SECUENCIA: JUEGOS Y DEMOSTRACIONES UTILIZANDO TROMINÓS

Marcelo Ponce – Darío Evans – Adriana Rabino

En este trabajo proponemos seguir el proceso que puede transitar un matemático en "su laboratorio", desde la inquietud de vislumbrar algunas propiedades, hacer conjeturas y ver si es posible demostrarlas. La propuesta parte desde un juego y utiliza como métodos de demostración el *algoritmo Divide y Reinarás* y el de *Inducción Completa.*

INTRODUCCIÓN Y JUEGO

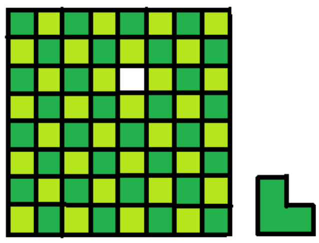
Los **poliominós** fueron introducidos por el matemático e ingeniero norteamericano Solomon W. Golomb en una conferencia en el Harvard Mathematics Club en 1953, y en su posterior artículo "*Checkers Boards and Polyominoes*" publicado en la revista *American Mathematical Monthtly*. Están relacionados con conceptos matemáticos como las teselaciones (o embaldosados), los patrones geométricos, los empaquetamientos o la medida (área), y de ellos han surgido infinidad de juegos de ingenio comerciales como el Katamino (el juego de los pentominoes), el Tetris, el Blokus, el Top-This, y variedad de puzzles geométricos.

Un **poliminó** o **poliominó** es un objeto geométrico obtenido al unir varios cuadrados o *celdas* del mismo tamaño de forma que cada par de celdas vecinas compartan un lado.

Si unimos dos cuadrados se obtiene un dominó, si juntamos tres cuadrados se construye un triominó o trominó, con cuatro cuadrados se tiene un tetraminó, con cinco un pentominó, y así se puede continuar para cualquier número de cuadrados.

En esta propuesta se utilizarán trominós.

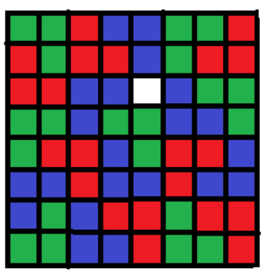
JUEGO



Materiales: 21 fichas de L-trominó y un tablero de 8x8 que se le ha eliminado un cuadrado (pintado de blanco), tal como lo muestra la figura.

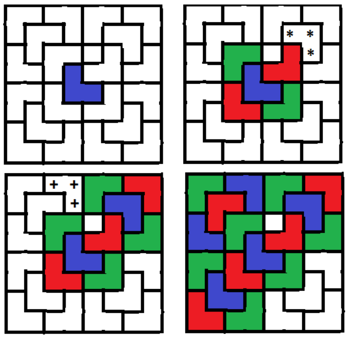
El juego consiste en recubrir con piezas con forma de L-trominó, (exactamente 21 piezas, puesto que 64 – 1 = 3 x 21) a todo el tablero (salvo un cuadradito).

VARIANTES DEL JUEGO QUE LO COMPLEJIZA



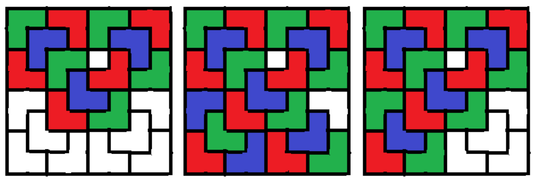
- Los L-trominós pueden tener además distintos colores, por ejemplo tres colores distintos y, por lo tanto, 7 fichas de cada color. Se trata entonces de que las fichas del mismo color no se puedan tocar entre sí, salvo por los vértices. Así, las reglas del juego pueden derivar en otro problema matemático, **el teorema de los cuatro colores**[1].

