FALENCIAS DE LA REFORMA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN HOLANDA: ¿UN CASO PARADIGMÁTICO?[1]

Koeno Gravemeijer, Geeke Bruin-Muurling, Jean-Marie Kraemer e Irene Van Stiphout

ABSTRACT

Este artículo ofrece una reflexión sobre los hallazgos de tres estudios de doctorado, sobre la resta a 100, fracciones y álgebra respectivamente, los cuales mostraron independientemente uno de otro que la competencia de los estudiantes holandeses se redujo respecto de lo que podría esperarse de la reforma en la educación matemática dirigida a la comprensión conceptual. En los tres casos, los resultados decepcionantes parecen ser causados por una desviación de las intenciones originales de la reforma, resultante del enfoque de los libros de texto en tareas individuales. **Se sugiere que esta "tendencia a la tarea", junto con una falta de atención en objetivos matemáticos conceptuales más avanzados, constituye una barrera general para la reforma de la educación matemática. Esta observación trasciende el ámbito de los libros de texto, dado que las comprensiones matemáticas más avanzadas están expuestas insuficientemente como objetivos curriculares. Se argumenta que para fomentar una reforma exitosa, se necesita un esfuerzo consciente para contrarrestar la tendencia a las tareas y promover comprensiones matemáticas conceptuales más avanzadas como objetivos curriculares.**

INTRODUCCIÓN

En muchos países occidentales, han surgido controversias en torno a la educación matemática, entre los defensores de la reforma matemática y la educación matemática tradicional, respectivamente (véase, por ejemplo, Baroody, 2003). Esas discusiones fueron originadas por los resultados de evaluaciones nacionales e internacionales que pusieron la competencia de los estudiantes en el centro de atención. La forma en que se interpretan estos resultados depende, por supuesto, del punto de vista que uno tenga sobre los objetivos de la educación matemática y cómo debe enseñarse. En los Países Bajos, la evaluación nacional, que mostró una disminución en el dominio de las habilidades básicas, ha despertado una exageración mediática sobre la debilidad de la educación matemática. Los líderes son defensores de un enfoque tradicional de la enseñanza de los algoritmos. Critican la reforma de la educación matemática y la teoría subyacente de la Educación Matemática Realista (RME). En respuesta a este debate, se llevaron a cabo tres estudios de doctorado autónomos, con el objetivo de establecer si tales críticas estaban justificadas, mediante la recopilación de información más detallada sobre la competencia de los estudiantes y el currículum real. Los estudios, que se centraron en tres temas: resta a 100, fracciones y álgebra, mostraron notables similitudes en sus hallazgos. El objetivo de este artículo es elaborar lecciones de estos tres estudios que trascienden los casos individuales. Por lo tanto, si bien presentaremos datos de esos estudios, este no es un informe

[1] Koeno Gravemeijer, Geeke Bruin-Muurling, Jean-Marie Kraemer & Irene van Stiphout (2016) Shortcomings of Mathematics Education Reform in The Netherlands: A Paradigm Case?, Mathematical Thinking and Learning, 18:1, 25-44, DOI: 10.1080/10986065.2016.1107821
To link to this article: https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1107821. Traducción a cargo de Adriana Rabino y Ma. Fernanda Gallego (GPDM, 2020)

sobre investigación empírica. En cambio, los resultados de estos estudios constituyen el punto de partida para un análisis de lo que podría estar yendo mal en la implementación de la reforma matemática.

Comenzaremos presentando el contexto de la reforma holandesa, que consideramos representativa de los esfuerzos de reforma en muchos países que se basan en la idea de que los estudiantes deben recibir apoyo para construir activamente su propio conocimiento. En este contexto, discutiremos el patrón común que surge de los tres estudios. En cada caso, el rendimiento de los estudiantes no coincidió con las expectativas, y en cada caso el análisis de los libros de texto reveló un enfoque en la enseñanza de procedimientos efectivos para tareas específicas, en lugar de desarrollar conocimientos matemáticos a un nivel conceptual más avanzado como pretendía la reforma. Argumentaremos que esto se debe al menos en parte a lo que llamamos "inclinación a la tarea", que definimos como la tendencia a pensar en la instrucción en términos de tareas individuales que los estudiantes deben dominar. Esta tendencia a la tarea tienta a los docentes y autores de libros de texto a capitalizar los procedimientos que pueden generar rápidamente respuestas correctas, en lugar de invertir en las matemáticas subyacentes aceptando que la fluidez puede venir más tarde. A continuación discutiremos la relación entre la inclinación a la tarea y la falta de atención en objetivos conceptuales más avanzados. Asumimos una relación reflexiva, y argumentaremos que la tendencia a la tarea puede prosperar porque las comprensiones matemáticas conceptuales más avanzadas no se formulan como objetivos curriculares. Sobre la base de lo escrito, delineamos objetivos matemáticos conceptuales más avanzados como puntos finales de los procesos de reificación[2] que faltan en las secuencias de instrucción investigadas. Iluminamos este marco con un bosquejo de estos objetivos para los dominios de los tres estudios originales. Para concluir, ponemos nuestros hallazgos en perspectiva, y argumentaremos que para asegurar una implementación veraz de la reforma matemática, se debe hacer un esfuerzo consciente para contrarrestar la tendencia a las tareas y explicar y abogar por conceptos matemáticos conceptuales más avanzados como objetivos curriculares clave.

Reforma de la educación matemática en los Países Bajos

El Instituto Freudenthal y sus predecesores llevaron a cabo las bases para la reforma de la educación matemática en los Países Bajos. El trabajo del instituto dio como resultado una serie de secuencias de instrucción prototípicas y una teoría de instrucción global (específica del dominio), conocida como Educación Matemática Realista o EMR (Gravemeijer, 2008; Treffers, 1987). La EMR encaja bajo el paraguas más amplio de lo que, por falta de una mejor palabra, llamaremos reforma matemática. En ella podemos caracterizar ampliamente la reforma matemática como formas de educación matemática que intentan hacer justicia a la idea de que, para desarrollar una comprensión profunda de las matemáticas, los estudiantes deben tener un papel activo en la construcción de su propio conocimiento.

[2] En el campo de la investigación de la educación matemática, Anna Sfard llama reificación al "acto de creación de entidades abstractas adecuadas." Sfard ve el acto de reificación como el paso de una forma procedimental de un tema matemático a otra forma que llama estructural. En este significado se mantiene el significado etimológico de "convertir un objeto-cosa", solamente que el objeto construido es abstracto. En http://www.matetam.com/blog/entradas-jmd/teoria-reificacion-anna-sfard (Nota de la traducción)

La reforma holandesa se basa en el adagio de Freudenthal (1973) de que los estudiantes deberían experimentar las matemáticas como una actividad humana. Describe esa actividad como resolver problemas, buscar problemas y organizar un tema (Freudenthal, 1971). La última actividad, la organización, más tarde se denominó matematización, que se refiere a organizar el tema para hacerlo más matemático. Según Freudenthal (1971), los estudiantes serían capaces de reinventar las matemáticas convencionales matematizando tanto un tema de la realidad como la matemática misma, especialmente en relación con su propia actividad matemática, bajo la guía del docente. En su opinión, los puntos de partida deberían ser experiencialmente reales para los estudiantes y, a partir de ahí, tendrían que apoyarse en un proceso de reinvención guiada, con las matemáticas sofisticadas y convencionales como sus puntos finales potenciales. Cuando Treffers (1987) formuló más tarde la teoría EMR, vinculó la reinvención guiada con la matematización progresiva, que coloca en el marco más amplio de la teoría de Van Hiele sobre los niveles de pensamiento en la educación matemática (Van Hiele, 1973, 1986) y la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983). Según este último, uno debería buscar fenómenos que pudieran obligar al aprendiz a constituir el objeto mental que corresponde al concepto en consideración. De esta manera, esos fenómenos no solo funcionan como aplicaciones sino también como fuente de formación de conceptos o constitución de objetos mentales.

Una de las tareas del primer predecesor del Instituto Freudenthal (Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática) fue elaborar estas ideas en prácticas de instrucción ejemplares y materiales de enseñanza. Al hacerlo, produjo secuencias de instrucción prototípicas para diversos temas, que fueron adoptadas y adaptadas por autores de libros de texto de primaria y secundaria. Este fue un proceso dinámico que comenzó en la década de 1980. El instituto produjo una serie de documentos curriculares, en los cuales se desarrollaron los resultados de varios experimentos de diseño. Especialmente influyentes fueron las publicaciones de Treffers, de Moor y Streefland que ofrecían muestras de currículos para diversos temas para la escuela primaria (Treffers y Moor, 1989, 1990; Treffers y Streefland, 1994; Treffers, Streefland y Moor, 1996), y las publicaciones que siguieron bajo el lema de "TAL", que significa "Trayectorias de enseñanza y aprendizaje con objetivos de logro intermedio" (TAL Team, 2007; Treffers, Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2001; Van Galen et al., 2008). A pesar de que no tenían un estado oficial, estas publicaciones curriculares se percibían como el currículum obligatorio, especialmente porque los objetivos legales del currículum estaban alineados con esas publicaciones.

A partir de la década de 1980, los libros de texto de matemáticas inspirados en EMR rápidamente comenzaron a dominar el mercado, aunque el apoyo docente a la innovación era escaso o prácticamente inexistente. Y, durante varias décadas, el enfoque de la EMR fue bien recibido, tanto en la comunidad educativa como en la sociedad holandesa en general. Sin embargo, a principios de este siglo, cuando las pruebas nacionales mostraron una disminución en las habilidades básicas clave, comenzaron a escucharse críticas. Esto fue amplificado por los medios de comunicación. La enseñanza, los libros de texto y, por implicación, la teoría EMR y el Instituto Freudenthal fueron culpados de lo que algunos consideraron resultados altamente insatisfactorios. La base de la crítica estaba en los resultados de las evaluaciones nacionales, tales como la Evaluación Periódica del Nivel de Educación, PPON (Janssen, Van der Schoot y Hemker, 2005), y las evaluaciones internacionales como PISA (Organización para la Economía

Cooperación y Desarrollo, 2007). Y a pesar de que los resultados de las pruebas son evaluados de manera diferente por los diferentes grupos, y la imagen que surge de las pruebas nacionales es mixta, se puede decir con seguridad que la reforma de la educación matemática en los Países Bajos no ha aportado una gran mejora en comparación con los resultados obtenidos hace algunas décadas.

