- las *sucesiones numéricas* (las escalas numéricas, las tablas de suma y multiplicación, las progresiones, etcétera),
- la *medida* (las relaciones del SIMELA, las escalas métricas, las conversiones entre cantidades, etcétera),
- la *probabilidad y la estadística* (la ocurrencia de sucesos, la regularidad de los resultados estadísticos, etcétera).

Fundamentación

El descubrimiento de las leyes que rigen patrones, y su reconstrucción con base en leyes dadas, cumple un papel fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático y de otras ciencias. Ambas actividades están vinculadas estrechamente al proceso de *generalización*, que forma parte del razonamiento inductivo, entendido tanto como pasar de casos particulares a una propiedad común (conjetura o hipótesis), como transferir propiedades de una situación a otra.

La generalización se construye gracias a la abstracción de invariantes esenciales. Las propiedades abstraídas son más bien relaciones entre objetos que objetos mismos,[9] y la descontextualización es el proceso principal de la generalización.[10]

El estudio de patrones y la generalización de los mismos abren las "puertas" para comprender la noción de variable[11] y de fórmula, así como para distinguir las formas de razonamiento inductivo y deductivo[12] y el valor de la simbolización matemática.

---

[9] Zazkis R. y P. Liljedahl, "Generalización de patrones: la tensión entre el pensamiento algebraico y la notación algebraica", en *Educational Studies in Mathematics* núm. 49, Kluwer Academic Publisshers, Netherlands, 2002, p. 381.

[10] Joshua, S. y J. Dupin, *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*, Ediciones Colihue, Buenos Aires, 2005, p. 285.

[11] English y Warren (1998) abogan por el enfoque a través de patrones para la introducción del concepto de variable. Ellos plantean que, tradicionalmente, las variables son introducidas como incógnitas de ecuaciones, donde ellas no poseen naturaleza variable (en Zazkis, 2002, p.382). El enfoque a través del estudio de patrones también provee la oportunidad de que los estudiantes observen y verbalicen sus generalizaciones y las registren simbólicamente. Enfoque que comparte Sessa C., 2005, pp. 67 y ss.

[12] Entenderemos por *razonamiento* los procesos de pensamiento que permiten la extracción de conclusiones a partir de cierta información. La *inducción* es el método que usan la mayoría de las ciencias para corroborar que ciertas proposiciones son verdaderas. El razonamiento inductivo se basa en la elaboración de conjeturas o hipótesis nacidas de la *generalización* de propiedades que se dan en un conjunto de observaciones. El razonamiento deductivo, en cambio, implica la aceptación de una cuestión general para extraer conclusiones relativas a casos particulares. En matemáticas, se necesita apelar a la aceptación de proposiciones no demostrables (postulados), definiciones o teoremas anteriormente demostrados, que se toman como premisas, demostrándose la verdad de sus conclusiones como derivación "necesaria" de las mismas. *Demostrar una generalización* o conclusión requiere la deducción que la independiza de la experiencia y la torna universal.

Es preciso distinguir la generalización de la formalización entendida como el uso riguroso de escritura simbólica. Creemos necesario diferenciar simbolismo algebraico de pensamiento algebraico. En la etapa de álgebra preformal, se pensará el simbolismo como un lenguaje capaz de condensar la presentación de un argumento y que se constituye en medio para resolver problemas.

> Una tendencia más reciente entre los investigadores es separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico. Esta consideración está fomentada por dos factores: (1) el reconocimiento de la posibilidad de la manipulación de símbolos sin pensar y (2) un movimiento hacia el "álgebra temprana", es decir, focalizada en la estructura antes que en el cálculo, en la escuela elemental. Para Kaput y Blanton (2001), generalizar y formalizar patrones y restricciones es una de las formas del "componente complejo" del razonamiento algebraico (p. 346). Ellos ven la "generalización (la cual incluye la argumentación) y la expresión progresivamente sistemática de tal generalidad [...] como fundamental en todo el trabajo que hacemos [en álgebra]'(*Ibid.*). Más específicamente, por razonamiento algebraico Kaput (1999) hace referencia a la actividad de los estudiantes de generalizar sobre datos y relaciones matemáticas, estableciendo esas generalizaciones a través de conjetura y argumentación y expresándolas en formas cada vez más formales.[13]

El enfoque hasta aquí expuesto es parte fundamental de la corriente didáctica conocida como Educación Matemática Realista, la cual considera la matemática como una actividad humana de organización de la realidad y de la matemática misma.[14] En ella se considera la enseñanza del álgebra como un proceso de reinvención guiada, que no ha de centrarse en la formalización prematura y la manipulación sintáctica rigurosa de expresiones algebraicas, sino que debe atender a los estadios preformales en los que se enfatizan los aspectos semióticos y pragmáticos en el uso de estas expresiones.