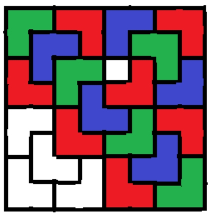
- Otra cuestión que nos podríamos plantear es si, dado un embaldosado cualquiera en el que no hemos tenido en cuenta los colores de los L-trominós, se podrían colorear a posteriori para que cumplieran la condición de que las fichas del mismo color no se toquen entre sí, con la excepción de los vértices. La respuesta es que no. Por ejemplo, dado el embaldosado que se ve en la primera figura, ¿se podrán colorear los L-trominós (7 de cada uno de los tres colores) para que satisfagan la condición sobre el color? Se demostrará que no:



La distribución de los colores en el cuadrado central es la única posible, salvo rotación de los colores. La pieza de la imagen con "*" tiene dos opciones de color, azul y verde; si esa pieza es azul, entonces quedan determinados los colores de las tres piezas que la rodean; y la cuestión es qué color tendrá la pieza con las "+", que podrá ser azul o roja; si esa pieza ahora es azul, se llega a la situación de la siguiente imagen, que no se puede resolver manteniendo el hecho de que haya exactamente siete piezas de cada color (es evidente que las siete piezas verdes ya se utilizaron).

Si la pieza de las "+" es roja, de nuevo se llegan a posiciones que no permiten obtener una solución válida.





Finalmente, si la pieza de asteriscos de arriba es verde, siguiendo un razonamiento análogo, tampoco se llega a una solución (método exhaustivo).

- ¿Será posible embaldosar el tablero 8 x 8 con las 21 piezas con forma de L-trominó y el cuadrado unidad blanco (o negro), de forma que las piezas del mismo color no estén en contacto ni siquiera por los vértices? La separación total, de los tres colores, es imposible[2].

"DIVIDE Y REINARÁS" E INDUCCIÓN COMPLETA

A partir del juego se pueden plantear distintas situaciones (propiedades a demostrar o teoremas) utilizando como herramientas el *Principio de Inducción Completa* con apoyatura visual y el algoritmo *Divide y Reinarás* (dicho popular).

[1] El teorema de los cuatro colores enuncia: *Bastan cuatro colores para colorear un mapa geopolítico plano, sin que dos países con frontera común tengan el mismo color.*

[2] Para más información, ver página de Kandon sobre el problema de los tres colores.

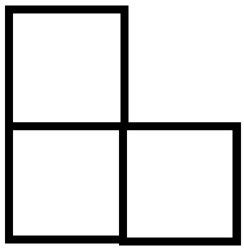
La demostración por *Inducción Completa*[3] funciona de la siguiente manera: imaginemos que deseamos demostrar una propiedad o proposición que depende de un parámetro n (número natural). La demostración por inducción se divide en dos partes:
i) Se demuestra que la propiedad se cumple para el primer elemento, cuyo orden es el número natural con el que se lo identifica, normalmente n = 0 o 1;
ii) se supone que la propiedad se satisface para un número de orden cualquiera k-1, entonces se debe demostrar que se verifica para el número k (el siguiente). Si esto sucede, entonces la propiedad se satisface para todo número n.
Podemos hacer una analogía con el "efecto dominó": si se voltea la primera pieza, y todas las otras están a una distancia tal, que si volteamos cualquiera (k-1) se voltea la siguiente (k), entonces todas las fichas caerán. Estas demostraciones decimos que tendrán apoyatura visual porque la propiedad a demostrar no sólo es numérica (referida a números naturales) sino que también es importante la ubicación de las piezas.
En el algoritmo *Divide y Reinarás* se procede de la siguiente manera: si el problema es sencillo, se resuelve directamente. Si el problema se complejiza, éste se divide en dos o más partes llamadas *subproblemas*. Las soluciones de los subproblemas se combinan para encontrar la solución del problema original. La técnica de *divide y reinarás* también se usa para resolver los subproblemas, y así sucesivamente. A menudo se utiliza la *recursión* para resolver los subproblemas.

Norton Starr, profesor de Matemáticas y Ciencias de la Computación del *Amherst College* de Massachusetts, fue quien sugirió a la empresa Kandon la realización de un juego basado en la demostración inductiva del **problema del embaldosado por L-trominós de un tablero "deficiente"** de 2^n x 2^n cuadrados, que estaba enseñando a sus estudiantes en su curso de Matemáticas Discretas.