Estudios sobre competencia y métodos de solución

Esto planteó la pregunta: ¿qué es lo que estaba pasando que podría haber causado los resultados insatisfactorios? Esta pregunta fue recogida en tres estudios, que independientemente uno del otro, trataron de comprender mejor por qué y en qué aspecto los resultados obtenidos por los libros de texto inspirados en EMR estuvieron a la zaga de las expectativas. Cada estudio intentó responder a esta pregunta para un tema diferente, respectivamente, aritmética temprana, fracciones y álgebra. La razón para discutir esos estudios aquí es que los tres mostraron resultados similares, revelando un patrón consistente entre los niveles de grado y el contenido matemático. Los estudios fueron comparables en el sentido de que combinaron información detallada sobre la competencia y los procedimientos de solución de los estudiantes con un análisis de los libros de texto, aunque los métodos variaron. A continuación comenzaremos con una descripción de los hallazgos sobre las habilidades de los estudiantes. Luego, discutimos los análisis de los libros de texto. Más adelante nos centraremos en el hilo conductor que emerge de los tres estudios.

Resta a 100

La resta a 100 es uno de los temas de las llamadas encuestas PPON que el Instituto Nacional para el desarrollo de pruebas, Cito, lleva a cabo periódicamente en nombre del Ministerio de Educación. En conjunto con la encuesta PPON-4 (Kraemer, Van der Schoot y Hemker, 2005), Kraemer investigó los procedimientos de solución de 300 estudiantes de grado 3 (Kraemer, 2011; véase también 2009). Estos estudiantes se clasificaron en grupos de bajo, medio y alto nivel de competencia. Durante las entrevistas individuales, se presentaron a los estudiantes problemas de resta del conjunto de ítems de PPON, correspondientes a su nivel de aritmética, y se los entrevistó sobre sus procedimientos de solución. Los procedimientos de solución se clasificaron según una agrupación bidimensional de procedimientos de solución, basada en la categorización de Beishuizen (1993), que consta de dos dimensiones: estrategias y métodos de cálculo:

- Estrategias:
  - Sustracción
  - Suma indirecta

y

- Métodos de cálculo
  - saltar o saltar contando (secuencial)

(Ej., 65 – 38 =..., a través de 65 – 30 = 35, 35 – 5 = 30, 30 – 3 = 27)

  - descomposición; descomponiendo en decenas (dieces) y unidades

(Ej., 68 – 45 =...; 60 – 40 = 20, 8 – 5 = 3, respuesta 20 + 3 = 23)

- razonamiento; uso de hechos numéricos y propiedades aritméticas

(Ej., 62 – 48 es igual a 64 – 50 = 14; ó 62 - 48 =... a través de 62 – 50 = 12, por lo tanto 62 - 48 = 12 + 2 = 14)

- conocimiento; reproducción de hechos conocidos.

El análisis de la frecuencia de uso y la ejecución correcta (o incorrecta) de los cuatro métodos de cálculo mostraron que "saltar" era tanto el método más utilizado (entre 57% y 74%) como el más efectivo (entre 82% y 91% correcto) —y se aplicó con flexibilidad. La descomposición y el razonamiento generaron muchas respuestas incorrectas (descomposición 65% y 42% correctas, y razonamiento entre 50% y 31% correctas). Esto podría explicar por qué los resultados del cuarto PPON no mostraron mejoría en comparación con el tercero.

Un análisis de la relación entre estrategias, métodos y características de la tarea reveló que un gran grupo de estudiantes variaba de manera flexible entre la resta y la suma indirecta al modelizar varios tipos de problemas en contexto. Sin embargo, cuando tuvieron que resolver tareas de resta en forma de cálculos numéricos, entre 90% y 99% de los estudiantes se aferró a la resta. En base a lo escrito sobre el papel de la inversión en el desarrollo del dominio de la suma y la resta, podemos concluir que estos estudiantes habían generalizado la suma indirecta para problemas de enunciado, pero no aún para tareas de resta descontextualizadas.

Se identificaron dos problemas como las causas principales de las respuestas incorrectas que ocurrieron cuando los estudiantes de nivel bajo y medio no utilizaron los métodos de salto (secuencial). Primero, una parte importante de esos estudiantes aparentemente aplicaron rutinariamente el conocido algoritmo buggy[3] (por ejemplo, 62-48 = 20 + 6 con error) (Fuson et al., 1997). En segundo lugar, muchos estudiantes que operaban en el nivel medio tendían a usar formas incorrectas de descomposición y razonamiento al resolver problemas en contexto. Además, el análisis de Rasch del cuarto PPON, en el que se incluyeron los elementos de la entrevista, mostró que las tareas que implicaban "pasar por 10 o múltiplo de 10"[4] eran demasiado difíciles para la mayoría de los estudiantes (Kraemer et al., 2005). Esto, junto con las fuentes de respuestas incorrectas, apunta a una falta de competencia en la coordinación de decenas y unidades. En resumen, los resultados mostraron que los estudiantes a menudo usaban métodos de salto (saltar 10 o múltiplos de 10), con los cuales eran flexibles y exitosos. Sin embargo, los resultados también revelaron problemas estructurales, que parecen estar enraizados en una comprensión limitada de la relación inversa (resta/suma y una falta de competencia en coordinar decenas y unidades. En otras palabras, los estudiantes adquirieron un conjunto restringido de métodos de cálculo y alcanzaron solo un nivel limitado de comprensión conceptual.

Fracciones

En 2006–2009 se llevó a cabo un proyecto de investigación exhaustivo sobre el dominio en el conjunto de las fracciones, en relación con los estudiantes de 6º a 9º grado (Bruin-Muurling,

[3] Se refiere a los algoritmos o procedimientos erróneos construidos por los niños
[4] Método que consiste en llegar a un número "bonito" (múltiplo de 10) para facilitar el cálculo. Por ejemplo: 24+8= (24+**6**)+2= **30**+2=32

2010). Para este propósito, se construyó una serie de pruebas para medir tanto los aspectos procedimentales como conceptuales de la competencia en el dominio de fracciones. Sobre la base de la literatura, los libros de texto y un análisis de las matemáticas disponibles se definieron varios subdominios, grandes ideas subyacentes y factores de complejidad, que en conjunto formaron un marco para la construcción de ítems. Cada uno de los grados trabajó en un subconjunto apropiado de estas tareas. En total, se administraron 1498 de estas pruebas. Un análisis Rasch de los datos resultó en una escala en la que se podían ubicar tanto la dificultad del ítem como la competencia del estudiante. Son interesantes los resultados de los estudiantes de noveno grado en la muestra (N = 347) (flujo de educación secundaria general superior [HAVO] y flujo de educación preuniversitaria [VWO]). Los estudiantes dominaron la suma y la resta de fracciones con denominadores comunes o relacionados, pero solo los mejores estudiantes lograron sumar o restar fracciones con denominadores no relacionados. La multiplicación resultó ser difícil; solo la mitad de los estudiantes dominaron tareas como 4/7 de 35 euros y 5 × 41/5. La mitad de los estudiantes pudo resolver los problemas de división cuando se plantearon en un contexto. Los ítems de división más formales fueron demasiado difíciles para aproximadamente las tres cuartas partes de los estudiantes. Los problemas relacionados con razón/proporción en el contexto de la densidad fueron dominados por solo una pequeña porción de los estudiantes.

Se realizó un análisis conceptual comparando las posiciones en la escala Rasch de ítems, que fueron bastante similares pero diferían en algunos aspectos. Esto llevó a la conclusión de que los estudiantes no captaron las grandes ideas subyacentes, como la unidad, la fracción como un número y la relación entre fracciones, multiplicación y división. Podemos ilustrar esto con los resultados de algunos ítems de la prueba. La mayoría de los estudiantes pudo decir qué parte de un rectángulo o círculo estaba sombreada. Sin embargo, si esta forma estaba dividida en partes desiguales, con la parte sombreada representada como un tercio de la mitad, por ejemplo, una gran parte de los estudiantes no pudo nombrar la fracción correspondiente. Esto puede interpretarse como una comprensión limitada de la unidad. Como un segundo ejemplo, podemos mencionar que el 50% de los estudiantes dominaba más o menos 10 × 2/5, pero solo el 10% pudo resolver correctamente 31 × 17/31. Un análisis de las respuestas escritas mostró que la mayoría de los estudiantes comenzó multiplicando 31 y 17, aparentemente sin darse cuenta de que multiplicar por 1/31 es lo inverso de multiplicar por 31. Esto sugiere que la mayoría de los estudiantes no comprendió la relación entre fracciones y las operaciones de multiplicación y división. En resumen, podemos concluir que, similar al caso de la resta, los estudiantes adquirieron una serie de procedimientos de solución que funcionaron bien para tareas específicas. Sin embargo, no pudieron manejar variaciones más complejas en esas tareas, y seguramente no alcanzaron el nivel conceptual de grandes ideas y relaciones entre fracciones, multiplicación y división.

Álgebra

Van Stiphout (2011) realizó un estudio sobre el dominio del álgebra en 1020 estudiantes en los grados 8 a 12 en 2008-2009. Los estudiantes de cada grado fueron evaluados cuatro veces durante un año calendario. Los ítems de la prueba variaron desde habilidades básicas hasta el sentido simbólico (Arcavi, 2005; Drijvers, 2003), que abarcan las habilidades algebraicas habituales que se enseñan en los grados 7 al 9 en los Países Bajos.

Estas habilidades se referían a ampliar corchetes, simplificar expresiones y resolver ecuaciones. Un análisis Rasch aplicado a todos los datos condujo a una escala en la que se podían ubicar tanto la dificultad del ítem como la competencia del estudiante. Esto permitió una comparación transversal de los desempeños de los estudiantes en los grados 8 a 12, y un análisis del progreso individual durante el año en cuestión. Ambos mostraron que los estudiantes progresaron un poco, pero no alcanzaron la fluidez y la comprensión que reclama la educación superior (ver también Van Stiphout, Drijvers y Gravemeijer, 2013). Cuando nos acercamos a los estudiantes de grado 12, el análisis mostró lo siguiente. La mayoría de las tareas relacionadas con números negativos, la suma de raíces cuadradas y las tareas de álgebra simple, como "simplificar $-2\ (4x-y) + 3\ (-2y - 4) = \ldots$", fueron dominadas por aproximadamente el 75% de los estudiantes. Sin embargo, las tareas rápidamente se volvieron demasiado difíciles para la mayoría de ellos. Casi todas las tareas que resultaron demasiado difíciles para la mayoría de los estudiantes necesitaron una comprensión conceptual más profunda del álgebra. Las dificultades de los estudiantes indicaron una falta de comprensión algebraica, que se visualizó en la falta de sentido de los símbolos y el sentido de la estructura (Novotnà & Hoch, 2008), y la incapacidad de cambiar entre algo desconocido y una concepción de variable (por ej., Arcavi, 1994) o para asimilar la dualidad proceso-objeto de Sfard (1991). Podemos ilustrar las dificultades de los estudiantes en esos aspectos con los que resolvieron esos ítems en base al análisis de Van Stiphout de las soluciones escritas de resultados en algunos ítems de las pruebas, complementados con información sobre cómo los estudiantes los mismos.

