SUMA 48

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS

MADRID · FEBRERO 2005 · Nº. 48 · ISSN 1130-488X

SUMA 48
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las MATEMÁTICAS
Febrero 2005

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)

Diseño de la portada
Javier Alvariño
Foto: Jorge Alvariño
Diseño interior
Raquel Fraguas (NIVOLA)
Maquetación
A. Alamillo y F. Martín
Abstracts
M. Manso de Zúñiga
P. Satrústegui
Revista Suma
Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España
Fax:+(34) 912 911 879
Tirada: *6400 ejemplares*
Deposito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

Actividades de la FESPM:

SUMA 48
Febrero 2005, pp. 65-68

Cuadraturas de polígonos regulares

Si nos remontamos en la historia de la matemática hasta llegar a los antiguos griegos, nos encontramos con que en esa época los maestros se reconocían por los pocos elementos que necesitaban para solucionar los problemas; por ejemplo, en Geometría era obligatorio utilizar, solamente, regla no graduada (para trazar rectas) y compás. Esta restricción llevó a los matemáticos a estrellarse frente a los tres problemas clásicos de la matemática griega:

La trisección del ángulo: dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. Arquímedes (287–212 a. de C.) encontró un método que trisecaba muchos ángulos, pero fallaba en otros.

La duplicación del cubo: dado un cubo cualquiera, construir otro cubo que duplique el volumen del primero. El Oráculo de Apolo, en Delfos, planteó este problema a Pericles (459–429 a. de C.) indicando que la epidemia de peste que asolaba Atenas sólo desaparecería si se duplicaba el volumen del altar cúbico de Apolo.

La cuadratura del círculo: construcción de un cuadrado que tenga el mismo área que un círculo dado. La primera referencia conocida sobre este problema se debe a Anaxágoras (499 –428 a. de C.).

Hasta el siglo XIX no se llegó a demostrar la imposibilidad de resolver esos tres problemas con regla y compás, aunque tienen solución por otros métodos.

Puzzles de cuadraturas

Desde tiempo inmemorial, los puzzles y rompecabezas han ocupado un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades. En relación con las Matemáticas, muchas divisiones de figuras han estado en la base de materiales, tanto en su aspecto lúdico para jugar, como para utilizarlos didácticamente.

Existen muchos puzzles, conocidos desde hace tiempo, y que no por ello pierden su atracción. Basta citar, como muy popular, el Tangram Chino. Otro gran bloque lo constituyen las disecciones del Teorema de Pitágoras, como la muy conocida de Henry Perigal.

Los problemas geométricos de disección plantean la partición de figuras geométricas en trozos de forma que al unirse se obtengan otras figuras geométricas. En este artículo vamos a presentar unos casos particulares de disecciones geométricas: las cuadraturas. Consideraremos como cuadraturas a las divisiones que hay que realizar en una figura plana (por ejemplo un polígono regular) de forma que con las piezas obtenidas pueda construirse un cuadrado.

Desde tiempo inmemorial, los puzzles y rompecabezas han ocupado un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades.

El aspecto más matemático es conseguir dividir la figura con la que estemos trabajando utilizando regla y compás. Ante la dificultad que ello supone se suelen presentar las divisiones ya hechas, de forma que se trabaje como si fuese un puzzle, es decir, el objetivo es pasar de una figura a otra.

La primera pregunta que se puede plantear es: ¿qué polígonos regulares podremos cuadrar?

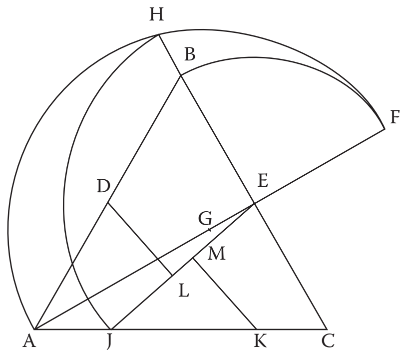
Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín *C.C. Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo *IES Camas.*
juegos.suma@fespm.org

La cuadratura del triángulo

Una primera aproximación a la respuesta viene dada por el especialista inglés en juegos Henry Ernest Dudeney (1857-1930), quien estudió la cuadratura del triángulo equilátero, presentando en 1905 en la Real Sociedad de Londres, un modelo construido en caoba.