Siguiendo la propuesta de Norton Starr, se utilizará el juego para llegar al desarrollo matemático deseado. Para ello, comenzaremos definiendo los siguientes conceptos:

- **Tablero deficiente:** cualquier tablero de tamaño m x m, es decir, de m cuadrados de lado, al que se le quita un cuadrado, quedándole m^2-1 cuadrados, se denomina un "tablero deficiente" si m^2-1 es divisible por 3 (Golomb[4]). El cuadrado que se quita puede estar en cualquier lugar.
- **L-Trominó:** ficha formada por tres cuadrados iguales puestos en la siguiente disposición:

[3] Más información en el problema *El efecto dominó en la página gpdmatemática.org.ar. Adriana Rabino.*
[4] Solomon Wolf Golomb (30 de mayo de 1932 – 1 de mayo de 2016) fue un matemático e ingeniero estadounidense, profesor de ingeniería eléctrica en la Universidad del Sur de California (USC), conocido por sus trabajos sobre juegos matemáticos.



- **Teselar, embaldosar, cubrir** (se usan como sinónimos): significa cubrir la región del plano (en este caso tableros cuadrados) sin que queden espacios vacíos, sin que se solapen las piezas y que ninguna pieza sobrepase el borde del cuadrado.

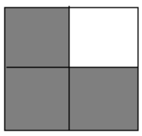
PROBLEMA

Embaldosar un tablero donde la medida del lado es potencia de 2

Solomon W. Golomb, planteó la propiedad "**todo tablero deficiente de lado 2^n se puede embaldosar con L-trominós".**

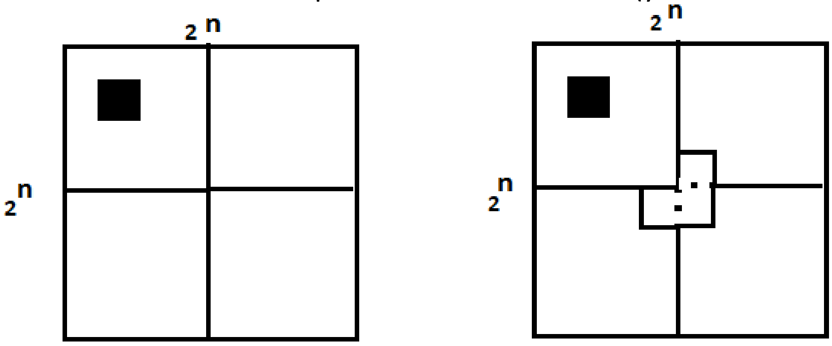
Distintas formas de demostrar esta propiedad:

1. Las potencias de 2 son óptimas para subdividir el problema por la mitad (en forma recursiva) y así utilizar el algoritmo *Divide y reinarás*.

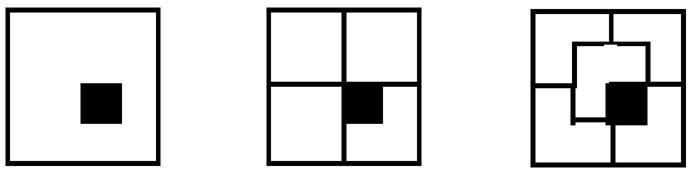


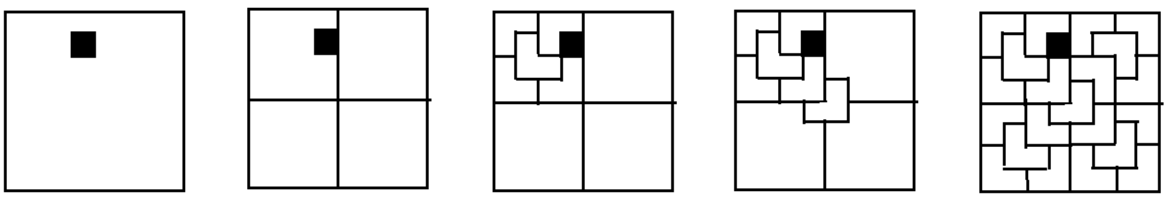
Si n = 1 podemos embaldosar el tablero porque si cubrimos el mismo con una sola pieza de L-trominó nos queda un cuadrado deficiente de 2 x 2, ya que 2 x 2 – 1 = 3 (múltiplo de 3).