Una de esas tareas fue: "Simplificar $-6 - (5 - 4) \cdot (-8) - 3$". La dificultad de esta tarea puede explicarse por la necesidad de interpretar la estructura de la expresión correctamente como $\{-6\} - \{(5-4) \cdot (-8)\} - \{3\}$. Esta tarea resultó demasiado difícil para el 90% de los estudiantes. Muchos estudiantes interpretaron la expresión como una multiplicación de dos expresiones parciales; primero calcularon los valores de $-6 - (5 - 4)$ y $(-8) -3$ produciendo -7 y -11, y luego multiplicaron ambos números. Esto puede verse como una ilustración de la falta de sentido de los símbolos, ya que los estudiantes no pudieron moverse de un lado a otro entre considerar la estructura general de la expresión y hacer los cálculos.
Una tarea que claramente requería sentido de estructura fue: "Resolver la ecuación: $(x - 1)\ (x + 3)\ (x - 4) = 0$". Aquí se esperaba que los estudiantes reconocieran la estructura $A \cdot B \cdot C = 0$ como una extensión de formas cuadráticas, tales como $(x - 1)\ (x + 3) = 0$. Los estudiantes estaban familiarizados con la resolución de ecuaciones cuadráticas factorizando, pero no con la resolución de ecuaciones cúbicas. Por lo tanto, los estudiantes tuvieron que generalizar la estructura $A \cdot B = 0 \rightarrow A = 0$ o $B = 0$ a $A \cdot B \cdot C = 0 \rightarrow A = 0$ o $B = 0$ o $C = 0$. Esta tarea fue demasiado difícil para más del 90% de los estudiantes del grado 12. Las soluciones elaboradas mostraron que ellos tendieron a extender los corchetes, después de lo cual no pudieron encontrar la factorización y no llegaron a la conclusión que $A = 0$ o $B = 0$ o $C = 0$. Podemos agregar que para hacer esas generalizaciones, los estudiantes tenían que poder conceptualizar factores individuales, tal como $(x — 1)$, tanto como un proceso y como un objeto.

En un subestudio exploratorio adicional Van Stiphout (2011) probó la hipótesis que la dificultad de las tareas estaba determinada por los dos tipos de transiciones que Sfard y Linchevski (1994) percibieron entre álgebra puramente operacional y álgebra estructural, y entre algo desconocido y una concepción de variable. Ella diseñó una serie de tareas con un número elevado de transiciones, que fueron resueltas por 92 estudiantes de grado 11 a quienes se les pidió que explicaran su razonamiento. En línea con las expectativas, mostró que la tasa de éxito disminuía cuando aumentaba el número de transiciones. Un análisis de las explicaciones escritas y algunas entrevistas individuales confirmaron que los estudiantes tenían graves problemas con las transiciones antes mencionadas.

Recapitulando: el análisis mostró que los estudiantes dominaban tareas simples, pero las tareas de la prueba se volvieron demasiado complicadas bastante rápido. La mayoría de los estudiantes no pudo usar la estructura matemática de las expresiones y no pudo manejar la dualidad proceso-objeto. Por lo tanto, podemos concluir que, al igual que en otros estudios, los estudiantes desarrollaron un conjunto restringido de procedimientos de solución, mientras que la mayoría de ellos no alcanzó el nivel de comprensión matemática conceptual más avanzada.

Conclusión general sobre el dominio de los estudiantes

Al observar los resultados de estos tres estudios, podemos concluir que los estudiantes desarrollaron formas bien fundamentadas de resolver un conjunto específico de tipos de problemas, pero no pudieron manejar las tareas que trascendían este conjunto. Podemos notar de paso que estos datos no pueden tomarse como una indicación de una disminución de algunas décadas atrás. Estos problemas no son nuevos, ya que el movimiento de reforma seguramente surgió como una respuesta a las falencias de la educación matemática de ese tiempo.

Además, los Países Bajos todavía pertenecen a los países con la puntuación más alta en pruebas internacionales como PISA, y una comparación de encuestas PPON consecutivas (Janssen et al., 2005) mostró un efecto positivo en una serie de temas que los innovadores de la EMR consideran importantes (van den Heuvel-Panhuizen, 2010). Pero esto no es lo que estos tres estudios intentaron investigar; más bien, tenían como objetivo determinar cuál era la competencia real de los estudiantes. Lo que nos preocupa aquí es que los resultados no alcanzaron lo que cabría esperarse de una reforma en la educación matemática dirigida a la comprensión conceptual. Aparentemente, los estudiantes dominaron algunos métodos básicos de solución, pero no aprendieron a razonar en un nivel más general, más alto, de comprensión matemática.

Con respecto a la crítica sobre la reforma matemática que motivó los estudios, podemos observar que los mismos agregan información valiosa a la que se podría obtener de las evaluaciones (inter) nacionales (K. Graveimejer, et. al). Hay evidencia de problemas, pero las voces que frecuentemente se escuchan a favor de más entrenamiento sobre algoritmos parecen no estar justificadas. El problema más acuciante parece ser la debilidad de la base conceptual de los estudiantes. En los tres estudios, esto condujo a una investigación sobre la cuestión de la causa de estos resultados.

Los libros de texto

Dado que se sabe que los docentes holandeses siguen fielmente sus libros de texto (por ejemplo, Olson, Martin, Mullis, Foy, Erberber y Preuschoff, 2008), se llevaron a cabo análisis de los mismos en los tres casos para comprender mejor cómo surgieron estos decepcionantes resultados. Resumimos los resultados de esos análisis a continuación.

La resta en los libros de texto

En base a un análisis de libros de texto realizado por Menne (2004), Kraemer (2011) concluyó que los procedimientos de solución que los estudiantes usaron en su estudio para restar a 100, reflejaron la forma en que estos temas se introdujeron en los libros de texto más nuevos, los que fueron usados en el 80% de las escuelas. Los libros de texto holandeses siguieron ampliamente las secuencias instructivas prototípicas para suma y resta desarrolladas en el Instituto Freudenthal por Treffers *cum suis* (Treffers y de Moor, 1990; véase también Treffers y Buijs, 2001), que describimos a continuación.

Las secuencias instructivas prototípicas capitalizan los dos procedimientos informales principales de solución que se destacan en la literatura (Beishuizen, 1993): "saltar" (o "saltar contando") y "descomponer" (ver también Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007). Saltar se introduce primero, mientras que la presentación de la descomposición se pospone hasta el final del grado 2. Para fomentar los métodos de salto, se sugieren actividades estudiantiles de contar, comparar y sumar o restar cantidades de cuentas en un collar de 100 bolitas organizadas en un patrón de diez cuentas oscuras, diez cuentas blancas, y así sucesivamente (Whitney, 1988). Al realizar estas tareas, se espera que los estudiantes desarrollen estrategias informales de solución en las que usen múltiplos de diez como puntos de referencia. Posteriormente, se introducen visualizaciones de los saltos con arcos en una línea numérica, tanto como un medio para comunicar los procedimientos de solución, como un medio de andamiaje (registro de lo hecho). Más tarde, estas visualizaciones se reemplazan por una forma de lenguaje de flechas, que a su vez se reemplaza por la notación aritmética formal.

Para fomentar los métodos de descomposición se proponen problemas en contexto que implican trabajar con dinero o empaquetar objetos en grupos de diez. Sin embargo, las secuencias de instrucción prototípicas no abarcan una secuencia de instrucción detallada sobre la descomposición.

Se llega a las llamadas formas convencionales de restar (Treffers, 1991) estimulando a los estudiantes a que reduzcan gradualmente sus métodos de solución paso a paso. Estos métodos convencionales se caracterizan por la estandarización que, para la sustracción, implica primero quitar las decenas y luego las unidades. Además de esos métodos convencionales, Treffers reconoció métodos de solución "variados" (Treffers y Buijs, 2001; Treffers y Moor, 1990; Treffers, 1991). Estos se refieren a la adición indirecta y a los métodos que Kraemer (2011) denominó "razonamiento", también conocidos como "estrategias de hechos derivados" (Verschaffel et al., 2007). Para facilitar la suma indirecta, a los estudiantes se les presentan, por ejemplo, problemas en contexto que requieren encontrar la diferencia entre dos números. Además, se les ofrecen tareas de sustracción sin contexto en las que la diferencia entre el sustraendo y el minuendo es pequeña (como 83-78). Los métodos de razonamiento incluyen compensar (62–48 es dos más que 62–50), o cambiar tanto el sustraendo como el minuendo (62–48 es igual a 64–50).

Un análisis de libros de texto realizado por Menne (2004) mostró que los autores interpretaron las recomendaciones de Treffers *cum suis* de diferentes maneras. Observó que, con la excepción de una serie de libros de texto, saltar y descomponer se presentaban aproximadamente al mismo tiempo. La forma en que se trataron la descomposición y el razonamiento en los libros de texto varía. En general, la atención por los métodos de descomposición y los métodos de razonamiento fue bastante escasa. Esto puede tener que ver con el hecho de que estos métodos no fueron bien elaborados por los diseñadores / investigadores. Otra razón puede haber sido la experiencia de que los métodos de salto son fáciles de aprender y altamente efectivos.

Los resultados del estudio de Kraemer sugieren que, con el tiempo, los estudiantes pueden haber comenzado a usar métodos de descomposición y razonamiento en combinación con la suma indirecta para encontrar formas más eficientes de resolver problemas de resta, sin tener una base conceptual sólida. En consecuencia, los esfuerzos por utilizar tales métodos generaron muchos errores, especialmente con tareas que implicaban "pasar por diez (o múltiplo de diez)". En resumen, podemos concluir que los libros de texto ofrecen una base sólida de estrategias informales particulares, pero falta una continuación hacia un mayor nivel de comprensión que integre varias formas de modelizar y métodos de cálculo descontextualizado. Esto último puede deberse al atractivo de los métodos que habitualmente producen respuestas correctas.

Las fracciones en los libros de texto

Como parte del estudio de Bruin-Muurling (2010) se analizaron cuatro series de libros de texto primarios y dos secundarios que, en conjunto, cubrieron casi todo el mercado de la educación primaria y secundaria. Primero, se analizaron todos los fragmentos de los libros de texto de sexto y séptimo grado, en los que se requerían cálculos con fracciones o que manejaban conceptos de fracciones que integraban estos cálculos. Este análisis se dirigió a estructuras comunes en los libros de texto, como la estructura de los capítulos y el uso de ejemplos y figuras.

