UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
1972

María Alejandra Miotti
Sergio Alfredo Sciglitano

PITÁGORAS

En su escuela. En nuestra escuela

Universidad Nacional del Comahue

Rectora
Prof. Teresa P. VEGA a/c.
Buenos Aires 1400 - (8300) Neuquén
Tel: (0299) 4490363 / Fax: (0299) 4490351
sprector@uncoma.edu.ar

Secretaría de Extensión Universitaria
Abog. Juan José PILOTTO
Tel: (0299) 4490328
secunc@uncoma.edu.ar

Editor responsable: Luis Alberto NARBONA
Tel: (0299) 4490300 - Int. 617
educo@uncoma.edu.ar

Universidad Nacional del Comahue

PITÁGORAS
En su escuela. En nuestra escuela

María Alejandra Miotti, Sergio Alfredo Sciglitano

educo
Editorial de la Universidad Nacional del Comahue
Neuquén - 2010

PRÓLOGO

Estudiar quiénes eran los pitagóricos, situarse en su época y conocer las ideas filosóficas y matemáticas de su tiempo y cómo se desarrollaron las de esta escuela (¡y admirarse de ellas!) puede ser motivo de una investigación histórica que dé cuenta de la matemática como actividad humana, muy interesante y motivadora para nuestros alumnos. Sin lugar a dudas, la elaboración que S. A. Sciglitano hace en este libro es una contribución importante para que los lectores, comprendan mejor cómo se ligan *contextos* y *textos* (pensamientos) de modo que – como se dice en la introducción- "estimule a los lectores a visualizar los lazos que unen la historia del pensamiento científico y matemático con la historia del pensamiento filosófico."

Meterse en la forma de pensar de los pitagóricos, en sus recursos, en el cómo llegaron a sus conocimientos matemáticos a través de uno de sus aportes más valiosos, el Teorema de Pitágoras, puede ser una aventura que deje huellas profundas para el aprendizaje posterior de otros contenidos matemáticos y su trabajo en las aulas.

De la observación y la intuición a la demostración existe un salto cognitivo cualitativamente significativo, decisivo para comprender qué se entiende por ciencia matemática. Los modelos han sido, y son, los medios para ligar estos tipos de conocimiento. En particular los modelos visuales, por ser próximos a la forma de informarse del ser humano, resultan caminos de ida y vuelta entre la situación que representan y las que permiten imaginar.

Muchas de las "demostraciones" geométricas (que evitan en su enunciado hacer mención al cálculo) presentadas por Alejandra Miotti exigen operar mentalmente (visualmente) para modificar una situación

inicial y poner en evidencia las relaciones que lleven al teorema de Pitágoras. Éstas no sólo se basan en la observación directa, sino que necesitan reconocer propiedades y hacer transformaciones mentales, cambiando la situación visual original y se acercan mucho a lo que los pitagóricos y matemáticos prealgebraicos hayan podido hacer, y por ende, a lo que nuestros propios alumnos puedan hacer en el comienzo de su incursión en el tema.

El Teorema de Pitágoras, cuyo contenido hoy se traduce como una simple expresión algebraica, no fue visto por él de esta manera. Para este matemático y sus discípulos (como probablemente para sus antecesores babilónicos y chinos) era una relación entre áreas trabajada con recursos gráficos y pensamiento geométrico. Recién hacia el 1600, con el álgebra moderna, surge la expresión $a^2 + b^2 = c^2$ tan popular hoy día.

Este trabajo sin duda, colabora a la comprensión de cómo se desarrolló el pensamiento griego, filosófico y matemático, en una período especialmente prolífico, y explica cómo un alto nivel de abstracción matemática puede estar apoyado y expresado a través de un proceso de modelización visual (geométrica), sin un aparato de simbolización formal, a la vez que permite apreciar también cómo ésta colabora a expresar ideas complejas de manera más simple y rigurosa.