Será la resolución de problemas mediante el uso de relaciones expresadas a través de patrones, expresiones, fórmulas, ecuaciones, sistemas de ecuaciones y gráficas lo que dará pie a pensar el álgebra desde un punto de vista funcional, que luego podrá ser formalizada con rigor. Su propuesta es abordar el álgebra no como un sistema preconstituido de objetos, reglas y operaciones, sino como la actividad de *algebrizar* situaciones problemáticas, de modo de mantener accesible el regreso a las fuentes experienciales de las que emergieron las expresiones algebraicas. Esto permite que los contextos y las situaciones

---

[13] Zazkis R. y P. Liljedahl, *op. cit.,* p. 398.

[14] Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht, 1973; *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Kluwer, Dordrecht, 1983 y *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Kluwer, Dordrecht, 1991.

den sentido y justifiquen las transformaciones que se realizan en el dominio de esta disciplina.[15]

La generalización[16] es un paso esencial en el proceso de matematización del que habla Freudenthal[17] y se da en el pasaje de "modelos de" a "modelos para". Es decir, los modelos desde esta corriente se originan a partir de las soluciones informales de los alumnos ("modelo de" una situación dada, particular) y funcionan como puentes hacia niveles superiores (cuando se constituyen en "modelos para" situaciones homólogas a la situación original).[18] Para hacer posible esta transición es necesario no sólo que las situaciones iniciales sean imaginables y accesibles, estén cargadas de sentido y posean el potencial para ser matematizadas a varios niveles, sino también que la enseñanza dé lugar a procesos progresivos de generalización, simbolización y formalización, incluida la reflexión acerca de los significados y los modos de uso de los modelos en cuestión.

Suelen existir obstáculos en muchos docentes de educación primaria y estudiantes de IFD, con los procesos de generalización en el estudio de patrones. Es común que detecte regularidades, pero no que puedan encontrarle sus múltiples formas de uso a lo largo de la escolaridad y en los distintos ejes curriculares.[19] Tampoco les resulta sencillo llegar a plantear el término general de un patrón o secuencia en función de un conjunto de ejemplos, describir con distintos lenguajes su ley de formación y verificar esa ley determinando su dominio de validez.

A través de nuestras experiencias y consulta de otras investigaciones,[20] encontramos que en los procesos de generalización de secuencias, los maestros:

---

[15] Freudenthal, H. *op. cit.*; Van Amerom B., *Reinvención del álgebra*, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1998; Van der Kooij, H.: *Algebra: A tool for Solving Problems*, Universidad de Utrecht, Utrecht, 2001. Esta mirada también está sostenida en la actualidad por la teoría didáctica de origen francés (*ver* Sessa, 2005) y la Teoría Antropológica de la Didáctica, de Chevallart (*ver* Bolea, 1998).

[16] Generalizar implica para Freudenthal un concepto distinto de transferir. Cuando se habla de generalizar en la EMR no se entiende como la aplicación de un procedimiento conocido a situaciones nuevas (esto sería aplicar o transferir según su característica de novedad para el alumno), sino que implica conectar varias situaciones reconociendo características similares que permiten que se clasifiquen dentro de un determinado tipo. Al mismo tiempo, el proceso de solución (abarcativo) puede ser estructurado y, por lo tanto, la generalización toma forma de una actividad de organización, como una forma de matematización (Gravemeijer, 1994, p.104).

[17] Freudenthal, H. *op. cit.*;

[18] Lo que a Freudenthal (1991) le interesa, desde el punto de vista didáctico, no son los modelos como sistemas axiomáticos o estructuras cognitivas sino como el resultado de la modelización en tanto actividad de idealización que ocupa un lugar central en los procesos de matematización. "El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada a fines de volverla susceptible de un tratamiento matemático formal" (p. 34).