A continuación se realizó un análisis detallado de los fragmentos que incluía la multiplicación de fracciones. Este análisis detallado se centró en el significado de la multiplicación seleccionando tareas que eran representativas del conjunto completo de fragmentos. El análisis mostró que la multiplicación de fracciones se basaba firmemente en problemas en contexto que podrían considerarse experiencialmente reales para los estudiantes. Además, los aspectos conceptuales comúnmente reconocidos se abordaron en los contextos elegidos, tales como la fracción como "parte-todo", "medida", "cociente", "número razón" y "operador multiplicativo". Las diversas manifestaciones fenomenológicas de la multiplicación se usaron para explorar la naturaleza de la multiplicación en el dominio de fracción, como por ejemplo la suma repetida, parte de un todo, y área. Esta introducción de fracciones y la multiplicación fue fenomenológicamente rica, como podría esperarse de los libros de texto inspirados en EMR. Sin embargo, las estrategias informales que surgieron de esta manera se convirtieron en cuatro procedimientos numéricos específicos de solución.

El primer procedimiento se refiere a la multiplicación de un número entero por una fracción propia, que se resuelve traduciendo la multiplicación en una suma repetida, por ejemplo, $5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. En los libros de texto, el procedimiento surgió como una estrategia informal para problemas en contexto que podrían modelizarse mediante la adición repetida, por ejemplo, calcular el contenido de nueve botellas de tres cuartos de litro. El segundo procedimiento se ajusta a la multiplicación de una fracción propia por un número entero, por ejemplo, $\frac{3}{4} \times 60 = \ldots \rightarrow \frac{1}{4} \times 60 = 60 \div 4 = 15$; $\frac{3}{4} \times 60 = 3 \times 15 = 45$. Aquí multiplicar por una

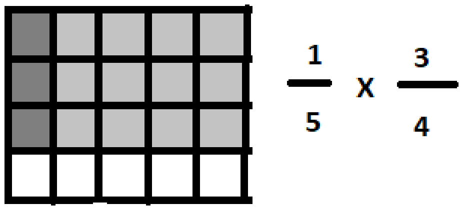

Fig. 1 Soporte visual para la multiplicación de 2 fracciones propias

fracción se traduce en "tomar una parte de". En los libros de texto, este procedimiento estuvo precedido por problemas en contexto relacionados, por ejemplo, con tres cuartos de 28 latas o dos quintos de 200 gramos de harina. Cabe señalar que los números en estos problemas siempre se eligieron de tal manera que la respuesta fuera un número entero. El tercer procedimiento está diseñado para la multiplicación de dos fracciones propias. Este procedimiento está vinculado a un modelo rectangular listo para usar, que los estudiantes tuvieron que interpretar como resultado de los siguientes pasos: (1) Identificar la parte del rectángulo correspondiente a la segunda fracción (gris claro). (2) Tomar la parte de esta parte correspondiente a la primera fracción (gris oscuro). (3) Determinar el tamaño de esta parte del rectángulo e igualarlo con el producto de las dos fracciones (ver la Figura 1).

El cuarto procedimiento diseñado para multiplicar números mixtos varía según los libros de texto. Ya sea descomponer el número mixto en un número entero y una fracción propia y usar la propiedad distributiva (por ej., 4½ x ½ = 4 × ½ + ½ x ½), o descomponer el número mixto en un número entero adecuado y un resto mixto (por ej., 1/3 × 7½ = 1/3 × 6 + 1/3 × 1½). En los cuatro casos los libros de texto utilizaron sistemáticamente números que permitieron un funcionamiento fluido del procedimiento que se esperaba que los estudiantes usaran.

En resumen, podemos concluir que los libros de texto de la escuela primaria ofrecen múltiples avances para la multiplicación de fracciones. Sin embargo, una deficiencia fue que estos enfoques no se integraron en un nivel conceptual más alto. En cambio, los procedimientos de solución para números específicos se practicaron como procedimientos separados e independientes.

En otras palabras, la multiplicación de fracciones se dividió en cuatro tipos de tareas según el tipo de fracciones involucradas, y a los estudiantes se les enseñaron procedimientos de solución específicos para cada uno de estos tipos de tareas. Posteriormente, el procedimiento estándar para multiplicar fracciones (multiplicar numeradores y multiplicar denominadores) se introdujo en los libros de texto de la escuela secundaria sin mucha dificultad. Como consecuencia, los estudiantes tenían a su disposición cinco procedimientos diferentes y desconectados, que comenzaron a mezclar. Podemos observar que el patrón es similar a lo que se encontró para la resta, los libros de texto ofrecen una base sólida en estrategias informales y contextos, pero en lugar de trabajar hacia objetivos matemáticos conceptuales más avanzados, la atención se centra en los procedimientos de enseñanza que ofrecen éxito a corto plazo para tareas específicas.

El álgebra en los libros de texto

Van Stiphout (2011) analizó cómo se enseñaban las relaciones lineales y las ecuaciones lineales en los dos libros de texto de secundaria, preuniversitario (VWO), que en conjunto tenían una participación aproximada en el mercado de más del 95%. Basado en la teoría de la modelización emergente (Gravemeijer, 1999), las tareas y los segmentos de texto se clasificaron inicialmente en tres categorías, que abarcaban actividades que (1) permitían estrategias informales dentro de los contextos, (2) fomentaban un cambio de enfoque de informales a soluciones más generales y las relaciones matemáticas involucradas, y (3) ofrecían a los estudiantes apoyo en la construcción de objetos matemáticos que derivan su significado de la red emergente de relaciones matemáticas. Sin embargo, fue necesaria una cuarta categoría adicional para clasificar las actividades que no encajaban en las categorías anteriores. Aquellas referidas a una introducción formal, no conectada, de la fórmula general para una recta y el proceso de resolución de ecuaciones lineales en ambas series de libros de texto.

El análisis mostró que las dos primeras categorías estaban bien representadas en ambas series de libros de texto, los cuales prestaron mucha atención a la exploración fenomenológica, con una cantidad considerable de actividades centradas en la exploración de problemas en contexto. Por ejemplo, en ambas series, las ecuaciones lineales se introducen mediante estrategias informales como el método de cubrimiento[5] y el modelo de la balanza. La Figura 2 ilustra el uso del modelo de la balanza en un libro de texto de grado 7. Estas estrategias informales pueden servir como antecedentes para resolver ecuaciones lineales y para interpretar la solución. En la Figura 2, por ejemplo, el modelo de la balanza en el lado izquierdo admite las manipulaciones de la ecuación en el lado derecho, legitimando así los diferentes pasos en el procedimiento para resolver la ecuación.

Sin embargo, ambas series de libros de texto apenas respaldan el paso en el que las ecuaciones tienen que ser materializadas como objetos que son parte de una red de relaciones matemáticas que justifican cómo operar sobre estos objetos, por ejemplo, al sumar y restar números o variables a ambos lados de una ecuación, o multiplicando ambos lados de una ecuación por el mismo número. Más bien, cambian abruptamente a un enfoque más tradicional en el que se introducen directamente los nuevos conceptos, sin establecer el vínculo con el modelo de la balanza antes mencionado. Podemos tomar la Figura 3 como un ejemplo. En este fragmento de un libro de texto de grado 9, se introduce la regla “cambiar lados y entonces cambiar signos” al convertir en una regla un patrón observado en dos ejemplos.

[5] Por ejemplo, dada la ecuación de la recta: **2x + 4y= 8**, este método consiste en cubrir (o tapar) **4y,** queda **2x=8**; entonces **x=4**. Luego se cubre **2x**, resulta que **4y=8** entonces **y=2.** Así la recta pasa por los puntos **(0;2)** y **(4;0).**

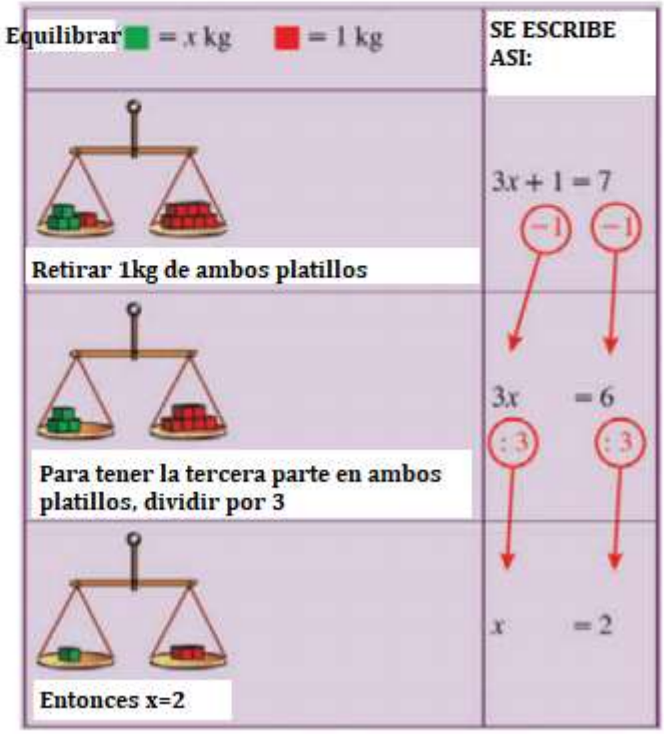

Figura 2. La introducción de las ecuaciones lineales en un libro de texto holandés de grado 8 (Reichardetal., 2005). Traducción: "Quitar 1 kg de ambos platillos". "Para asegurarse de tener al final un tercio en cada platillo, se divide por 3" "Entonces, x=2". Reproducido con permiso de Noordhoff Uitgevers. El permiso de uso debe ser obtenido del titular de los derechos.

Es más fácil cuando vas directamente desde $10x - 4 = 7x + 20$ a $10x - 7x = 20 + 4$. Decimos que los términos -4 y 7x se movieron al otro lado.

Cuando **movemos términos,** sucede algo interesante.

- -4 desaparece del lado izquierdo y aparece +4 en el lado derecho.
- 7x desaparece del lado izquierdo y -7x aparece en el lado derecho.

Se pueden mover términos de un lado al otro de una ecuación, pero se necesita reemplazar todos los signos – por + y todos los + por -.

Figura 3. "Algo sorprendente sucede". Fragmento traducido del libro de texto de noveno grado. Adaptado con permiso de Noordhoff Uitgevers de Reichard et al., 2010.

Sin embargo, esta regla no se basa en un conocimiento anterior, que podría ser adquirido con el modelo de loa balanza, por ejemplo. Por lo tanto, la introducción de la regla "cambio lados, cambio signos" no se ajusta al enfoque de la matematización progresiva. En cambio, esta regla se presenta como un hecho dado.

