





Febrero 2005

Revista sobre **48**
la enseñanza y
el aprendizaje de las
MATEMÁTICAS

Directores

Inmaculada Fuentes Gil
Francisco Martín Casalderrey

Administradores

Cristina Torcal Baz
Antonio Alamillo Sánchez

Consejo de redacción

Santiago Gutiérrez
Antonio Hernández
Margarita Marín
Adolfo Quirós
María Rosario Rivarés
Carmen da Veiga

Consejo Editorial

Florencio Villarroya
Presidente de la FESPM
Julio Sancho
Emilio Palacián
Ricardo Luengo

Edita

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE
SOCIEDADES DE
PROFESORES DE
MATEMÁTICAS
(FESPM)

Diseño de la portada

Javier Alvariño
Foto: Jorge Alvariño

Diseño interior

Raquel Fraguas (NIVOLA)

Maquetación

A. Alamillo y F. Martín

Abstracts

M. Manso de Zúñiga
P. Satrústegui

Revista Suma

Apdo. 19012
E-28080-Madrid
España

Fax: +(34) 912 911 879

Tirada: 6400 ejemplares

Deposito legal: Gr 752-1988

ISSN: 1130-488X

Editorial 3-4

ARTÍCULOS

Aplicación de las funciones al estudio de mosaicos y poliedros

Vicenç Font Moll 7-13

Actividades de geometría fractal en el aula de secundaria (II)

A. Redondo Buitrago y M.J. Haro Delicado 15-21

Icosaedro y Φ

Ángeles Fernández García y Montserrat Prieto Morera 23-32

Una evaluación de habilidades matemáticas

Mabel Rodríguez, Gustavo Carnelli y Alberto Formica 33-43

Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios

Carmen Díaz 45-50

DIVULGAMAT, Centro virtual de divulgación de las Matemáticas

Comisión de divulgación de la RSME 51-54

POLIEDRO

DESDE LA HISTORIA: En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La autoría (I)

Ángel Ramírez y Carlos Usón 57-63

JUEGOS: Cuadraturas de polígonos regulares

Grupo Alquerque de Sevilla 65-68

iMÁTGENES: iMÁTgenes 13, 14 y 15 <i>Miquel Albertí</i>	69-76
EL CLIP: Homenaje a Reuleaux <i>Claudi Alsina</i>	77-79
INFORMALES E INTERACTIVAS: Theatrum Machinarum. Matemáticas en el Museo Universitario de Módena <i>Jacinto Quevedo</i>	81-90
PRESENCIA MEDIÁTICA: Demasiado en serio. Dos temas, una anécdota y un adios <i>Fernando Corbalán</i>	91-93
HACE...: Gaus: La revolución de las matemáticas del siglo XIX <i>Santiago Gutiérrez</i>	95-98
EN UN CUADRADO: Un ejemplo de espacio cociente <i>Capi Corrales Rodríguez</i>	99-103
BIBLIOTECA: Principios y estándares para la educación matemática. <i>Mirar y Ver</i> <i>A. Marín y J.L. Lupiáñez. Elena Gil</i>	105-112
HEMEROTECA: Matématiques et pédagogie <i>Julio Sancho</i>	113-116
CINEMATECA: Entre el amor y el humor <i>J.M. Sorando Muzás</i>	117-124
ACTIVIDADES DE LA FESPM:	
Informe de la FESP sobre la nueva reforma del Ministerio de Educación y Ciencia	125-129
Homenaje en la UCM a Miguel de Guzmán <i>J.M. Martínez Ansemil</i>	131-133
XII JAEM. Albacete, 4 a 7 de julio de 2005. Segundo anuncio.	135-139
XVI Olimpiada Matemática Nacional para alumnos de Secundaria Madrid 26 al 30 de junio 2005.	141-142
Relación de Sociedades federadas	94
Normas de Publicación	143
Boletín de suscripción	144

Asesores

Pilar Acosta Sosa
Claudi Aguadé Bruix
Alberto Aizpún López
José Luis Álvarez García
Carmen Azcárate Giménez
Manuel Luis de Armas Cruz
Antonio Bermejo Fuentes
Javier Bergasa Liberal
María Pilar Cancio León
Mercedes Casals Colldecarrera
Abilio Corchete González
Juan Carlos Cortés López
Carlos Duque Gómez
Francisco L. Esteban Arias
Francisco Javier Fernández
José María Gairín Sallán
Juan Gallardo Calderón
José Vicente García Sestafe
Horacio Gutiérrez Fernández
Fernando Hernández Guarch
Eduardo Lacasta Zabalza
Andrés Marcos García
Ángel Marín Martínez
Félix Matute Cañas
Onofre Monzo del Olmo
José A. Mora Sánchez
Ricardo Moreno Castillo
María José Oliveira González
Tomás Ortega del Rincón
Pascual Pérez Cuenca
Rafael Pérez Gómez
Joaquín Pérez Navarro
Antonio Pérez Sanz
Ana Pola Gracia
Luis Puig Mosquera
Ismael Roldán Castro
Modesto Sierra Vázquez
Vicent Teruel Martí
Carlos Usón Villalba