[19] Zazkis R. y P. Liljedahl, *op. cit.,* experiencias GPDM.

[20] Zazkis R. y P. Liljedahl, *op. cit.;* Zon, N., "Análisis a priori de una secuencia sobre procesos recurrentes para la Educación Básica", en *Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral,* núm. 3, 2006; Sessa, C., *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*, Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2005.

- poseen poca flexibilidad para modelizar con distintas representaciones. Por ejemplo, se atienen estrictamente a los dibujos y no pueden cambiar de marco cuando los patrones o las secuencias son geométricas o figurativas, o bien suelen cometer errores al traducir del lenguaje coloquial al algebraico o no admiten distintas formas de escritura para una misma propiedad o conjetura.
- no pueden representar el término *enésimo* como una expresión simbólica (suelen expresarlo como "n"; pero "n" es la simbolización válida para el término general de cualquier secuencia).
- no pueden comprender que, por ejemplo, 2n + 1 no representa una operación sino un tipo de número.
- hacen transferencias indebidas: lo que es válido para un caso particular lo es para cualquier caso o, lo que es válido para una secuencia, se admite para otra con distintas características.
- trabajan a nivel exclusivamente numérico, con ausencia de contextos que permitan la comprobación de la aplicabilidad de una propiedad extraída.
- les cuesta abandonar la percepción original una vez que perciben determinado patrón.
- tienden a linealizar secuencias, aunque no sean aritméticas.
- si bien pueden generar el próximo elemento en una secuencia en base al anterior, no son capaces de ver la estructura general de todos los elementos, es decir, la ley de formación del patrón.

Esto hace a la importancia del tratamiento del tema tanto en las aulas de institutos como en las escuelas.

Secuencias o patrones

Como expresáramos, hoy aparece en el currículo el tópico *patrones*. Los patrones o secuencias forman parte de lo que hoy se conoce como matemática discreta.[21] La matemática discreta no es una nueva rama de la matemática sino que está presente en muchos de los tópicos curriculares: "estos tópicos incluyen técnicas de contar, razonamiento lógico, uso de patrones (iteración, recursión),[22] algoritmos, probabilidades y redes".[23] Ella colabora con el de-

[21] La matemática discreta es la parte de las matemáticas encargada del estudio de los conjuntos discretos: finitos o infinitos numerables. En ella se incluyen los siguientes temas de estudio: Lógica; Teoría de conjuntos; Teoría de grupos; Teoría de grafos; Teoría de autómatas finitos; Combinatoria y nociones de probabilidad; Análisis de ciertos algoritmos; Teoría de la información (extraído de www.wikipedia.org).

[22] Iteración indica repetición o reiteración (DRAE, 1992).

[23] Zalewski, citado en Castro Martínez, E., *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales,* Mathema, Comare, Granada, 1995, p. 20.

sarrollo de variadas formas de razonamiento, ya que le son propios los procesos de inducción en la búsqueda por dar coherencia a lo observado (observación, experimentación, generalización, particularización, analogía y sus formas de prueba: análisis de todos los casos, contraejemplos, aplicaciones de resultados generales a casos particulares…). Y, si bien la matemática pensada formalmente es deductiva, el proceso de construcción del conocimiento matemático comparte características de una ciencia experimental inductiva y los docentes por lo general no conocen bien las diferencias entre estos conceptos.

Los investigadores distinguen entre diferentes tipos de patrones, por ejemplo, los clasifican en numéricos pictóricos, geométricos, computacionales, informáticos, lineales y cuadráticos, repetitivos, recursivos, etc. Paenza menciona otra perspectiva para su clasificación: "mentales o visuales, reales o imaginarios, estáticos o dinámicos, cualitativos o cuantitativos, puramente utilitarios o no. Pueden emerger del mundo que nos rodea, de las profundidades del espacio y del tiempo o de los debates internos de la mente".[24]

En este documento se trabajarán secuencias o patrones de repetición y de recursión, entendiéndose por *patrón* una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo una regla (algoritmo), ya sea de repetición o de recurrencia. Es decir, se usan los vocablos *patrones* o *secuencias* indistintamente (otros autores utilizan el término *patrón* para designar estrictamente el núcleo o unidad de la secuencia).