En resumen, podemos concluir que el paso más crucial en la formación de conceptos, en el que los estudiantes basan su comprensión de los contextos lineales para construir relaciones matemáticas y objetos matemáticos, fue apenas apoyado. En cambio, se encontraron dos trayectorias didácticas distintas: los libros de texto comenzaron con un enfoque de la EMR, pero a medio camino cambiaron a un enfoque más tradicional. Se introdujeron y practicaron nuevas reglas como matemática ya hecha. Nuevamente, la exploración fenomenológica y los métodos de solución informales no se expandieron a matemáticas más sofisticadas. En cambio, hubo un giro forzado hacia las formas convencionales tradicionales. Podemos suponer que este cambio fue motivado por el deseo de enseñar procedimientos de solución ya hechos que ofrecen resultados rápidos e inmediatos, similar a los otros casos.

Tendencia común en los libros de texto

Una comparación de estos estudios muestra una tendencia común en las tres secuencias de instrucción. Muestra que en los tres casos, la conexión con el conocimiento y las estrategias informales estaba bien cuidada; los libros de texto ofrecieron una exploración fenomenológica bien considerada, que resultó en una rica variedad de procedimientos de solución relacionados con el contexto. Sin embargo, los estudiantes no fueron apoyados en la construcción de su conocimiento situado para construir matemáticas más formales, lo que habría mejorado su capacidad para abordar de manera flexible una mayor variedad de tareas. De hecho, parecería faltar la ambición de alcanzar puntos finales matemáticos más avanzados. Las secuencias de instrucción no parecían apuntar a comprensiones conceptuales matemáticas más avanzadas. En cambio, el énfasis parecía estar en el uso de procedimientos de solución que demostraban ser efectivos.

- En la aritmética temprana, estos procedimientos de solución efectiva a corto plazo se referían a los llamados procedimientos de saltar, tanto para la resta como para la suma indirecta a 100 (Kraemer, 2011).
- Para la multiplicación de fracciones, los procedimientos efectivos de solución a corto plazo en la educación primaria se referían a procedimientos con números específicos que podían rastrearse desde los procedimientos informales de solución vinculados al contexto. Los libros de texto de educación secundaria simplemente introdujeron la regla formal, aunque la base conceptual era insuficiente (Bruin-Muurling, 2010).
- En álgebra, la situación era algo diferente en que los procedimientos informales de solución no se convirtieron en rutinas. En cambio, los libros de texto de la escuela secundaria ignoraron las ideas que los estudiantes desarrollaban al resolver problemas en contextos significativos, y se volvieron hacia métodos de solución listos para el futuro, que podían ofrecer éxito a corto plazo (Van Stiphout, 2011).

Volviendo a las controversias que provocaron estas investigaciones, podemos concluir que las afirmaciones sobre las falencias de la teoría de la EMR son prematuras. Para la teoría de la EMR, la reforma no se implementa en correspondencia con sus principios.

Inclinación a la tarea

Aparentemente, los autores de libros de texto no tuvieron en cuenta objetivos matemáticos conceptuales más avanzados, sino que optaron por procedimientos de solución que demostraron ser efectivos a corto plazo. Falta la matematización progresiva hacia los niveles superiores de Van Hiele, los que señaló Treffers (1987). Y los fenómenos que se exploraron no funcionaron como una fuente de formación de conceptos. Podemos especular sobre las causas de esta desviación de los objetivos originales. Una de las causas de esta desviación podría ser, lo que podríamos llamar, "inclinación hacia la tarea": la tendencia a pensar la educación matemática en términos de tareas individuales que los estudiantes deben dominar. Resnick y Hall (1998) también observaron este tipo de tendencia, que vinculan a una visión popular del aprendizaje que se remonta a teorías asociativas del aprendizaje de la época de Thorndike. Según dichas teorías, el conocimiento consiste en una colección de conexiones entre pares de entidades mentales o estímulos externos y respuestas mentales internas. Entonces aprender es una cuestión de crear y fortalecer los lazos correctos, los que pueden fomentarse mediante la práctica y la retroalimentación. La clave aquí es que esta forma de instrucción requiere evaluaciones frecuentes de ítems individuales con el fin de determinar qué conexiones se dominan o no aún. Resnick y Hall (1998) continuaron diciendo que los principios de la teoría de instrucción asociacionista se han absorbido en la pedagogía central de las escuelas estadounidenses, y se han convertido en la base de los procedimientos pedagógicos convencionales que funcionan en las escuelas, y argumentaríamos, no solo en Estados Unidos sino en muchos países occidentales: "Estas son las prácticas familiares que los docentes continúan usando y que las familias y las comunidades aún reconocen" (Resnick y Hall, 1998, p. 96). Esta pedagogía se traduce en una inclinación a la tarea a veces explícita pero a menudo implícita. En este punto de vista es central la tendencia a vincular el aprendizaje con la capacidad de los estudiantes para realizar con éxito tareas bien definidas. "Lograr las respuestas correctas" se ve como un objetivo inmediato y no como una derivación a largo plazo de una comprensión matemática más profunda. En consecuencia, es probable que las tareas se consideren en forma aislada de otras tareas, mientras que los problemas matemáticos subyacentes (Cobb, 1997) no se tienen en cuenta. Esto condice con la observación de Daro (2011) de que los docentes en los Estados Unidos al considerar una tarea determinada, se preguntan: "¿Cómo puedo enseñar a mis hijos a resolver este problema?", en lugar de "¿Qué matemática se supone que aprenden, trabajando en este problema? En línea con lo anterior, existe una preferencia por los procedimientos con los cuales los estudiantes pueden obtener respuestas correctas de manera directa a las tareas dadas. Esto puede resultar en enseñar determinados procedimientos de solución para cada tipo de tarea. Esto se ajusta al patrón que observamos en los libros de texto holandeses. Podemos agregar que esto también podría explicar el fenómeno que mencionamos anteriormente, que los docentes holandeses apenas se desvían de sus libros de texto (Olson et al., 2008). Lo más probable es que muchos docentes holandeses también aspiren a resultados rápidos en tareas individuales.

Sin embargo, no podemos culpar a los libros de texto ni a los docentes por no aspirar a una comprensión matemática más avanzada, ya que las comprensiones matemáticas conceptuales más avanzadas no se formularon como objetivos educativos en el currículum obligatorio en los Países Bajos. Además, las pautas curriculares del Instituto Freudenthal que comunicaron a los autores de los libros de texto expresaron poca atención por objetivos matemáticos conceptuales más avanzados, ya que el enfoque estaba en reinventar los procedimientos convencionales. Deberíamos agregar que esto refleja los objetivos convencionales de la época.

Además, la mayoría de las formas de evaluación obligatoria miden el éxito del estudiante en términos de respuestas correctas en (series de) tareas individuales. Y podemos suponer que el hábito de enfocarse en los ítems de los exámenes individuales influye en nuestra forma de pensar sobre los objetivos educativos. Parece haber una relación reflexiva, en la que la inclinación a las tareas influye en nuestro pensamiento sobre los objetivos y la falta de atención a los objetivos matemáticos conceptuales avanzados, permite esta propensión. Esto implica que para contrarrestar esta inclinación tenemos que presentar la importancia de comprensiones conceptuales más avanzadas. Tenga en cuenta que lo que entendemos por esto último difiere tanto del pensamiento de orden superior como de la comprensión conceptual como tal; a pesar de que esos son objetivos importantes en sí mismos. Antes de profundizar en esta diferencia, a continuación queremos señalar la tendencia a describir objetivos conceptuales o de proceso en documentos curriculares independientemente de los objetivos de contenido. Principalmente con el desafortunado resultado de que solo se evalúan los objetivos de contenido.

Comprensiones matemáticas conceptuales más avanzadas

Se puede notar que la cuestión no es que los diseñadores de instrucción, los docentes y los autores de libros de texto no sean conscientes de la importancia de la comprensión conceptual. Los tres ejemplos muestran que se dedica mucho tiempo y energía a proporcionar una base conceptual sólida basada en el conocimiento informal de los estudiantes. El problema es que las secuencias de instrucción finalizan demasiado pronto y no se llevan a cabo para alcanzar los conocimientos conceptuales necesarios para la siguiente fase de instrucción. El patrón típico consiste en establecer una base conceptual, fomentar procedimientos de solución informales y convertirlos en rutinas efectivas. En nuestra opinión, sin embargo, dominar un conjunto de habilidades aisladas no ofrece una base sólida para avanzar de una fase de instrucción a la siguiente. A este respecto, nos encontramos en desacuerdo con los oponentes de la reforma matemática que afirman que el dominio de las "habilidades básicas" es suficiente para un progreso fluido. Esta diferencia de opinión tiene su origen en la tesis subyacente a la reforma de la educación matemática de que aprender matemáticas es principalmente un proceso de construcción. La literatura sobre esto último muestra que los procesos de aprendizaje a largo plazo en matemáticas implican más que una mera acumulación de habilidades. O como Tall (2008, p. 13) lo expresó: "El aprendizaje procedimental (...) necesita la compresión adicional en conceptos pensables para permitir el desarrollo a largo plazo de un pensamiento matemático cada vez más sofisticado". Aclararemos este punto a continuación.

Según muchos estudiosos, el proceso de construcción de las matemáticas se caracteriza por una serie de transiciones en las que los procesos matemáticos se transforman en objetos, los que a su vez se convierten en parte de nuevos procesos (por ejemplo, Dubinsky, 1991; Freudenthal, 1991; Pirie y Kieren, 1994; Sfard, 1991; Tall y Thomas, 1991). Lo que falta en las secuencias de instrucción es precisamente esta fase de reificación (u objetivación). Las secuencias de instrucción carecen de una fase de finalización en la que los estudiantes reciben apoyo para construir objetos matemáticos.

En consecuencia, no podrán desarrollar los nuevos procesos que son los puntos de partida para la siguiente fase en su proceso de aprendizaje. Tenga en cuenta, sin embargo, que los nuevos objetos matemáticos no deben separarse de su génesis. Porque, como expresó Sfard (1991) con su "doble naturaleza de las matemáticas", a menudo se necesita tanto una concepción estructural, que involucra objetos matemáticos, como una concepción operativa, que se refiere a procesos, algoritmos y acciones. Gray y Tall (1991, 1994) también señalaron esta dualidad al introducir el término "procepto"[6] para expresar el entrelazado de proceso y objeto.

Podemos suponer que las secuencias de instrucción carecen de la fase de finalización descripta porque los objetos matemáticos abstractos no fueron considerados como puntos finales potenciales por los autores de libros de texto. El problema subyacente, en nuestra opinión, es que esos objetivos no se abordan explícitamente fuera de la literatura científica. Por lo tanto, abogamos por una atención explícita para este tipo de comprensión matemática conceptual avanzada en documentos curriculares y publicaciones relacionadas.

Para aclarar aún más esta idea de comprensión matemática conceptual avanzada, esbozaremos brevemente los puntos finales potenciales de las secuencias de instrucción consideradas. En aras de la brevedad, a continuación no abordaremos cuestiones de aplicaciones y representaciones. Sin embargo, queremos enfatizar que ambas son partes constitutivas esenciales de los objetivos matemáticos conceptuales más avanzados que tenemos en mente.