Con regla y compás, como exigían los antiguos griegos, Dudeney encontró la manera de dividir un triángulo equilátero en cuatro piezas que forman también un cuadrado. En su diseño podemos seguir los siguientes pasos:



1. Dibujar el triángulo equilátero *ABC*.

2. Obtener los puntos medios de *AB* y *BC* (serán los puntos *D* y *E*).

3. Prolongar *AE* hasta *F*, para que *EF* = *EB*.

4. Hallar el punto medio de *AF* (será el punto *G*).

5. Con centro en *G* dibujar el arco *AF*.

6. Prolongar *EB* hasta cortar el arco, obteniendo el punto *H*.

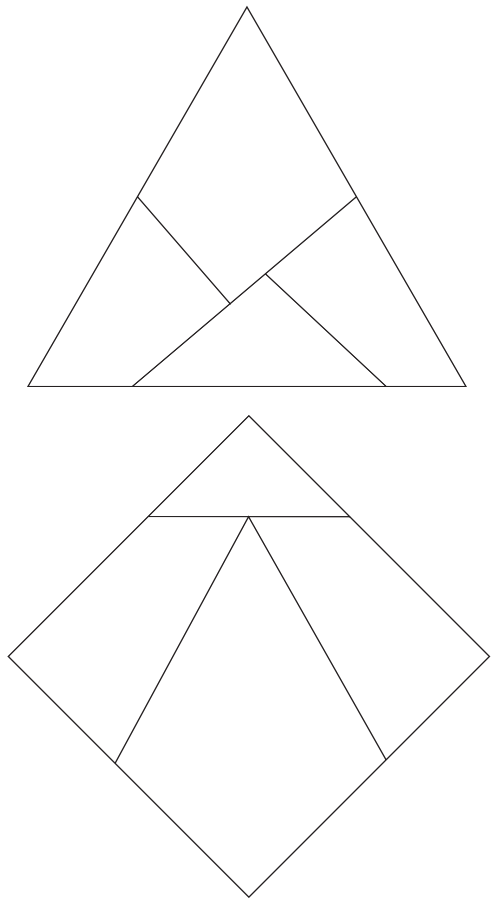
7. Con centro en *E* dibujar un arco de radio *EH*. Llamar *J* al punto en que corte al lado *AC*.

8. Trazar el segmento *JE*.

9. Sobre la base *AC* del triángulo marcar *K*, de forma que *JK*=*BE*.

10. Dibujar las perpendiculares sobre *JE* desde *D* y *K*, obteniendo los puntos *L* y *M*.

11. El triángulo queda dividido en cuatro piezas: los tres cuadriláteros *BELD*, *DLJA* y *ECKM* y el triángulo *JMK*, con las que podemos formar un cuadrado.



Esta cuadratura del triángulo equilátero es quizás la más conocida, hasta el punto de que se puede encontrar en anuncios publicitarios, e incluso su estructura ha sido tomada por el diseñador Maty Gronberg para presentar la mesa que aparece en la imagen (tomada de El País Semanal de 30/08/1987), y que tiene la virtud de poder usarse como mesa triangular o cuadrangular según las necesidades.

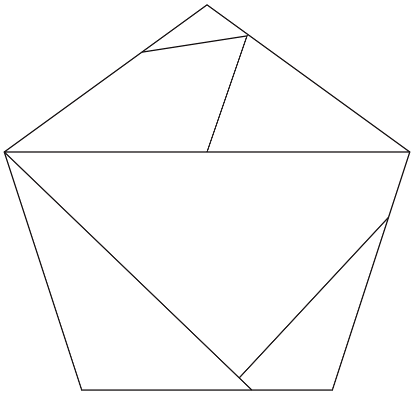
Cuadraturas de otros polígonos regulares

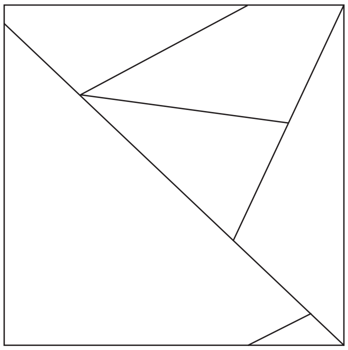
Con la intención de no extender en demasía este artículo incluiremos otras cuadraturas sin especificar la construcción completa con regla y compás.

Para trabajar con ellas basta copiar los dibujos, recortarlos y jugar con las piezas obtenidas como un puzzle cualquiera.

Cuadratura del pentágono

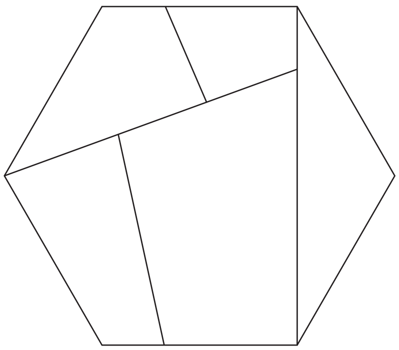
Existen varias divisiones del pentágono que después de reordenar las piezas dan lugar a un cuadrado. Nosotros reseñamos aquí una realizada también por Dudeney.