Valoramos el esfuerzo de los autores de integrar perspectivas en un texto que consideramos un valioso aporte para la profundización, en especial por parte de docentes y estudiantes, de la evolución del pensamiento matemático de una época, con un lenguaje accesible para todos.

Ana Bressan

INTRODUCCIÓN

Al publicar este trabajo, nuestra intención principal es proporcionar un instrumento de consulta y un material educativo que estimule a los lectores a visualizar los lazos que unen la historia del pensamiento científico y matemático con la historia del pensamiento filosófico. Intentar desentrañar esos lazos contribuye a conocer la profunda coherencia del pensamiento científico y del pensamiento filosófico griego, que encuentran en Pitágoras y su escuela una de sus máximas expresiones. Conociendo esos lazos, nos ejercitamos en una actividad que intenta visualizar la unidad del pensamiento matemático y del filosófico, superando de este modo una visión ingenua y anecdótica de la historia de la ciencia en general y de la historia de la matemática, en particular. Además, ello nos dará la oportunidad de repasar algunos de los principales autores, considerados clásicos de la historia de la matemática del siglo XX, muchas veces desconocidos en nuestros ambientes escolares.

Este texto se inscribe en una línea de continuidad de los seminarios de extensión de Historia de la Ciencia, que se vienen desarrollando en el ISFD Nº 6 de Neuquén Capital desde el año 2005. Dichos seminarios fueron avalados por la Dirección de Nivel Superior en el marco de la Resolución Nº 1812/03 del Consejo Provincial de Educación de Neuquén. Cabe señalar que en estos tres años se fueron realizando diversos cambios metodológicos y bibliográficos, teniendo en cuenta la población destinataria. Uno de los requerimientos para visualizar el nexo entre cuestiones teóricas y prácticas, en estos seminarios, fue la del estudio de un caso histórico. En los primeros tres años, el caso seleccionado fue el de Galileo Galilei.

En esta nueva oportunidad, hemos decidido conformar este grupo de trabajo con dos profesores, uno de Historia y otro de Matemática, y que el caso histórico a abordar fuera Pitágoras. Esta nueva mirada se debe principalmente al hecho del impacto que causan en la escuela de hoy los conocimientos generados por la escuela pitagórica, en su mayoría contenidos escolares del nivel primario.

Desde el principio, procuramos propiciar una participación activa en nuestros estudiantes, utilizando métodos y técnicas afines a un enfoque constructivista, trabajando al unísono elementos matemáticos y elementos de historia de la ciencia en general y de la historia de la matemática, en particular.

Hemos presentado algunos tópicos desde la historia del pensamiento científico, matemático y filosófico, a fin de cooperar con nuestros alumnos en la tarea de una construcción reflexiva de los contenidos pitagóricos, pensando en ellos como productores críticos de saberes, y no como meros receptores. Creemos que este texto puede ser de interés para cualquier docente dedicado a la enseñanza con una mirada dinámica del conocimiento. Somos conscientes del valor potencial que puede brindar un estudio de esta naturaleza; dicho estudio intenta profundizar el significado de la actividad matemática como parte integrante del contexto social y cultural del que forma parte.

Dos son los senderos que recorreremos en este trayecto: el primero es teórico y el segundo es de carácter práctico.

La primera parte está constituida por ocho capítulos: en el capítulo I, presentamos la biografía de Pitágoras de Samos; en el capítulo II, la escuela Pitagórica; en el capítulo

III, algunos tópicos de la doctrina pitagórica; en el capítulo IV, los aportes del pitagorismo; en el capítulo V, las circunstancias que contribuyeron al nacimiento del pensamiento filosófico griego; en el capítulo VI, la caracterización del pensamiento filosófico griego pre-socrático; en el capítulo VII, los períodos de la historia de la filosofía griega y en el capítulo VIII, la caracterización del pensamiento científico y de la matemática griega.