Objetivos para la resta, la multiplicación de fracciones y el álgebra

Para la secuencia de instrucción sobre (suma y) resta a 100, la fase de finalización debería tener como objetivo apoyar a los estudiantes en la construcción de números como objetos/entidades. Aquí podemos referirnos al trabajo de Gray y Tall (1991, 1994) y Van Hiele (1973), quienes hablaron de "intersecciones en una red de relaciones numéricas". En lugar de seguir los procedimientos de salto o descomposición, deben usar relaciones numéricas que estén listas para manejar, y combinar flexiblemente sobre la base de propiedades aritméticas bien entendidas. Eventualmente, tendrán que llegar a ver la resta y la suma (indirecta) como dos caras de la misma moneda, y así comenzar a pensar en sumas y restas que encajan juntas como conjuntos coherentes de relaciones numéricas (por ejemplo, $34 + 28 = 62$, $28 + 34 = 62$, $62–28 = 34$ y $62–34 = 28$). En resumen, los números, la suma y la diferencia tienen que convertirse en objetos mentales que se pueden componer y descomponer de diferentes maneras, las cuales a su vez forman la base para una aritmética flexible y una expansión a números más grandes, y más tarde para enteros y álgebra.

Como con los números naturales, los estudiantes también tendrán que llegar a ver las fracciones como objetos matemáticos que derivan su significado de una red de relaciones numéricas. Esto, a su vez, debe basarse en las subconstrucciones, "parte-todo", "medida", "cociente", "número razón" y "operador multiplicativo" (Behr, Wachsmuth, Post y Lesh, 1984). Para enfrentarse a la multiplicación de fracciones, los estudiantes tienen que reconstruir lo que significa multiplicar. Están acostumbrados a pensar la multiplicación como suma repetida. Esto encaja bien con una multiplicación como $5 \times ¾$, pero no con $¾ \times 5$, que no puede interpretarse como una suma repetida. Para tareas como $¾ \times 5$, se enseña a los estudiantes a interpretar la multiplicación como parte de. Con algo de experiencia, los estudiantes pueden llegar a aceptar la igualdad de $5 \times ¾$ y $¾ \times 5$ sobre la base de los mismos resultados, un modelo de área, o asumiendo que la propiedad conmutativa es válida. Sin embargo, para enfrentarse a la multiplicación de fracciones en un nivel conceptual más alto, se necesita más. Los estudiantes tienen que ver que esta igualdad se basa en el razonamiento matemático y entender cómo se

[6] Un procepto es una amalgama de tres componentes: un proceso que produce un objeto matemático y un símbolo que se usa para representar tanto el proceso como el objeto (de los autores citados).

relacionan estas diversas interpretaciones de la multiplicación (como la suma repetida, el área y parte de). Esto incluye razonar con las relaciones entre (operaciones con) fracciones y las operaciones de multiplicación y división. Es decir, comprender la conceptualización dual de una fracción como un número y como una operación tiene que evolucionar hacia la capacidad de cambiar flexiblemente entre las dos concepciones cuando se multiplican fracciones. Esto significa, por ejemplo, que los estudiantes tienen que ser capaces de pensar "multiplicar con una fracción dada" como "multiplicar con su numerador y dividir con su denominador" (por ejemplo, "... x¾", es igual a "(...x3) ÷ 4 "), y viceversa. Eventualmente, los estudiantes tienen que llegar a ver los productos de dos números racionales como objetos con los que se puede actuar y razonar, pero que también se pueden descomponer en una serie de operaciones. Esto implicaría que las relaciones entre operaciones y fracciones, como $15 \times ¾ = 15 \times (3 \div 4)$, $15 \times ¾ = (15 \div 4) \times 3$ o $15 \times ¾ = (15 \times 3) \div 4)$, estarían fácilmente disponibles para los estudiantes. Esas relaciones también abarcarían relaciones inversas (por ejemplo, $15 \div 4 = 15 \times ¼$, o $4 \times ¼ = 1$), incluidas las raíces fenomenológicas de esas relaciones.

En relación con la secuencia de instrucción de álgebra, podemos observar que la necesidad de conceptualizar funciones como procesos de cálculo de valores de salida a partir de valores de entrada, y como objetos sobre los que se puede actuar, está bien documentada (Dubinsky, 1991; Gray & Tall, 1991, 1994; Sfard, 1991). Lo característico aquí es que las expresiones algebraicas pueden componerse o descomponerse en entidades más pequeñas, las cuales pueden percibirse como funciones individuales o variables. En relación con esto, las nociones de sentido del símbolo (Arcavi, 2005) y sentido de estructura (Novotná y Hoch, 2008) pueden llegar a aplicarse, las cuales se refieren a la habilidad y la actitud para moverse flexiblemente de un lado a otro entre interpretaciones más estáticas y más dinámicas de expresiones algebraicas y sus partes constitutivas.

En "2x + 7", por ejemplo, tienen que poder ver esta expresión de varias maneras y cambiar de manera flexible entre esos significados. Primero, "2x + 7" tiene que significar una prescripción de cálculo que se puede ejecutar para un valor dado de x para generar un valor. En segundo lugar, "2x + 7" tiene que significar un objeto que consiste en un conjunto de pares de números, los cuales pueden asociarse con un gráfico lineal y que puede interpretarse dinámicamente. Tercero, "2x + 7" tiene que significar un objeto que puede aislarse y manipularse en la composición de expresiones algebraicas como $(2x + 7)^3$. Esta concepción estructural también debe abarcar la habilidad de comparar expresiones como objetos, señalando, por ejemplo, que "2x + 17" es 10 más que "2x + 7", y que "4x + 14" es dos veces "2x + 7".

Cambiar entre las diferentes concepciones pasa a primer plano cuando se componen las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x + 7$ y se calcula la derivada de $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x + 7)^3$ por ejemplo. Usando la regla de la cadena, los estudiantes primero deben tratar "2x + 7" como un objeto al calcular la derivada de g y luego cambiar al modo procedimental para calcular la derivada de 2x + 7. Y, finalmente, cambiar a un modo completamente operativo cuando simplifique $3.(2x + 7)^2 \cdot 2$ como $6.(2x + 7)^2$ o $24x^2 + 168x + 294$.

La conceptualización de funciones y variables de esta manera permite observar las funciones dinámicamente, investigar el papel de los parámetros y, finalmente, construir límites, integrales y derivadas.

Evaluación

Nos damos cuenta de que abogar por los objetivos que acabamos de describir no tendrá mucho impacto, a menos que este alegato vaya acompañado de sugerencias de formas de evaluar estos objetivos en una evaluación a gran escala. Sin embargo, a partir de los estudios de fracciones y álgebra y un estudio repetido sobre sustracción (Kraemer y Hop, 2012), podemos argumentar que el método de analizar patrones en los resultados de ítems individuales en una escala Rasch tiene potencial. Mostró que los patrones en la dificultad del ítem podrían vincularse con el dominio de objetivos matemáticos conceptuales más avanzados (o la falta de ellos), los que en el estudio de álgebra fue respaldado por un estudio cualitativo sobre procedimientos de solución de estudiantes individuales (Van Stiphout et al., 2013). Esto sugiere que quizás los formatos de prueba no tengan que cambiar de inmediato. Lo importante aquí es el cambio de mirar ítems individuales a analizar patrones, y el primer desafío será desarrollar conjuntos informativos de ítems de prueba que permitan el análisis de patrones en la dificultad de los mismos. Sin embargo, mirando al futuro, nos unimos a Daro, Mosher y Corcoran (2011) para argumentar que tendremos que invertir en el desarrollo de nuevas formas de evaluación. Una avenida prometedora podría estar en el enfoque de Lobato (en impresión) para desarrollar "objetivos conceptuales de aprendizaje fundamentados", que tomen su punto de partida en los análisis psicológicos de los estudios empíricos detallados del pensamiento estudiantil.

Conclusión y discusión

El debate sobre los resultados de la reforma matemática en Holanda creó la necesidad de obtener información más detallada que las pruebas nacionales e internacionales presentadas. En este artículo se discutieron tres estudios del doctorado independientes, en donde cada uno reunió dicha información haciendo zoom en un dominio específico. Una vista general de los resultados de los tres estudios mostrados indica que de hecho existen pocos avances sobre las capacidades de los estudiantes en los dominios investigados (resta a 100, fracciones y álgebra respectivamente) y que el enfoque de la EMR solo se desarrolló en parte en los libros de texto holandeses de uso común. Las secuencias de instrucción se interrumpieron antes de que se completaran los procesos de aprendizaje a largo plazo previstos. En cambio, la atención se desplazó hacia los procedimientos que generaron respuestas para tareas específicas. Dado que los docentes holandeses siguen sus libros de texto de manera muy polémica (Olson y otros, 2008) y por lo general no trascienden lo que ellos ofrecen (Gravemeijer y otros, 1993), el resultado fue que los estudiantes no alcanzaron competencia en el nivel de comprensiones conceptuales avanzadas. Respecto a esto, los hallazgos sobre el uso de la teoría de la EMR en los libros de texto holandeses pueden ser una advertencia que una implementación exitosa de la reforma matemática depende de un amplio respaldo de las comprensiones matemáticas más avanzadas como objetivos curriculares. Sin embargo, tenemos que advertir que esta no es una simple cuestión que docentes y autores de libros de texto adapten las ideas de reforma. La investigación en educación matemática también alberga tendencias similares, porque las pruebas que están siendo usadas, y como una consecuencia del tiempo limitado necesario de los proyectos de investigación, puede provocar una falta de atención a los procesos de aprendizaje a largo plazo.

Lo que ha pasado en los Países Bajos podría ser un ejemplo para los esfuerzos de reforma que están obstaculizados por las elaboraciones en los libros de texto y los enfoques de enseñanza, que no son consistentes con las intenciones de los innovadores. Tales problemas de innovación curricular no son exclusivos de los Países Bajos. Silver (2009), por ejemplo, observó que el estudio de video TIMSS 1999 reveló que los docentes estadounidenses rara vez mantenían las demandas cognitivas de las tareas durante la instrucción. Desde su punto de vista, esto explica por qué los estudiantes en Estados Unidos demostraron ser débiles en razonamiento y resolución de problemas, a pesar de que el currículo matemático previsto apuntaba a la resolución de problemas y el razonamiento. Hodgen, Küchemann, Brown y Coe (2009) también apuntaron a los docentes y a los libros de texto para explicar por qué aumentaron los resultados de los exámenes de matemáticas en Inglaterra, debido a las iniciativas a gran escala del currículo nacional, parecen más un resultado de “enseñar para la prueba” que de un incremento en la comprensión matemática genuina. En Dinamarca Niss y Hojgaard (2011) identificaron un problema similar, que denotan con el término *silabusitis* (adoptado de Jensen, 1995). Argumentaron que la tendencia a identificar el dominio de las matemáticas con la competencia en la materia matemática, puede conducir a un programa que consiste principalmente en una lista de tareas orientadoras para el examen escrito. Tal programa no reconoce aspectos importantes como la resolución de problemas, el razonamiento, la prueba y la modelización. Ellos comenzaron el proyecto KOM (Niss y Hojgaard, 2011) para intentar ofrecer una alternativa de describir los objetivos del currículum en la forma de una matriz que tiene un tema en un eje y competencias, como el pensamiento matemático, la resolución de problemas, la modelización, y así sucesivamente, en el otro eje. De esta manera, intentan integrar el “qué” y el “cómo”, los que en muchos currículos se describen por separado.