Supongamos que n>1, utilizando la técnica *divide y reinarás* dividimos el tablero original en cuatro subtableros $2^n/2 \times 2^n/2 = 2^{n-1}/2^{n-1}$. El subtablero que contiene el cuadrado faltante es un subtablero deficiente de $2^{n-1}/2^{n-1}$ (al multiplicar los lados se obtiene una potencia de base 2 con exponente par. Al restarle 1 queda múltiplo de 3). Entonces, podemos embaldosarlo recursivamente. Los otros tres subtableros $2^n/2 \times 2^n/2$no son deficientes, por ello no podemos embaldosarlos recursivamente. Al ubicar un L-trominó como se muestra en la figura siguiente tal que cada cuadradito 1x1 yace en uno de estos tres subtableros restantes, se puede considerar cada uno de estos cuadrados 1x1 como el faltante en los subtableros restantes. De este modo, se puede embaldosar estos subtableros deficientes en forma recursiva, dividiendo cada uno de sus lados por 2 y repetir el procedimiento n-1 veces hasta que sus lados midan 2^1. En este caso quedan tableros de 2 x 2 (ya demostrado).



En las siguientes figuras se muestra cómo el algoritmo embaldosa un tablero deficiente de 4x4 y de 8x8:

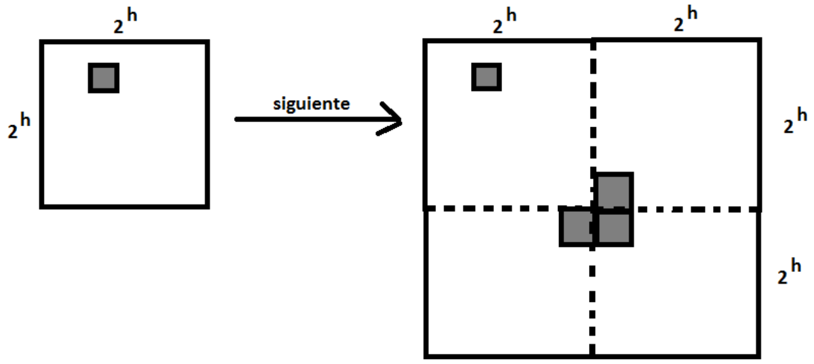




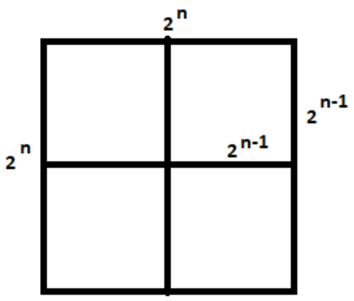
2. **Ahora se resolverá el mismo problema pero utilizando el método de *Inducción completa.***

P(1): La propiedad se cumple para n = 1 . En un tablero de $2^1 \times 2^1$ entra una pieza de L-trominó y sobra un cuadrado, por lo tanto es un tablero deficiente (porque $2^2 – 1 = 3$ que es múltiplo de 3) y puede ser cubierto.
P(h) => P(h+1)
Suponer que la propiedad se cumple para un valor h cualquiera, o sea que un tablero deficiente de $2^h \times 2^h$ se puede cubrir con L-trominós.
Debemos demostrar que la propiedad se cumple para h+1: un tablero deficiente de lado

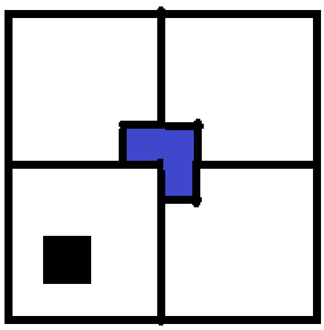
2^{h+1} puede ser cubierto por L-trominós
El tablero deficiente siguiente al de lado 2^h es un cuadrado de lado $2^h + 2^h$, porque
$2^{h+1} = 2^h . 2 = 2^h + 2^h$



Si se dispone una pieza de L-trominó de manera estratégica como muestra la figura, lo que resta de cada tablero 2^h x 2^h es un tablero deficiente que por hipótesis inductiva se cubre con L-trominós.
Juntando las 4 piezas, vemos que el tablero de 2^{h+1} x 2^{h+1} se puede cubrir con L-trominós, con los cual es deficiente ya que la cantidad de cuadraditos es múltiplo de 3 menos 1.