Son secuencias o patrones de repetición aquellos en los que los distintos elementos se presentan en forma periódica. Existen y se pueden crear diversos patrones de repetición teniendo en cuenta su estructura de base o núcleo, por ejemplo, si el núcleo es de la forma:

- AB, se repiten dos elementos alternadamente. Por ejemplo: 1-2, 1-2, 1-2,…; cuadrado-círculo, cuadrado- círculo…; etcétera.
- ABC, se repiten tres elementos. Por ejemplo: do-re-mi, do-re-mi,… o rojo-azul-amarillo, rojo-azul-amarillo…)
- AABB, se repite dos veces un elemento y a continuación dos veces otro. Por ejemplo: 1-1-2-2, 1-1-2-2 o rojo-rojo-azul-azul, rojo-rojo-azul-azul…)
- ABA, se repite en orden el primero, el segundo y el primero. Por ejemplo: 1-2-1, 1-2-1,… o rojo-azul-rojo, rojo-azul-rojo…

El análisis de frisos, figuras en bailes folklóricos, diseños de pisos, decoraciones en puertas, vajillas, telas, papeles, de bisutería, ritmos musicales, etc., puede dar lugar al estudio de estos patrones desde edades tempranas y trabajarse en toda la escolaridad haciendo uso de distintos modelos matemáticos con complejidad creciente.

[24] Paenza, A., *Matemática…¿estás ahí?*, Siglo XXI, México, 2005, p. 189.

Resulta importante rescatar en estos patrones la forma de la unidad o el núcleo, ya que expresa la manera de construirse de la sucesión. Los patrones de repetición, según Threlfall,[25] además de conducir a los alumnos a la observación de regularidades y secuencias, son un medio para trabajar con símbolos, un paso conceptual fundamental para el álgebra y un contexto para la generalización. Este autor afirma que los niños pequeños pueden tener éxito en generar o continuar patrones de repetición usando un enfoque procedimental o rítmico. Sin embargo, como paso fundamental hacia la generalización y el álgebra, "es esencial ver patrones particulares dentro del patrón general, esto es, percibir la unidad o núcleo en un patrón de repetición. Este objetivo no puede lograrse trabajando sólo en los primeros grados, cuando los alumnos aún no son capaces de lograr la percepción de la unidad de repetición".[26]

Son patrones de *recurrencia* aquellos en los que el núcleo cambia con regularidad. Cada término de la sucesión se expresa en función de los anteriores, de cuyo análisis se infiere su ley de formación. Por ejemplo, son patrones de recurrencia:

a) un salto adelante, un salto atrás, dos saltos adelante, dos saltos atrás, tres saltos adelante, tres saltos atrás...).
b) xx xxxx xxxxxx, lo que traducido numéricamente podría ser: 2, 4, 6, 8…,
   - 2, 2 + 4, 2 + 4 + 6, 2 + 4 + 6 + 8…, lo que puede expresarse como: 2, 6, 12, 20…
   - 0, 10, 20, 30, 40… lo que habitualmente se conoce como la escala del 10.
   - 1, 3, 9, 27, 81… que es la sucesión de cubos perfectos.
   - 1, 1, 2, 3, 5, 1, 8, que se conoce como secuencia de Fibonacci, cuyos números se hallan a menudo en la naturaleza (por ejemplo, el número de pétalos de las azucenas, los lirios o los iris son números de Fibonacci).

Dentro de los patrones de recursión se encuentran las llamadas progresiones aritméticas y geométricas, trabajadas apenas en los últimos años del nivel secundario, aunque muchísimos temas de la aritmética básica las encierran. Los arreglos de números y las tablas de operaciones, las escalas, los sistemas de numeración posicional, el sistema de medida, etc., son ejemplos de ellas.

Muchas veces resulta interesante encontrar la suma de un número determinado de términos de una sucesión. Esas sumas se denominan *series* y sus resultados también pueden desembocar en un patrón, que también se caracteriza por un término general y una ley de formación.

[25] 1999, citado en Zazkis R. y P. Liljedahl, *op. cit.*
[26] *Idem*, p. 380.

Algunas consideraciones sobre la enseñanza del tema

A continuación se presenta un texto extraído de: *Las regularidades. Fuente de aprendizajes matemáticos,*[27] con sugerencias importantes para el trabajo de patrones y un ejemplo para aclarar la potencialidad matemática extraíble de su estudio.