SUMA

*no se identifica necesariamente
con las opiniones vertidas en las
colaboraciones firmadas.*

Cuadraturas de polígonos regulares

Si nos remontamos en la historia de la matemática hasta llegar a los antiguos griegos, nos encontramos con que en esa época los maestros se reconocían por los pocos elementos que necesitaban para solucionar los problemas; por ejemplo, en Geometría era obligatorio utilizar, solamente, regla no graduada (para trazar rectas) y compás. Esta restricción llevó a los matemáticos a estrellarse frente a los tres problemas clásicos de la matemática griega:

La trisección del ángulo: dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales. Arquímedes (287–212 a. de C.) encontró un método que trisecaba muchos ángulos, pero fallaba en otros.

La duplicación del cubo: dado un cubo cualquiera, construir otro cubo que duplique el volumen del primero. El Oráculo de Apolo, en Delfos, planteó este problema a Pericles (459–429 a. de C.) indicando que la epidemia de peste que asolaba Atenas sólo desaparecería si se duplicaba el volumen del altar cúbico de Apolo.

La cuadratura del círculo: construcción de un cuadrado que tenga el mismo área que un círculo dado. La primera referencia conocida sobre este problema se debe a Anaxágoras (499–428 a. de C.).

Hasta el siglo XIX no se llegó a demostrar la imposibilidad de resolver esos tres problemas con regla y compás, aunque tienen solución por otros métodos.

Puzzles de cuadraturas

Desde tiempo inmemorial, los puzzles y rompecabezas han ocupado un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades. En relación con las Matemáticas, muchas divisiones de figuras han estado en la base de materiales, tanto en su aspecto lúdico para jugar, como para utilizarlos didácticamente.

Existen muchos puzzles, conocidos desde hace tiempo, y que no por ello pierden su atracción. Basta citar, como muy popular, el Tangram Chino. Otro gran bloque lo constituyen las

disecciones del Teorema de Pitágoras, como la muy conocida de Henry Perigal.

Los problemas geométricos de disección plantean la partición de figuras geométricas en trozos de forma que al unirse se obtengan otras figuras geométricas. En este artículo vamos a presentar unos casos particulares de disecciones geométricas: las cuadraturas. Consideraremos como cuadraturas a las divisiones que hay que realizar en una figura plana (por ejemplo un polígono regular) de forma que con las piezas obtenidas pueda construirse un cuadrado.

Desde tiempo inmemorial, los puzzles y rompecabezas han ocupado un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades.

El aspecto más matemático es conseguir dividir la figura con la que estemos trabajando utilizando regla y compás. Ante la dificultad que ello supone se suelen presentar las divisiones ya hechas, de forma que se trabaje como si fuese un puzzle, es decir, el objetivo es pasar de una figura a otra.

La primera pregunta que se puede plantear es: ¿qué polígonos regulares podremos cuadrar?

Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:

Juan Antonio Hans Martín C.C. Santa María de los Reyes.

José Muñoz Santonja IES Macarena.

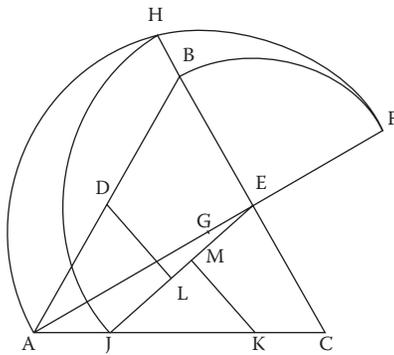
Antonio Fernández-Aliseda Redondo IES Camas.

juegos.suma@fespm.org

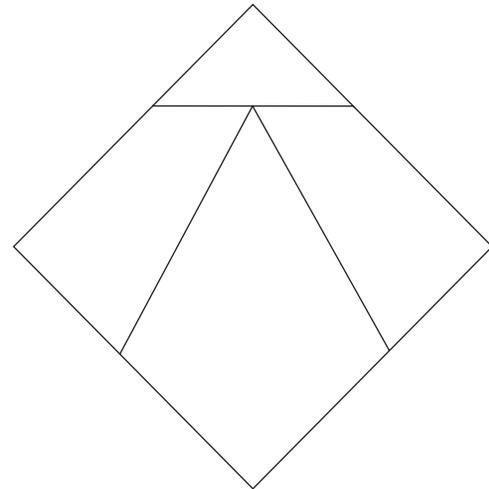
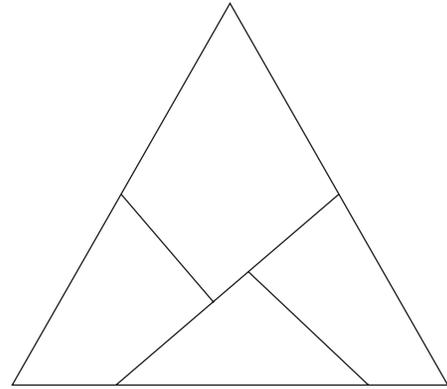
La cuadratura del triángulo