3. En la siguiente demostración se utilizan los dos métodos.
Podemos considerar que la propiedad es válida n = 0, dado que al sacar un cuadrado no queda nada para cubrir (se necesitan 0 L-trominós) y es un cuadrado deficiente ya que 2^0x2^0 - 1 = 0 que es múltiplo de 3. Pero supongamos que el primer elemento es n = 1. En este caso P(1) es verdadero: es un tablero de 2^1 x 2^1, que ya se demostró anteriormente su validez.
Supongamos que la propiedad se cumple para n-1, es decir, para los tableros deficientes de lado 2^{n-1} con n>2. Debemos demostrar la propiedad se cumplirá también para cualquier tablero deficiente de lado 2^n.
Para ello se utilizará la técnica de "*divide y reinarás*", dividiendo el tablero 2^n x 2^n en 4 subtableros de 2^{n-1} x 2^{n-1} como se muestra en la figura.



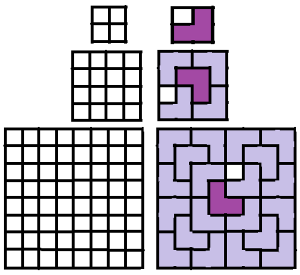
El tablero 2^n x 2^n es deficiente (ver figura), el cuadrado que se saque debe hacerse de alguno de los tableros de 2^{n-1} x 2^{n-1} menores. Ubicar un L-trominó estratégicamente como se muestra en la figura y de este modo se puede teselar cada tablero 2^{n-1} x 2^{n-1} con un cuadrado faltante (por hipótesis ya que son deficientes).
De esta manera el tablero 2^n x 2^n se puede cubrir con L-trominós dejando un cuadrado vacío, y así se cumple la propiedad.

Una vez demostrado para 2^n interesa saber qué sucede para cualquier tablero deficiente.
Golomb se planteó el problema de forma más general. Consideró cualquier tablero deficiente de tamaño m x m, es decir, de m cuadrados de lado, al que le quitó un cuadrado, quedándole m^2-1 cuadrados. Como m^2- 1 es múltiplo de 3 (por definición), los lados de esos

tableros deficientes son los elementos de la sucesión 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14,… (despejando m de la ecuación $m^2 - 1 = 3k$ y "forzando" para que la expresión (que es un radical) sea un número natural).

El problema quedó planteado del siguiente modo:

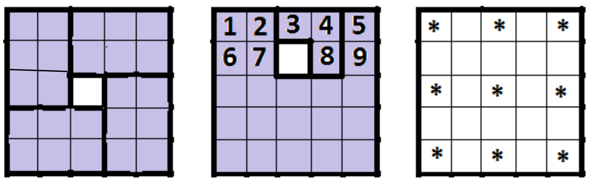
PROBLEMA: ¿Qué tableros deficientes pueden ser recubiertos con L-trominós?



La figura muestra embaldosados de tableros deficientes de lados 2, 4 y 8, cada uno a partir del anterior mediante la técnica del "*divide y reinarás*".

El tablero deficiente de lado m = 5 está en la sucesión anterior, sin embargo…

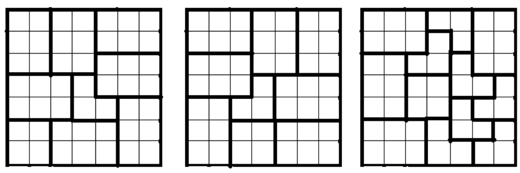
En un tablero 5x5, si el cuadrado eliminado es el central, como se muestra en la imagen, el tablero deficiente puede ser cubierto por rectángulos de dimensión 2 x 3, pero cada uno de