El tema patrones es relevante y rico…, pero; ¿cómo enseñarlo?…

Respecto de su enseñanza se ha de tener en cuenta:

a) La identificación de patrones requiere el reconocimiento de semejanzas y diferencias y la detección de los rasgos fundamentales que conforman una estructura de aquellos no esenciales a la misma. El trabajo con patrones incluye procedimientos de distinto orden de dificultad:
   - de reproducción (copia de un patrón dado),
   - de identificación (detección de la regularidad),
   - de extensión (dado un tramo de la sucesión el alumno debe extenderla de acuerdo al núcleo que la rige),
   - de extrapolación (completamiento de partes vacías),
   - de traslación (utilización del mismo patrón sobre propiedades diferentes, por ejemplo: cambiar formas por colores, cambiar una representación visual por una auditiva, etcétera).

   Las actividades con patrones revisten la característica de la resolución de problemas ya que pueden ser formuladas de modo que el alumno las reconozca como situaciones problemáticas y así estimular la generación de hipótesis, su comunicación y comprobación y la refutación o confirmación de las mismas (lo cual acerca a los alumnos al modo de pensamiento que las ciencias requieren).

b) El trabajo con patrones suele comenzarse en el Nivel Inicial junto con las actividades de clasificación y seriación, pero no se continúa con sistematicidad en la escolaridad básica y no se reconoce su potencialidad psicológica, lógica y matemática, probablemente por desconocimiento de la riqueza que este material encierra.

   Cabe aclarar que no estamos indicando que se tienen que enseñar patrones como automatismos para que luego los alumnos los apliquen. Lo que corresponde es que los niños vayan construyendo comprensivamente recursos que les permitan encontrar regularidades, interpretar sus procesos de gestación y usarlos con propiedad.

   Es interesante que este contenido sea desarrollado a lo largo de todo el año y de todos los años y en relación con los otros contenidos que se estén tratando, ya sea de aritmética

[27] Bressan, A. y B. Bogisic, *Las regularidades: fuente de aprendizajes matemáticos*, Documento Curricular del Consejo de Educación de Río Negro, 1996 (en www.gpdmatematica.org.ar).

como de geometría, medida o estadística y probabilidades, sin descuidar el poder ejemplificar regularidades con otros contenidos de las áreas de ciencias naturales, ciencias sociales, educación física, plástica, etcétera.

c) En principio es conveniente trabajar con material manipulativo antes de pasar al plano gráfico, ya que es más fácil probar alternativas de extensión, completamiento o transferencia de patrones por la movilidad de los elementos.

d) Resulta interesante que los alumnos que finalicen el primer ciclo sean capaces de descubrir la forma o el núcleo del patrón y si es posible codificarlo, por ejemplo, con letras. Esto les posibilitará el cálculo de cualquier elemento del patrón sin necesidad de tener que construirlo. En un patrón de la forma AAB, ¿cuál sería el décimo elemento? Este puede "adivinarse" sin completar el patrón, basta escribir AABAABAAB*A* y el alumno estará en condiciones de responder con propiedad a la pregunta diciendo que resulta igual al primer término del patrón o la sucesión dada. En el segundo ciclo los alumnos serán capaces de usar otros recursos para determinar el elemento con base en relaciones numéricas entre los mismos, por ejemplo, pensado el patrón como 2A1B el décimo elemento no puede terminar en B por no ser múltiplo de 3.

Una vez que los alumnos han comprendido cómo se forman los patrones de repetición, es posible iniciarlos en los patrones de recursión. También acá será necesario trabajar con manipulativos antes de pasar al plano gráfico y al tratamiento aritmético o geométrico.

Una tarea importante es pasar de patrones concretos o gráficos a las tablas numéricas para llegar a descubrir que los números también se pueden organizar respetando leyes que pueden ser descubiertas y representadas en distintos contextos. En este documento se proponen varias actividades sobre patrones que es posible traducir en sucesiones numéricas. Más adelante será interesante que proponiéndose tablas numéricas los alumnos modelicen los valores en contextos de figuras o agrupaciones buscando alguna disposición geométrica que les ayude a encontrar patrones.