Una primera aproximación a la respuesta viene dada por el especialista inglés en juegos Henry Ernest Dudeney (1857-1930), quien estudió la cuadratura del triángulo equilátero, presentando en 1905 en la Real Sociedad de Londres, un modelo construido en caoba.

Con regla y compás, como exigían los antiguos griegos, Dudeney encontró la manera de dividir un triángulo equilátero en cuatro piezas que forman también un cuadrado. En su diseño podemos seguir los siguientes pasos:



1. Dibujar el triángulo equilátero ABC .
2. Obtener los puntos medios de AB y BC (serán los puntos D y E).
3. Prolongar AE hasta F , para que $EF = EB$.
4. Hallar el punto medio de AF (será el punto G).
5. Con centro en G dibujar el arco AF .
6. Prolongar EB hasta cortar el arco, obteniendo el punto H .
7. Con centro en E dibujar un arco de radio EH . Llamar J al punto en que corte al lado AC .
8. Trazar el segmento JE .
9. Sobre la base AC del triángulo marcar K , de forma que $JK = BE$.
10. Dibujar las perpendiculares sobre JE desde D y K , obteniendo los puntos L y M .
11. El triángulo queda dividido en cuatro piezas: los tres cuadriláteros $BELD$, $DLJA$ y $ECKM$ y el triángulo JMK , con las que podemos formar un cuadrado.



Esta cuadratura del triángulo equilátero es quizás la más conocida, hasta el punto de que se puede encontrar en anuncios publicitarios, e incluso su estructura ha sido tomada por el diseñador Maty Gronberg para presentar la mesa que aparece en la imagen (tomada de El País Semanal de 30/08/1987), y que tiene la virtud de poder usarse como mesa triangular o cuadrangular según las necesidades.



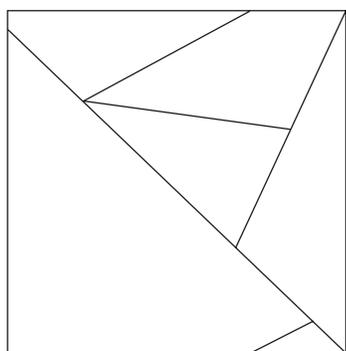
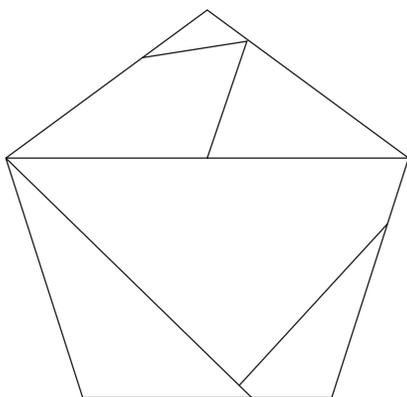
Cuadraturas de otros polígonos regulares

Con la intención de no extender en demasía este artículo incluiremos otras cuadraturas sin especificar la construcción completa con regla y compás.

Para trabajar con ellas basta copiar los dibujos, recortarlos y jugar con las piezas obtenidas como un puzzle cualquiera.

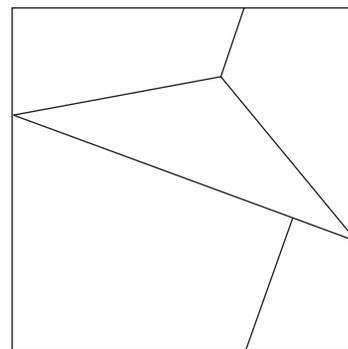
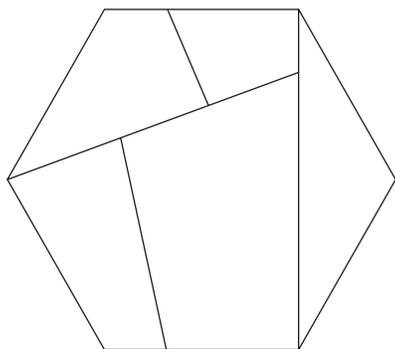
Cuadratura del pentágono

Existen varias divisiones del pentágono que después de reordenar las piezas dan lugar a un cuadrado. Nosotros reseñamos aquí una realizada también por Dudeney.