El capítulo IX forma parte del segundo sendero, de índole práctica, donde hacemos hincapié en un tema que desarrolló Pitágoras y que hoy forma parte del contenido escolar en nuestras aulas: el teorema de Pitágoras. Decidimos dejar para otra oportunidad la clasificación de los números, la representación con disposiciones geométricas de los mismos -aunque para nosotros es muy válido como recurso didáctico-, el registro de resultados de las multiplicaciones en tablas ("La Tabla Pitagórica") y el abordaje de la proporción con la aparición del número áureo.

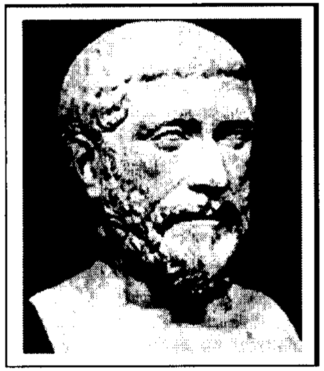
Creemos que esta sucinta y sugestiva manera de abordar la escuela pitagórica en su dimensión teórico-práctica puede ser útil para divulgar una visión dinámica de los contenidos pitagóricos. Por otro lado, coadyuvaría a comprender el pensamiento matemático como efecto de una racionalidad viva e histórica, ajena a todo tipo de dogmatismo. Si esto se ha logrado, hemos cumplido con uno de nuestros principales propósitos.

CAPÍTULO I

PITÁGORAS DE SAMOS

Pitágoras es uno de los matemáticos que ha gozado de mayor fama, a lo largo de la historia del pensamiento filosófico y científico de occidente.

Existen tantas perspectivas diferentes y contradictorias en torno a la biografía de Pitágoras, que al momento de identificar los principales eventos de su vida, es necesario recordar que ella fue transmitida por sus seguidores, por algunos otros filósofos contemporáneos y por filósofos y biógrafos posteriores.



Pitágoras (aprox. 580 - 500 a.c.)

Toda biografía de Pitágoras y todo estudio sobre el pitagorismo deberían enmarcarse en esta lúcida formulación: "En torno al pitagorismo y su fundador la tradición es capaz de decirnos tanto más cuanto más se aleja en el tiempo de tales fenómenos, y a la inversa, en la misma medida va acallándose cuando nos acercamos cronológicamente a su objeto mismo" (ZELLER, E.; MONDOLFO, R. 1967-1974:600).

Relatos legendarios e históricos deben combinarse con plasticidad, y sin rigorismos, ya que a menudo están mezclados y combinados con una naturalidad asombrosa; si los encuadramos con nuestros criterios de análisis actuales donde a nivel historiográfico, es inadmisible incorporar elementos legendarios, estaríamos incapacitados para acercarnos al ambiente griego, en el que se desplegó el pitagorismo.

Estas recopilaciones de textos, de tan variada procedencia (legendaria y/o histórica), no serían asombrosas, si tenemos en cuenta los mismos orígenes de la actividad historiográfica griega: "Un consentimiento casi universal hace nacer la historiografía griega con los logógrafos del Asia menor, que habrían recogido la información de los manuales en que los marinos anotaban los puertos y pueblos de las costas mediterráneas, con observaciones sobre sus costumbres y la historia local. La misma palabra "historia" deriva de un verbo que significa "explorar, descubrir", lo que vendría a corresponder al hecho de que la primitiva historiografía griega era ante todo, una exposición de "descubrimientos" sobre tierras y pueblos extraños" (FONTANA, J. 1982: 17-18).

Con estos presupuestos, tendríamos que adentrarnos en la lejanía y el "extrañamiento" sobre Pitágoras y el pitagorismo.

Durante muchas décadas, las fuentes sobre Pitágoras y el pitagorismo fueron exclusivamente orales y con fuertes juicios valorativos sobre su figura: Pitágoras fue un maestro indiscutido, tanto para sus allegados, como también para los posteriores seguidores denominados neopitagóricos; para sus detractores, en cambio, Pitágoras fue un personaje extravagante.