Analicemos acá un ejemplo:

Supongamos que proponemos a los alumnos el siguiente patrón en una lámina.

```
                                          * * * * *
                              * * * *   * * * * *
                    * * *     * * * *   * * * * *
          * *       * * *     * * * *   * * * * *
   *      * *       * * *     * * * *   * * * * *
   *      * *       * * *     * * * *   * * * * * ............
```

A partir de preguntas se comienza la discusión con la clase:

- ¿Qué pueden observar en estos dibujos?
- ¿Por qué piensan que es así?
- ¿Podrían reproducirlos con fichas (frijoles, lentejas, piedritas) sobre su mesa?
- ¿Podrían agregar un término más a esta sucesión?
- ¿Cómo describirían el procedimiento utilizado?
- ¿Existe un único procedimiento o hay varios? Describirlos.
- ¿Cuál es la ley de la sucesión obtenida?

El paso siguiente será representar en una tabla los valores numéricos correspondientes a cada término de la sucesión; para ello se construirá una tabla de dos filas. En la primera se pondrá el número de orden del término en la sucesión y en la segunda el valor que de hecho posee ese término. Observando el patrón dado anteriormente sería:

1	2	3	4	5	6	7	…
2	6	12	20	30	42	?	?

Usualmente se utilizan tablas horizontales para que se correspondan con los términos del patrón, que suelen seguir el sentido de la lectura, pero también se pueden hacer tablas verticales e incluso disponer patrones en esa dirección.

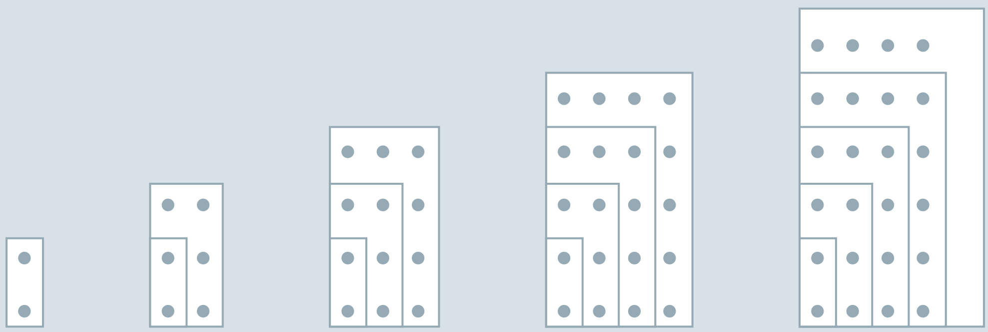
Del análisis de la tabla los alumnos podrán inferir diversas reglas de formación del patrón que les permitirán completar las casillas vacías y observar otras regularidades:

1) Si se lee la sucesión en dirección horizontal para pasar de 2 a 6 sumo 4, de 6 a 12 sumo 6, de 12 a 20 sumo 8, etc., de modo que algunos niños podrán describir el patrón numérico obtenido como un patrón creciente con primer término 2 y que se obtiene de sumar los números pares, partiendo de 4 y en forma ordenada, al número anterior.

	+4		+6		+8		+10			
2		6		12		20		30		…

Esto despertará curiosidad, pues estos mismos números 4, 6, 8, 10, etc., a su vez forman otro patrón el cual podrá trabajarse en sí mismo.

2) Volviendo al patrón graficado o representado con materiales, se les puede preguntar a los alumnos: ¿Cómo se ha pasado de una figura a otra en esta sucesión? A partir de la observación de la disposición rectangular que ha de mantenerse, los alumnos descubrirán que para pasar del primero al segundo se agregan 4, del segundo al tercero se agregan 6, del tercero al cuarto se agregan 8, del cuarto al quinto se agregan 10 y así; lo cual permite obtener mediante otro recurso la sucesión 4, 6, 8, 10…



3) Otra mirada la proveerá el análisis de los términos que se corresponden en la tabla en sentido vertical. Al 1 le corresponde el 2, al 2 le corresponde el 6, al 3 le corresponde el 12, etc. ¿Cómo es posible pasar de los términos de la primera fila a los de la segunda? Si los niños manejan las tablas de multiplicar, pronto se darán cuenta que multiplicando los valores de la primera fila por 2, 3, 4, 5, etc., respectivamente obtienen los valores de la segunda.