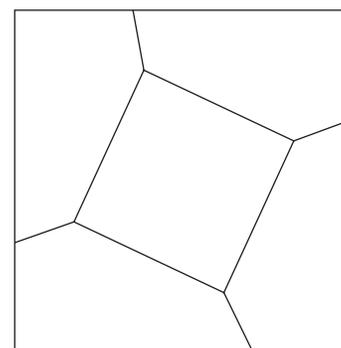
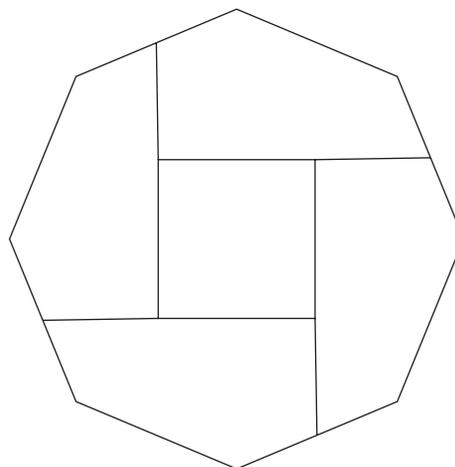
Cuadratura del hexágono

Del hexágono también existen varias divisiones. Os mostramos una de ellas.



Cuadratura del octógono

Esta es una de las divisiones más simples, pues se parte de cuatro piezas iguales, que según como se coloquen alrededor del cuadrado central dan lugar al octógono o al cuadrado.



A la pregunta que hacíamos sobre qué polígonos admiten una cuadratura responde el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein: Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro. La demostración se puede encontrar en

<http://bayledes.free.fr/decoupage/index.html>

Luego todos los polígonos se pueden cuadrar; el interés radica ahora en encontrar cuadraturas con el mínimo número de piezas o que sean especialmente *bellas* (por la forma de sus piezas, su simetría...).

La cuadratura del octógono es una de las divisiones más simples, pues se parte de cuatro piezas iguales, que según como se coloquen alrededor del cuadrado central dan lugar al octógono o al cuadrado.

Cómo trabajar estos puzzles en clase

Una primera forma de utilizar este material es directamente como puzzle. Es decir, entregar las piezas troqueladas a los alumnos y pedirles que construyan por un lado el cuadrado y por otro el polígono que le corresponda.

Este planteamiento es muy atractivo y motivante para quien se enfrenta a ese reto. Nosotros lo hemos comprobado trabajando en los salones de juegos o al realizar la actividad de Matemáticas en la Calle.

También puede plantearse esta actividad como línea de trabajo interdisciplinar entre Matemáticas y Tecnología, de forma que en Matemáticas se realice el estudio teórico completo (ángulos, piezas, divisiones, etc.) y en Tecnología se construya el puzzle, preferentemente en madera o algún material rígido que permita su manipulación posterior sin deformarse por su uso.

En aquellas cuadraturas más simples, puede trabajarse también con regla y compás para encontrar las divisiones, con lo que el aspecto interdisciplinar se ampliaría a la asignatura de Educación Plástica y Visual.

Igual que en otros puzzles que se utilizan en la clase de Matemáticas, es posible tratar conceptos geométricos. Por ejemplo, manipulamos dos piezas (polígono original y cuadrado) que tienen la misma área, pero que en general tienen distinto perímetro. El problema es que al calcular los perímetros suelen aparecer medidas irracionales.

También es interesante el estudio de los ángulos que aparecen en las divisiones del polígono inicial. Si necesitamos reconstruir un cuadrado, en las divisiones deben aparecer cuatro ángulos rectos, bien directamente o por composición.

Como puede apreciarse por lo anterior, con este tipo de material se pueden abarcar todos los niveles que se den en la clase, desde el de los alumnos que se quedan en intentar componer la figura, hasta el de los que trabajan con números irracionales para estudiar el perímetro. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOLT, B. (1989): *Divertimentos matemáticos*, Ed. Labor, Barcelona.
BOLT, B. (1989): *Aún más actividades matemáticas*, Ed. Labor, Barcelona.
DUDENEY, H. E. (1995): *Los gatos del hechicero y nuevas diversiones matemáticas*, Zugaro ediciones, Madrid.

- FREDERICKSON, G. (1997): *Dissections: Plane & Fancy*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-57197-9.
HANS, J. A.; MUÑOZ, J.; FERNÁNDEZ-ALISEDA, A.; BLANCO, J y ALDANA, J. (2003): "Rompecabezas del Teorema de Pitágoras", *Suma*, n.º 43, Junio, Zaragoza, pp. 119-122.