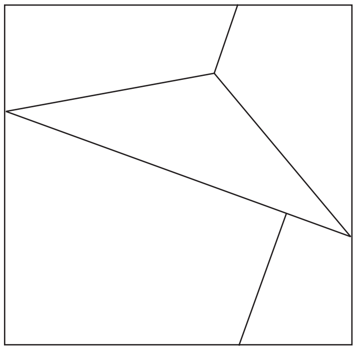




Cuadratura del hexágono

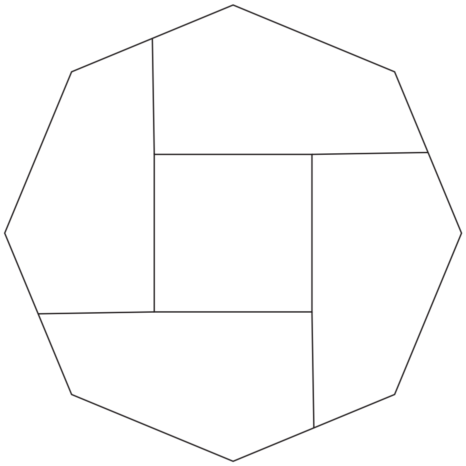
Del hexágono también existen varias divisiones. Os mostramos una de ellas.

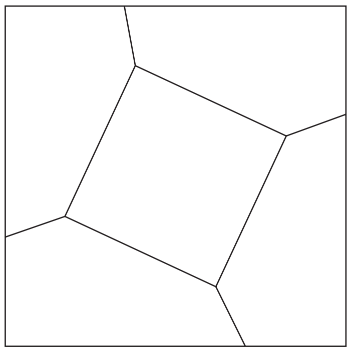




Cuadratura del octógono

Esta es una de las divisiones más simples, pues se parte de cuatro piezas iguales, que según como se coloquen alrededor del cuadrado central dan lugar al octógono o al cuadrado.





A la pregunta que hacíamos sobre qué polígonos admiten una cuadratura responde el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein: Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro. La demostración se puede encontrar en http://bayledes.free.fr/decoupage/index.html

Luego todos los polígonos se pueden cuadrar; el interés radica ahora en encontrar cuadraturas con el mínimo número de piezas o que sean especialmente *bellas* (por la forma de sus piezas, su simetría…).

La cuadratura del octógono es una de las divisiones más simples, pues se parte de cuatro piezas iguales, que según como se coloquen alrededor del cuadrado central dan lugar al octógono o al cuadrado.

Cómo trabajar estos puzzles en clase

Una primera forma de utilizar este material es directamente como puzzle. Es decir, entregar las piezas troqueladas a los alumnos y pedirles que construyan por un lado el cuadrado y por otro el polígono que le corresponda.

Este planteamiento es muy atractivo y motivante para quien se enfrenta a ese reto. Nosotros lo hemos comprobado trabajando en los salones de juegos o al realizar la actividad de Matemáticas en la Calle.

También puede plantearse esta actividad como línea de trabajo interdisciplinar entre Matemáticas y Tecnología, de forma que en Matemáticas se realice el estudio teórico completo (ángulos, piezas, divisiones, etc.) y en Tecnología se construya el puzzle, preferentemente en madera o algún material rígido que permita su manipulación posterior sin deformarse por su uso.

En aquellas cuadraturas más simples, puede trabajarse también con regla y compás para encontrar las divisiones, con lo que el aspecto interdisciplinar se ampliaría a la asignatura de Educación Plástica y Visual.

Igual que en otros puzzles que se utilizan en la clase de Matemáticas, es posible tratar conceptos geométricos. Por ejemplo, manipulamos dos piezas (polígono original y cuadrado) que tienen la misma área, pero que en general tienen distinto perímetro. El problema es que al calcular los perímetros suelen aparecer medidas irracionales.

También es interesante el estudio de los ángulos que aparecen en las divisiones del polígono inicial. Si necesitamos reconstruir un cuadrado, en las divisiones deben aparecer cuatro ángulos rectos, bien directamente o por composición.

Como puede apreciarse por lo anterior, con este tipo de material se pueden abarcar todos los niveles que se den en la clase, desde el de los alumnos que se quedan en intentar componer la figura, hasta el de los que trabajan con números irracionales para estudiar el perímetro. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLT, B. (1989): *Divertimentos matemáticos*, Ed. Labor, Barcelona.

BOLT, B. (1989): *Aún más actividades matemáticas*, Ed. Labor, Barcelona.

DUDENEY, H. E. (1995): *Los gatos del hechicero y nuevas diversiones matemáticas*, Zugarto ediciones, Madrid.

FREDERICKSON, G. (1997): *Dissections: Plane & Fancy*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-57197-9.

HANS, J. A.; MUÑOZ, J.; FERNÁNDEZ-ALISEDA, A. ; BLANCO, J y ALDANA, J. (2003): "Rompecabezas del Teorema de Pitágoras", *Suma*, n.º 43, Junio, Zaragoza, pp. 119-122.