1	2	3	4	5	6	…
↓ x 2	↓ x 3	↓ x 4	↓ x 5	↓ x 6	↓ x 7	↓
2	6	12	20	30	42	…

También podrán observar que:

1	2	3	4	5	6	…
↓ + 1	↓ + 4	↓ + 9	↓ + 16	↓ + 25	↓ + 36	↓
2	6	12	20	30	42	…

> Y así concluir que para pasar del número de orden de la sucesión al término correspondiente, se suman determinados números que forman la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36…, de la cual se podrá encontrar el término general n^2, si es que los alumnos manejan los números cuadrados o su equivalente n x n.
>
> Como se puede notar hay varias relaciones que explican un patrón, y el trabajo de encontrarlas es sumamente fecundo tanto desde el punto de vista perceptual, como conceptual y procedimental matemático (pp. 6 a 8).

Vale destacar que es importante que los alumnos describan verbalmente las regularidades que encuentran, siendo tarea del docente hacer fluida esta verbalización y proveer a los alumnos de experiencias variadas con el objetivo de impulsarlos a usar símbolos para representar sus generalizaciones.

Al reseñar el libro de Mason y otros, Cristina Carulla[28] menciona que:

> Es necesario que los estudiantes construyan su propia álgebra. Esto es posible a través de ver patrones y regularidades. Para decirlo de otro modo, esto es posible cuando mentalmente el estudiante pueda establecer cosas en común entre los objetos que está mirando (ej. expresiones de números, diferentes tipos de figuras, diferentes tipos de actividades). Pero no basta con poder ver, también debe poder decir lo que está viendo, lo cual implica transmitir a otros lo que reconoció.
>
> […] Este proceso es fundamental en el aprendizaje y debe darse el tiempo que sea necesario en clase para que cada quien desarrolle la capacidad de ver y decir. Una vez consolidado este proceso, se inicia la etapa de registrar. Se enfrenta el estudiante a comunicar por escrito con símbolos (o dibujos) los patrones, la regularidad, lo común.[29]

A modo de cierre: ¿Por qué estudiar patrones?

En forma suscinta podemos decir que los patrones resultan un tópico esencial de la matemática, ya que:

- la búsqueda de regularidades (es decir, de similitudes y diferencias, lo que permanece y lo que cambia) es lo que permite interpretar y explicar el mundo. Sin ellas no existiría la ciencia.

---

[28] Carrulla, C., *Rutas hacia el / raíces del álgebra*, reseña del libro de J. Mason, A. Graham, D. Pimm y N. Gowar, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Revista EMA, vol. 5, núm. 1, noviembre 1999, Una Empresa Docente, Bogotá.

[29] *Idem*, p. 82.

- dan la idea de modelización,[30] idea básica en la concepción actual de la matemática. Los patrones pueden tener diferentes representaciones: geométricas, usando figuras; métricas, usando áreas; aritméticas, usando operaciones y relaciones numéricas; gráficas, usando representaciones; algebraica, usando la designación de valores desconocidos, lo que posibilita el pasaje de un modelo a otro (por ejemplo, se puede pasar de formas dibujadas que contienen una regularidad a expresiones numéricas o de números a configuraciones puntuales, o de rayas y puntos a letras, etcétera.)
- conducen al proceso de generalización, es decir, a abstraer propiedades a partir de la observación y experimentación en un conjunto de ejemplos, a hacer conjeturas, a simbolizarlas para luego demostrarlas y aplicarlas en soluciones y resultados a otros problemas.
- alientan el desarrollo de distintos puntos de vista para abordar un problema, muestran que encontrar un enfoque no implica que el problema esté concluido e, incluso, permiten generar nuevos problemas.
- son precursores de los conceptos de función, y de secuencia y serie.
- conducen a reconocer el valor del lenguaje algebraico, tanto para expresar variables como para validar conjeturas, apoyándose en las reglas de transformación de escrituras.
- favorecen el reconocimiento de que distintas escrituras algebraicas: pueden expresar la misma relación, conjetura o fórmula (expresiones equivalentes). (Las fórmulas extraídas de los patrones están más pensadas como relaciones entre números que como maneras de contar o medir).[31]
- integran distintos ejes de la matemática, ya que las regularidades están presentes en los sistemas de numeración, en las propiedades de los números, en el cálculo (mental, escrito y con calculadora), en la reproducción de figuras y cuerpos, en los sistemas de unidades de medida, en las relaciones funcionales, etcétera.