estos se construye con dos L-trominós, en consecuencia, en este caso se puede teselar. Pero si se quita el cuadrado que está en la segunda fila y la tercera columna, como se muestra en la siguiente imagen, el tablero resultante no puede ser cubierto por L-trominós. La explicación es sencilla, para cubrir el cuadrado con el número 3, habría que poner un L-trominó como el que se muestra en la imagen que ocupe los cuadrados 3-4-8 (respectivamente, uno simétrico, que ocupe los cuadrados 2-3-7), pero en ese caso ningún L-trominó podría cubrir el cuadrado 5 (respectivamente, el cuadrado 1).
<u>Por lo tanto, un tablero deficiente de lado 5 sólo se puede embaldosar si el cuadrado que se elimina es uno de los que está marcado con un asterisco.</u>

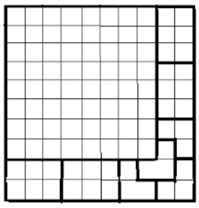
Este resultado da lugar al siguiente **Teorema (I. P. Chu, R. Johnsonbaugh):** *Todo tablero deficiente m x m se puede recubrir con L-trominós, salvo para m = 5.*

¿Qué ocurre para m = 7? En este caso, la respuesta es afirmativa. Martin Gardner en su artículo "*L-tromino Tiling of Mutilated Chessboards*" (2009) reproduce la demostración que Golomb le envió personalmente, pero que no está publicada. Esta demostración se basa en los tres diagramas que muestra la figura, que



embaldosan los tableros deficientes de lado 7 mediante rectángulos 2 x 3 (que trivialmente pueden cubrirse con dos L-trominós) y solitarios L-trominós, junto con un cuadrado 2 x 2, que es el que contiene al cuadrado eliminado. Estos diagramas recorren, por simetría, todas las posibilidades

¿Qué ocurre para el tablero deficiente de lado 10?

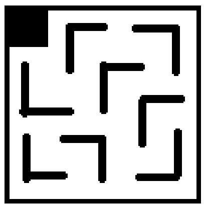


En este caso, no se puede utilizar el argumento inductivo mediante la duplicación del tablero deficiente de lado 5, puesto que precisamente para este no se satisface la propiedad. Sin embargo, se puede demostrar mediante otro tipo de razonamiento, como nos muestra Gardner en su artículo de 2009 y como se muestra en el diagrama.

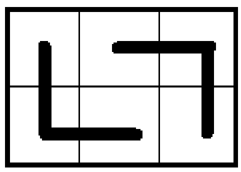
El argumento *inductivo* o el *algoritmo divide y reinarás* llevaría a resolver el problema para tableros deficientes de lados igual a 20, 30, 40, etc. Y así se podría seguir encontrando casos particulares, o familias de tableros deficientes que pueden ser teselados con L-trominós. Sin embargo, la cuestión del embaldosado de tableros deficientes mediante L-trominós fue resuelta completamente en el año 1986 por I. P. Chu y R. Johnsonbaugh en su artículo "*Tiling deficient boards with trominoes*" (1986).

MÁS PROBLEMAS

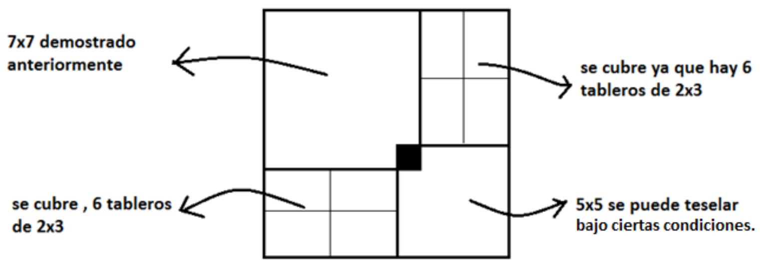
1. Dar un embaldosado de 5x5 con L-trominós en el que falte el cuadro superior izquierdo.
Solución:



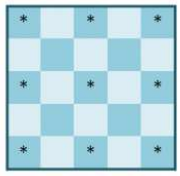
2. Demostrar que un tablero (2i) x (3j), con i,j perteneciente a los números enteros positivos, sin cuadro faltante se puede enlosar con L-trominós.
Solución:
Si un lado del tablero es múltiplo de 2 y el otro es múltiplo de 3, se pueden poner un número entero de veces subtableros de 2 x 3, y estos pueden ser teselados cada uno con 2 L-trominós como muestra la figura:



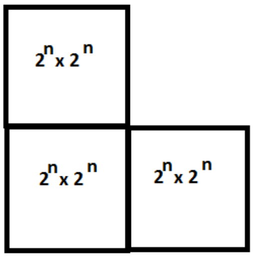
3. Demostrar que cualquier tablero deficiente de 11 x 11 se puede teselar con L-trominós. (Sugerencia: subdividir el tablero en tableros que se traslapen de 7 x 7 y 5 x 5 y dos tableros de 6 x 4.).
Solución:



Aclaración: el tablero 11x11 se puede teselar si el cuadrado faltante (negro) del tablero 5x5 está ubicado en alguno de los lugares donde se encuentran los asteriscos.



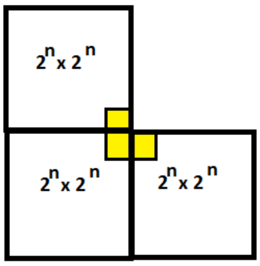
4. Este ejercicio y el que sigue se lo debemos a Anthony Quass. Una forma L de 2^n x 2^n , con n≥0 es una figura de la forma:



sin cuadros faltantes. Demostrar que cualquier forma L de 2^n x 2^n se puede teselar con L-trominós.

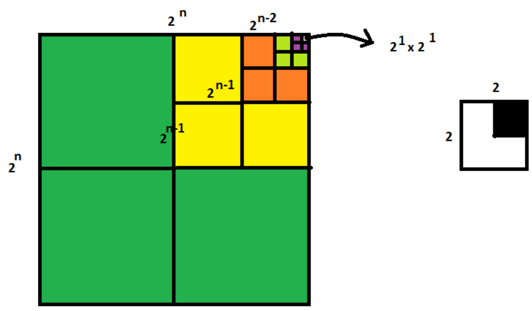
Solución:

Sabemos que un tablero deficiente de 2^n x 2^n se puede embaldosar con L-trominós(teorema de Golomb). Saquemos convenientemente tres cuadros de cada uno de los tableros de tal manera de poder forma con él una pieza de L-trominó. Así, los tableros son deficientes y pueden ser embaldosados con L-trominós, como muestra la figura:



5. Usar el ejercicio anterior para dar una prueba distinta de que cualquier tablero deficiente de 2^n x 2^n se puede teselar con L-trominós.

Solución:



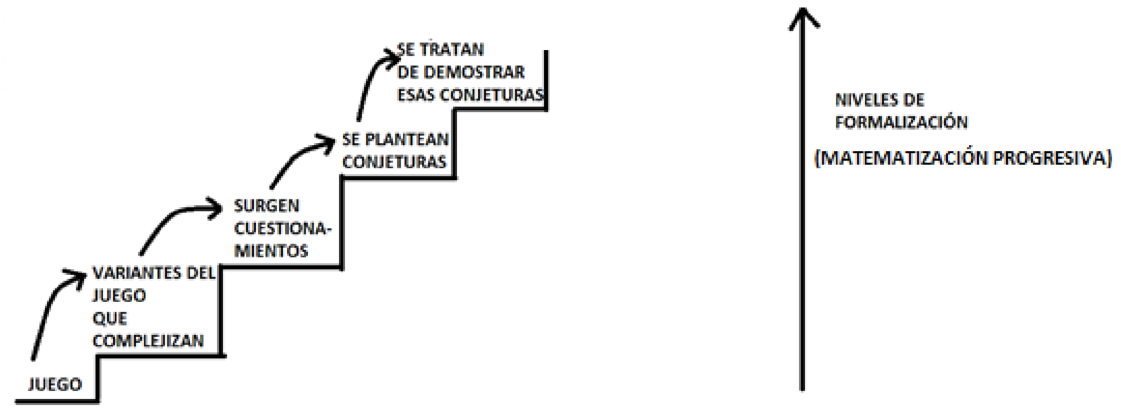
Dividir el tablero deficiente 2^n x 2^n en cuatro cuadrados de 2^{n-1} x 2^{n-1} . El cuadro faltante va a estar en alguno de los cuatro cuadrados. Los restantes forman una L que, por el ejercicio anterior es cubierta por L-trominós. Volver a repetir el procedimiento en el cuadrado deficiente. De esta manera quedan cuadrados de 2^{n-2} x 2^{n-2}, uno de ellos deficiente y los otros tres forman una L (que es cubierta por L-trominós). Seguir en forma recursiva n veces hasta obtener 4 cuadrados de tamaño 2^{n-n+1} x 2^{n-n+1} = 2^1 x 2^1 = 2 x 2. Éste último es un cuadrado deficiente que se cubre con una pieza de L-trominó.