Caso paradigmático

Creemos que nuestro análisis de la evolución de la innovación holandesa se puede interpretar como un caso paradigmático por aquellos que quieren analizar, planificar o promulgar innovaciones en la educación matemática. Podrían buscarse patrones similares o mecanismos similares subyacentes. Al hacerlo podríamos usar los conceptos que se desarrollaron como herramientas para analizar lo que ocurrió en los Países Bajos, como las nociones de inclinación a tareas y objetivos matemáticos conceptuales más avanzados.

Identificamos la tendencia a las tareas (la tendencia en pensar en la educación matemática en términos de tareas individuales que deben ser dominadas por los estudiantes) como un fuerte factor inhibitorio. La tendencia a la tarea hace mención a muchas observaciones en la literatura de que los docentes y estudiantes están preocupados por las respuestas en las tareas individuales. Sin embargo, a menudo, esta tendencia está vinculada a los objetivos curriculares y los exámenes (Hodgen y otros, 2009; Niss y Hojgaard, 2011). Nosotros hacemos esto también, pero vamos un nivel más profundo al vincular este fenómeno con los puntos de vista sobre el aprendizaje, siguiendo a Resnick y Hall (1998) quienes señalaron el problema de una visión asociacionista bastante popular del aprendizaje. Este análisis ofrece nuevos puntos de influencia para cambiar la actitud de los docentes, y por extensión de los estudiantes, al apoyar a los docentes a comprender la concepción del aprendizaje que subyace en el currículum matemático previsto. Y al vincular esta concepción de cómo los estudiantes aprenden matemáticas con objetivos matemáticos conceptuales más avanzados y cómo se pueden alcanzar.

El enfoque que Niss *cum suis* (Niss y Hojgaard, 2011) adoptó para contrarrestar la unilateralidad de los documentos curriculares, que principalmente consiste en objetivos de contenido, es característico de muchos esfuerzos similares. Nuestra opinión sobre este problema, sin embargo, es diferente. Observamos que las secuencias de instrucción se interrumpieron demasiado pronto, lo que nos llevó a pensar en la idea de objetivos matemáticos conceptuales más avanzados en un esfuerzo por describir lo que faltaba en esas secuencias de instrucción. Además, elaboramos esos objetivos construyendo sobre el marco teórico que sustenta la reforma de la educación matemática en consideración. Esos objetivos difieren fundamentalmente de los objetivos de contenido o de proceso, porque se basan en la idea de que construir o reconstruir las matemáticas implica una secuencia continua de procesos que se convierten en objetos, y los objetos se vuelven sujetos a nuevos procesos. Y podemos argumentar que las actividades de resolución de problemas, razonamiento, prueba y modelización, que son el motor de esos procesos de construcción, coinciden en gran medida con los objetivos de proceso que se establecen en varios documentos curriculares. Con esto no se dice que no sea muy útil identificar y explicar los objetivos de proceso. Solo explica por qué no sentimos la necesidad de elaborar los objetivos de proceso en nuestro análisis.

Volviendo al ejemplo holandés, queremos señalar el hecho de que las comprensiones matemáticas conceptuales más avanzadas de los temas matemáticos que se investigaron en los tres estudios no se formularon como objetivos educativos en documentos curriculares oficiales en los Países Bajos. Además, los documentos curriculares del Instituto Freudenthal, que sentaron las bases para los libros de texto, mostraron una falta de atención hacia objetivos matemáticos conceptuales más avanzados y una tendencia a apuntar a algoritmos como posibles puntos finales En contraste, podemos observar una creciente preocupación por objetivos matemáticos conceptuales más avanzados en los Estados Unidos, donde el Consejo Nacional de Docentes de Matemáticas publicó los Puntos Focales del Currículo (Consejo Nacional de Docentes de Matemáticas, 2006) para abordar este tema. Además, los Estándares Estatales Básicos Comunes (2010) llaman mucho la atención como un intento de capturar objetivos matemáticos más avanzados y habilidades de pensamiento de orden superior. Además, se están haciendo esfuerzos para vincular los Estándares a lo que se conoce sobre trayectorias de aprendizaje o progresiones de aprendizaje. Sin embargo, siguiendo a Niss y Højgaard (2011), una debilidad puede ser que el "cómo" y el "qué" se describen por separado; las "prácticas matemáticas" están separadas de los estándares de contenido. Esto genera el peligro de que solo se evalúen los objetivos de contenido y los objetivos más avanzados se pierdan en la traducción. Como señalaron Daro y colegas (2011), los Estándares usan nombres convencionales y frases para los temas de una asignatura, y es probable que estos se interpreten en términos de prácticas convencionales en el aula. Y, como lo pondríamos bajo la influencia de la tendencia a la tarea, se traducirán en formas convencionales de enseñanza, calificación y evaluación.

Por lo tanto, terminamos haciendo hincapié en la necesidad de un esfuerzo consciente para contrarrestar la tendencia a las tareas e identificar comprensiones matemáticas conceptuales más avanzadas como objetivos curriculares clave. Las comprensiones matemáticas conceptuales más avanzadas no solo deben verse como objetivos a largo plazo, sino como partes integrales de secuencias de instrucción. Son un prerrequisito para el crecimiento matemático, una razón para trascender un enfoque a corto plazo en las tareas individuales y un medio para lograr la coherencia entre los objetivos educativos y la concepción de aprendizaje que subyace en los currículums matemáticos de la reforma.

Notas

1. La llamada encuesta PPON de 2004 mostró una disminución significativa en el dominio de la suma, resta, multiplicación y división de números enteros. Sin embargo, los resultados no disminuyeron en todos los ámbitos. La encuesta también mostró un ligero progreso en el área de sentido numérico, estimación y cálculo mental, mientras que el nivel de cálculo con fracciones, razones y porcentajes fue estable en comparación con 1998, después de un aumento anterior en la década de 1990 (Janssen et al. , 2005).

2. Tenga en cuenta que las publicaciones de TAL llegaron demasiado tarde para influir en los libros de texto que informamos aquí. Para esos libros de texto, los llamados especímenes de Treffers, de Moor y Streefland constituyeron la principal fuente de inspiración.

3. Como parte de la quinta encuesta de PPON, el estudio se repitió con resultados similares, excepto por una mayor diferencia entre las tareas con y sin "pasar por diez" (o un múltiplo de 10) (Kraemer y Hop, 2012).

4. En la literatura, tales diferencias en las estrategias de solución están asociadas con el desarrollo a largo plazo de la competencia matemática (Kilpatrick, Swafford y Findel, 2001), y más específicamente con el uso flexible/ adaptativo de la relación inversa entre la suma y la resta (Verschaffel, Bryant y Torbeyns, 2012). Las ideas teóricas recientes y los hallazgos empíricos se centran en la complejidad, ambigüedad y carácter longitudinal de la constitución y el uso de esta relación a lo largo del tiempo. Greer (2012) y Vergnaud (2012) observaron que los estudiantes primero tienen que generalizar el uso de la suma indirecta en diferentes contextos y clases de situaciones (combinar, cambiar, comparar, igualar). Luego, tienen que extender esta relación a las operaciones descontextualizadas (tales como restas con números puros).

5. Igualamos el dominio con una probabilidad del 80% o más de responder un ítem correctamente de acuerdo con el análisis Rasch.

6. El término sentido simbólico se usa en la literatura para describir el trabajo estratégico, el enfoque global y el razonamiento algebraico (Drijvers, 2010). En relación con esto), Arcavi (1994) habló de comportamientos relacionados con habilidades que exceden las manipulaciones básicas, como ver la comunicabilidad y el poder de los símbolos, que abarcan habilidades flexibles de manipulación, como la capacidad para seleccionar y usar inteligentemente una representación simbólica, y manipular o leer expresiones simbólicas según el problema en cuestión.

7. El sentido de estructura denota una colección de habilidades, como reconocer una estructura, ver parte de una expresión como una unidad; dividir una expresión en subexpresiones significativas; reconociendo qué manipulación es posible y útil de realizar; y elegir manipulaciones apropiadas que hagan el mejor uso de la estructura (Novotná & Hoch, 2008).

8. Si el rendimiento fue mejor que hace algunas décadas es un tema de acalorado debate, ya que los resultados de las encuestas nacionales de PPON varían según los distintos temas.

9. Se señala que la interpretación del multiplicador no es universal. En los Países Bajos, 5 × 3 se interpreta como 3 + 3 + 3 + 3 + 3, siendo así el 5 el multiplicador. En otros países, esto es al revés y se interpreta como 5 + 5 + 5, siendo 3 el multiplicador.

10. Un factor adicional que habrá influido es que los objetivos del currículum actual para la escuela primaria no incluían la multiplicación de fracciones descontextualizadas. El cambio de los problemas en contexto a los cálculos numéricos se realizaría en la escuela secundaria. Sin embargo, los libros de texto de la escuela primaria no se prepararon para este cambio, y los libros de texto secundarios ignoraron que los estudiantes no estaban preparados para un enfoque formal.

11. Tener en cuenta que, aunque Van Hiele (citado en Tall, 2004) cuestionó la aplicabilidad de sus niveles a los dominios de la aritmética y el álgebra, desarrolló su teoría para número en su publicación de 1973, que fue muy influyente en los Países Bajos. Es esta interpretación más amplia que seguimos aquí.

12. Lo que Baroody, Torbeyns y Verschaffel (2009) llamaron el "principio de complementariedad".

13. Por supuesto, nos damos cuenta que los docentes que comprenden la concepción del aprendizaje que subyace al currículum y adoptan los objetivos matemáticos conceptuales más avanzados por sí solos no serán suficientes para que la innovación sea un éxito. La reforma matemática requiere la reorganización de una práctica compleja, como la instrucción prevista difiere significativamente de las prácticas actuales (Cobb, Jackson y Dunlap, 2014).