---

[30] Modelizar matemáticamente, en este contexto, significa representar elementos y relaciones existentes en un fenómeno complejo. Incluye no sólo las representaciones sino también acciones sobre las mismas e interpretaciones del significado de esas acciones en el modelo matemático y respecto al fenómeno que se modeliza (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM, 1998).

[31] Por ejemplo, las representaciones visuales de puntos, según configuraciones geométricas, representan un enlace entre la geometría y la aritmética. A través de ellas se visualizan relaciones numéricas que quedan opacadas al darse directamente los números escritos en el sistema decimal. Es necesario desterrar que lo visual no es matemático o que la visualización constituye un proceso poco válido en matemáticas. "La visualización actúa a modo de catalizador para entender y producir razonamiento inductivo. También permite entender de manera informal un razonamiento deductivo, donde el trabajo algebraico se hará más tarde" (Castro, p. 48).

En la segunda parte de este artículo se presentan una serie de actividades sobre patrones con el objetivo de promover procesos de modelización, generalización y simbolización matemática explorando modos alternativos de abordar la brecha entre la aritmética y el álgebra, y facilitar la transición paulatina desde el álgebra informal al álgebra formal, promoviendo la reflexión de los docentes acerca de las trayectorias desde contextos y situaciones en los que pueden identificarse distintos tipos de patrones hacia el trabajo formal con símbolos, expresiones y fórmulas algebraicas. ◆

Bibliografía:

BOLEA, P., "El proceso de algebrización de las matemáticas escolares", La modelización algebraica en la Enseñanza Secundaria y en el paso a la Universidad (en Google, *ver* Bolea Pilar).

BRESSAN, A. y B. Bogisic, *Las regularidades: fuente de aprendizajes matemáticos*, Documento Curricular del Consejo de Educación de Río Negro, 1996 (en www.gpdmatematica.org.ar).

CARRULLA, C., *Rutas hacia el / raíces del álgebra*, reseña del libro de J. Mason, A. Graham, D. Pimm y N. Gowar, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Revista EMA, vol. 5, núm. 1, noviembre 1999, Una Empresa Docente, Bogotá.

CASTRO Martínez, E., *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*, Mathema, Comare, Granada, 1995.

DOCZI, G., *El poder de los límites. Proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura,* Troquel, Buenos Aires, 1996.

Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task,* Reidel, Dordrecht, 1973.

____, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Kluwer, Dordrecht, 1983.

____, *Revisiting Mathematics Education: China Lectures,* Kluwer, Dordrecht, 1991.

GARDNER, M., *Circo matemático*, Alianza Editorial, Madrid, 1983.

GRUPO AZARQUIEL, *Ideas y actividades para enseñar Álgebra,* Síntesis, Madrid, 1993.

HOFFMAN, *Everybody Counts*, National Research Council, Washington, 1989.

JOSHUA, S. y J. Dupin, *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*, Ediciones Colihue, Buenos Aires, 2005, pp. 276-277.

PAENZA, A., *Matemática…¿estás ahí?,* Siglo XXI, México, 2005.

____, *Matemática…¿estás ahí? Episodio 2*, Siglo XXI, México, 2006.

SESSA, C., *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra,* Libros del Zorzal, Buenos Aires, 2005.

SOCCAS, M. y otros, *Iniciación al álgebra*, Síntesis, Madrid, 1989.

VAN AMEROM B., *Reinvención del álgebra*, Universidad de Utrecht, Utrecht, 1998.

VAN DER KOOIJ, H.: *Algebra: A tool for Solving Problems*, Universidad de Utrecht, Utrecht, 2001.

ZAZKIS R. y P. Liljedahl, "Generalización de patrones: la tensión entre el pensamiento algebraico y la notación algebraica", en *Educational Studies in Mathematics* núm. 49, pp. 379-402, Kluwer Academic Publisshers, Netherlands, 2002 (Traducción realizada por María Fernanda Gallego, GPDM, 2007).

ZON, N., "Análisis a priori de una secuencia sobre procesos recurrentes para la Educación Básica", en *Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral* núm. 3, 2006.