FINALIZANDO

La fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983) se encarga de buscar e investigar situaciones (fenómenos) que puedan ser organizados por los objetos (Freudenthal no usa la palabra conceptos) matemáticos que se supone los alumnos deben construir. Para Freudenthal algo se considera un fenómeno cuando tenemos experiencia de ello, e incluye como fenómeno los mismos medios de organización de la matemática (estrategias, conceptos, notaciones) cuando se convierten en objetos de experiencia. *“El objetivo de una* *investigación fenomenológica es, por tanto, encontrar situaciones problemáticas a partir de las cuales se pueden generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical. Para encontrar fenómenos posibles de ser matematizados, podemos buscar entender cómo fueron inventados"* (Gravemeijer y Terwuel, 2000) (Reflexiones teóricas para la reflexión matemática, H. Alagia, A. Bressan, P. Sadovsky Del Zorzal 2005). Según el exponente de la Educación Matemática Realista *"El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o una teoría compleja es idealizada o simplificada a fines de volverla susceptible de un tratamiento matemático".*

En este proceso de matematización se siguieron los siguientes pasos:

-jugar con las piezas de L-trominós, cubriendo con estas piezas un tablero de 8x8 al cual le falta un cuadro.
-complejizar el juego agregando variantes.
-extender el juego a tableros de distintos tamaños para ver si todos se pueden cubrir con piezas de trominós. Entonces, se trata de dividir el problema en subproblemas que lleven a la solución del problema original. Se empieza con tableros cuyos lados midan potencias de 2, 2^n (facilita el proceso de subdividir).
-utilizar el método de *inducción completa* para demostrar las propiedades, con apoyatura en lo visual y el algoritmo *Divide y reinarás.*
-Se extiende la inquietud a cualquier tablero para preguntarnos: ¿Qué tableros n x n se pueden cubrir con L-trominós?



Nota: se continuó este trabajo haciéndolo extensivo a tableros rectangulares y tableros no deficientes. Sin embargo, por razones de extensión hemos dado un cierre acá.

Se agradece la revisión a la Correctora Literaria y Profesora en Letras Modernas Aída Manuela Angulo.

REFERENCIAS

BEFUMO, A. Y JOHNSONBAUGH, R.: *Extensiones del teorema de trominos de Golomb*
www.research.ibm.com/people/l/lenchner/trominoes
DEGIORGI: degiorgi.math.hr/oaa_lit/pod_vlad.palf

GARDNER, M. (2009). *L-tromino Tiling of Mutilated Chessboards*, The College Mathematics Journal 40, n. 3, p. 162-168.
JOHNSONBAUGH, R. (2005). *Matemáticas Discretas 6° edición.* Pearson Educación.
SOLOMON W. GOLOMB, (1994). *Polyominoes*, Princeton University.
TOMÉ, C.: *Embaldosando con L-trominos (un ejemplo de demostración por inducción).* Cuaderno de cultura científica.
https://culturacientifica.com/2014/07/16/embaldosando-con-l-triominos-un-ejemplo-de-demostracion-

Autores:
Marcelo Javier Ponce, DNI: 24.625.855 – poncemarcelojavier@gmail.com
Adriana Rabino, DNI: 10.985.629 - azitar53@gmail.com
Rubén Darío Evans, DNI: 28518770 - darioevans@gmail.com