14. Sin embargo, podemos observar que hay dos nuevos desarrollos, uno que se refiere a la aritmética, el que se interpreta explícitamente como un tema independiente, diferente de las matemáticas (seg.), y otro que se refiere a las "actividades de pensamiento" en los documentos curriculares más recientes sobre matemáticas de secundaria en los Países Bajos. En el primero, la tendencia a la tarea es muy visible en los documentos curriculares oficiales y las pruebas nacionales (Meijerink, 2008). Con respecto a las matemáticas, se proponen las llamadas actividades de pensamiento (Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, 2007), y el comité de examen nacional, CvE, está probando pruebas para evaluar esas habilidades. Sin embargo, podemos notar que esas actividades de pensamiento se refieren principalmente a habilidades de pensamiento de orden superior, no a comprensiones matemáticas conceptuales más avanzadas como tales.

Agradecimientos

Queremos agradecer a los revisores por sus útiles comentarios.

Referencias

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 14(3), 24–35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. For the Learning of Mathematics, 25(2), 42–47.

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge.

A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.). The development of arithmetic concepts and skills. Constructing adaptive expertise (pp. 1–33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Baroody, A. J., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtractionrelated principles. Mathematical Thinking and Learning, 11(1), 2–9.
Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. Journal for Research in Mathematics Education, 15(5), 323–341.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. Journal for Research in Mathematics Education, 24(4), 294–323.

Bruin-Muurling, G. (2010). The development of proficiency in the fraction domain. Affordances and constraints in the curriculum (PhD Thesis). Eindhoven: Eindhoven University of Technology. Retrieved from http://alexandria.tue.nl/ extra2/692951.pdf

Cobb, P. (1997). Instructional design and reform: Locating developmental research in context. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, E. van Lieshout, & H. van Luit (Eds.). The role of context and models in supporting mathematical development (pp. 273–290). Utrecht, The Netherlands: CD-ß Press.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2014). Design research: An analysis and critique. In L. English & D. Kirshner (Eds.), Handbook of international research in mathematics education (3rd ed, pp. 481–503). New York, NY: Routledge.

Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs. (2007). Rijk aan betekenis. Visie op vernieuwd wiskundeonderwijs. Utrecht, The Netherlands: cTWO.

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common core state standards for mathematics. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Daro, P. (2011). Against answer-getting. Retrieved from http://vimeo.com/30924981

Daro, P., Mosher, F. A., & Corcoran, T. (2011). Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment, and instruction (Research Report #RR-68). Philadelphia: Consortium for Policy Research in Education. Retrieved from http://www.cpre.org/sites/default/files/researchreport/1220_learningtrajectoriesinmathcciireport.pdf

Drijvers, P. (2003). Learning algebra in a computer environment. Design research on the understanding of the concept of parameter (PhD thesis). Utrecht, The Netherlands: CD-β press.

Drijvers, P. (Ed.). (2010). Secondary algebra education. Revisiting topics and themes and exploring the unknown. Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 95–123).

Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, 3, 413–435.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China lectures. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht, The Netherlands: Reidel. Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A. ...

Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. Journal for Research in Mathematics Education, 28(2), 130–162.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. Mathematical Thinking and Learning, 1(2), 155–177.

Gravemeijer, K. (2008). RME theory and mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), International handbook of mathematics teacher education: Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development (pp. 283–302). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Gravemeijer, K., van den Heuvel-Panhuizen, M., Van Donselaar, G., Ruesink, N., Streefland, L., Vermeulen, W. ... van der Ploeg, D. (1993). Methoden in het reken-wiskundeonderwijs, een rijke context voor vergelijkend onderzoek. Utrecht, The Netherlands: Cdß-press.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. Proceedings of PME XIII, Assisi, II, 72 –79.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. The Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 115–141.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. Educational Studies in Mathematics, 79(3), 429–438.

Hodgen, J., Küchemann, D., Brown, M., & Coe, R. (2009). Children's understandings of algebra 30 years on. Research in Mathematics Education, 11(2), 193–194.

Janssen, J., van der Schoot, F., & Hemker, B. (2005). PPON, balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4. PPON report. Arnhem, The Netherlands: Cito.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findel, B. (2001). Adding it up. Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Kraemer, J.-M. (2009). Balans over de strategieën en procedures bij het hoofdrekenen halverwege de basisschool, PPONreeks nummer 40. Arnhem, The Netherlands: Cito.

Kraemer, J.-M. (2011). Oplossingsmethoden voor aftrekken tot 100 (PhD Thesis). Arnhem, Cito. An English summary can be found in the digital version of the thesis at www.alexandria.tue.nl/extra2/721544.pdf

Kraemer, J.-M., & Hop, M. (2012). Patronen in oplossingsmethoden voor aftrekken. In M. Hop (Eds.), Balans van het rekenwiskundeonderwijs halverwege de basisschool 5, PPON-reeks nummer 47 (pp. 114–140). Arnhem, The Netherlands: Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling.

Kraemer, J.-M., Janssen, J., Schoot, F., & Hemker, B. (2005). Balans van het rekenwiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2003. PPON-reeks nummer 31. Arnhem, The Netherlands: Cito. Lobato, J. (in press). Why do we need to create a set of conceptual learning goals for algebra when we are drowning in standards?

In K. C. Moore, L. P. Steffe, & L. L. Hatfield (Eds.), Epistemic algebraic students, WISDOMe Monographs (Volume 4).

Laramie, WY: University of Wyoming. Meijerink, H. (2008). Over de drempels met taal en rekenen. Enschede, The Netherlands: SLO.

Menne, J. (2004). Geschiedenis van de lege getallenlijn. Tijdschrift Voor Nascholing En Onderzoek Van Het RekenWiskundeonderwijs, 20(1), 3–14.

National Council of Teachers of Mathematics. (2006). Curriculum Focal Points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence. Reston, VA: Author.

Niss, M., & Højgaard, T. (Eds.). (2011). Competencies and mathematical learning, ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark (English ed.). Roskilde, Denmark: Roskilde University. Retrieved from http://diggy.ruc.dk/bitstream/1800/7375/1/IMFUFA_485.pdf

Novotná, J., & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. Mathematics Education Research Journal, 20(2), 93–104.

Olson, J. F., Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P., Erberber, E., & Preuschoff, C. (2008). Reviewing the TIMSS 2007 item statistics. In J. F.

Olson, M. O. Martin, & I. V. S. Mullis (Eds.), TIMSS 2007 technical report. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2007).

Pisa 2006: Science competencies for tomorrow's world executive summary. Paris, France: Author.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics, 26(2–3), 165–190.

Reichard, L., Rozemond, S., Dijkhuis, J., Te Vaarwerk, G., Verbeek, J., De Jong, G. ... Van Braak, J. (2005). Getal en Ruimte 2 vwo 1, eerste druk, vierde oplage. Houten, The Netherlands: EPN.

Reichard, L., Rozemond, S., Dijkhuis, J., Te Vaarwerk, G., Verbeek, J., De Jong, G. ... Van Braak, J. (2010). Getal en Ruimte 3 vwo 1, eerste druk, eerste oplage. Houten, The Netherlands: EPN.

Resnick, L. B., & Hall, M. W. (1998). Learning organizations for sustainable education reform. Daedalus, 127(4), 89–118.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1–36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. Educational Studies in Mathematics, 26(2–3), 191–228. Silver, E. A. (2009). Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: What might we learn? ZDM, 41(6), 827–832.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, (Vol. 4, pp. 281–288). Retrieved November 26, 2015, from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004d-3worlds-pme.pdf

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. Mathematics Education Research Journal, 20(2), 5–24.

Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. Educational Studies in Mathematics, 22(2), 125–147.

TAL Team. (2007). Tal—Meten en meetkunde bovenbouw. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff.

Treffers, A. (1987). Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction—The wiskobas project. Dordrecht, The Netherlands: Reidel Publishing Company.

Treffers, A. (1991). Meeting innumeracy at primary school. Educational Studies in Mathematics, 22(4), 333–352.

Treffers, A., & Buijs, K. (2001). Grade 2 (and 3)—Calculation up to 100. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Children learn mathematics. A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school (pp. 61–87). Utrecht, The Netherlands: Utrecht University, Freudenthal Institute.

Treffers, A., & De Moor, E. W. A. (1989). Proeve van een nationaal programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de basischool. Deel 1: Overzicht Einddoelen. Tilburg, The Netherlands: Zwijsen.

Treffers, A., Heuvel-Panhuizen, M. V. D., & Buys, K. (Eds.). (1999). Tal—Jonge kinderen leren rekenen. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff.

Treffers, A., & Moor, E. W. A. D. (1990). Proeve van een nationaal programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de basischool. Deel 2: Basisvaardigheden en cijferen. Tilburg, The Netherlands: Zwijsen.

Treffers, A., & Streefland, L. (1994). Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool: Deel 3a: Breuken. Tilburg, The Netherlands: Zwijsen.

Treffers,A.,Streefland,L.,&Moor,E.D.(1996).Proevevaneennationaalprogrammavoorhetreken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3a: Breuken. Deel 3b: Kommagetallen. Tilburg, The Netherlands: Zwijsen.

VandenHeuvel-Panhuizen,M.(Ed.).(2001).Childrenlearnmathematics.Alearning-teachingtrajectorywithintermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Utrecht, The Netherlands: Utrecht University, Freudenthal Institute.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. H. A. M. (2010). Reform under attack—Forty years of working on better mathematics thrown on the scrapheap? No way! In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Huirst (Eds.), Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 1–25). Fremantle, Australia: MERGA, Merga.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). Fractions, percentages, decimals and proportions. A learning-teaching trajectory for Grade 4, 5and 6. Rotterdam, The Netherlands: Sense.

van Hiele, P. M. (1973). Begrip en inzicht. Purmerend, The Netherlands: Muusses.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight. Orlando, FL: Academic Press.

Van Hiele, P. M. (2002). Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele Levels of thinking. In D. O. Tall & M. O. J. Thomas (Eds.), Intelligence, learning and understanding: A tribute to Richard Skemp.

Van Stiphout, I. M. (2011). The development of algebraic proficiency (PhD Thesis). Eindhoven: Eindhoven University of Technology. Retrieved from http://alexandria.tue.nl/extra2/719774.pdf

Van Stiphout, I. M., Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2013). The development of students' algebraic proficiency. International Electronic Journal of Mathematics Education – IΣJMΣ, 8(2–3), 62–80.

Vergnaud, G. (2012). Commentary 1. Educational Studies in Mathematics, 79(3), 439–445.

Verschaffel, L., Bryant, P., & Torbeyns, J. (2012). Introduction. Educational Studies in Mathematics, 79(3), 327–334.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 557–628). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Whitney, H. (1988). Mathematical reasoning, early grades (unpublished manuscript). Princeton University, Princeton, NJ.