Sus principales detractores fueron los filósofos Jenófanes de Colofón y Heráclito de Efeso. El primero presentaba a Pitágoras como un místico diletante creyente en las doctrinas órficas de la transmigración de las almas (DIELS, H.; KRANZ, W. 1952; DK, 21B19); el segundo, lo consideraba un hombre superficial (DK, 22B40).

Para los filósofos posteriores, como Platón, los pitagóricos tienen el mérito de haber sostenido que la astronomía y la armónica son dos ciencias hermanas: "Parece –expliqué- que así como los ojos han sido hechos para la astronomía, los oídos lo han sido para el movimiento armónico, y que estas dos ciencias son hermanas, como dicen los pitagóricos, en lo cual nosotros, Glaucón convenimos. ¿O acaso no piensas lo mismo?" (PLATÓN, 1982:403). Platón se refiere a la persona de Pitágoras una sola vez en toda su obra filosófica, y seguidamente, evoca a su escuela: "–Pero si no ha prestado servicios a la ciudad, ¿los habrá prestado, al menos, a los particulares? ¿Se dice, acaso, que haya dirigido la educación de algunos jóvenes que le fueron adictos y transmitieron a la posteridad una concepción homérica de la vida, como Pitágoras, especialmente amado por ello, y cuyos continuadores se distinguen manifiestamente entre los hombres por un sistema de vida al cual han dado ellos mismos el nombre de escuela pitagórica?" (PLATÓN, 1982:510).

Las referencias platónicas sobre Pitágoras y la escuela pitagórica son demasiado pocas, si tenemos en cuenta que tuvo contacto directo con los filósofos neopitagóricos "Sin duda durante su gran viaje a Italia del Sur fue cuando pitagóricos como Arquitas, revelaron a Platón otro sector del universo inteligible, otro conjunto de realidades que se sustraían al devenir: el mundo matemático de los Números y las Figuras, que obedece a un orden racional y permite interpretar el conjunto del Universo." (SCHUHL, P. M. 1954:82).

Tampoco dejan de sorprendernos las pocas referencias que Platón realiza sobre los pitagóricos, teniendo en cuenta que la matemática ocupaba en el sistema platónico, un lugar privilegiado, en la educación: "(...) ¿Y qué otra clase de enseñanza queda, si ponemos de lado la música, la gimnasia y las demás artes? (...) La que enseña a conocer el uno, el dos y el tres. Me refiero, en suma, a la ciencia de los números y del cálculo. ¿O no es verdad, acaso, que ningún arte y ningún conocimiento pueden prescindir de ella? (PLATÓN, 1982:391) y además para conocer logística militar, y "ser hombre": "(...) es una enseñanza absolutamente necesaria, si quiere entender algo de la organización de un ejército, o, más bien si quiere ser hombre" (PLATÓN, 1982:392).

Aristóteles se interesa poco por la matemática, a la que no le asigna un lugar privilegiado en su diferenciación de las ciencias. La matemática es solamente una ciencia que estudia la cantidad y no tiene para él, connotaciones ni intuitivas, ni epistémicas. (ARISTÓTELES, METAFÍSICA 1964:220). Sin embargo, se refiere varias veces a los pitagóricos en su extenso corpus pero su visión de Pitágoras fue más bien negativa.

Los neopitagóricos Moderato de Gades, Apolonio de Tiana y Nicómaco de Gerasa exaltan su figura y contribuyen a mezclar su vida con elementos fabulosos, míticos y legendarios: de aquí surgen los numerosos textos que incorporaron los relatos orales.

Hacia la segunda mitad del siglo II d. C., aparecen los volúmenes de Diógenes Laercio donde se relatan numerosas vidas de filósofos. En esta obra se utilizan múltiples fuentes, pero muchas de ellas son apócrifas.

El libro sexto, dedicado a la escuela itálica, comienza diciendo: "cuyo fundador, fue Pitágoras" (DIÓGENES, D. L. 1947:285).

Este peculiar biógrafo (del que también es difícil identificar datos de su vida), utiliza numerosas veces en su obra, las expresiones "según se dice, (...) sostienen algunos autores que Pitágoras, (...) asegura tal o cual autor (...) fue el primero en enseñar, dicen". En todas estas expresiones podemos evidenciar la variedad y calidad de fuentes utilizadas, ensambladas con cierto desorden y haciendo hincapié en datos que no son necesariamente relevantes para nuestro interés actual, pero es uno de los primeros textos europeos, dedicados en forma orgánica a Pitágoras y a otros tantos filósofos de la antigüedad.

Al final de la vida de Pitágoras, Diógenes escribe: "Relatamos a continuación como murió Pitágoras: estaba en la casa de Milón, con sus compañeros, cuando uno a quien él había despedido puso fuego a la casa, para vengarse. Según otra versión, fueron los mismos crotoniatas quienes prendieron fuego, para liberarse de la tiranía a que él los tenía sometidos. Pitágoras consiguió escapar, pero lo alcanzaron en su fuga, porque habiendo llegado a un sembrado de habas, se detuvo diciendo: "es mejor ser detenido, que pisarlas con los pies, antes morir que hablar". Entonces, fue degollado por quienes lo venían persiguiendo. La mayor parte de sus compañeros, en número de cuarenta, perecieron en esta ocasión; muy pocos pudieron escapar, entre los cuales estaba Arcitas de Tarento y Lisis (...) Sostiene Dicearco que Pitágoras, había buscado asilo en Metaponto, en el templo de las musas, donde murió de hambre a los cuarenta días. Heráclides sostiene opinión contraria en su compendio, dice que habiendo encontrado a Milón de Crotona en los preparativos de un gran festín, se retiró inmediatamente a

Metaponto, donde cansado de vivir, se dejó morir de hambre" (DIÓGENES, D. L. 1947:296, 297).

En referencia a la compleja cuestión de la fiabilidad de las fuentes, afirma el historiador de la ciencia danés Kragh: "(...) siempre es posible que surjan dudas de la autenticidad de la fuentes, aunque ello sea una conclusión puramente negativa. En la práctica, el historiador tiene que admitir que algunas fuentes sean verídicas y tiene derecho a hacerlo; a saber, si no hay ninguna otra fuente que contradiga la información que nos da la fuente en cuestión, no hay motivos razonables para poner en duda su autenticidad. Por lo tanto, habrá que tomar su testimonio por fiable. A menos que pase algo que afecte a este carácter, la fuente puede pasar a formar parte del fondo de conocimientos históricos que actúan como garantía de la fiabilidad de otras fuentes" (KRAGH, H. 2007:203).

Teniendo en cuenta estas precauciones, existe un cierto consenso en torno a los eventos más significativos su vida, que sintetizamos a continuación:

Su nacimiento, se produjo en la isla de Samos, en el mar Egeo, (situada al sud oeste de la costa de la actual Turquía) probablemente entre los años 571-570 A. C.

Sobre este nacimiento, la leyenda más frondosa la dio el filósofo neoplatónico Jámblico en el siglo IV. d. C. diciendo que era hijo de Menemarco y de Pites, y que hubo intervención al mismo tiempo de los dioses: hijo del dios Apolo, amado de Zeus.

Incluso existe una narración, anterior, atribuida al neoplatónico Nicómaco de Gerasa, donde se evocan los orígenes de Pitágoras y su nacimiento siguiendo la matriz del relato del nacimiento de Cristo, que dio el evangelista San Lucas.

En torno a sus viajes, se afirma que hacia el año 538 a. C. dejó Samos por cuestiones políticas (era opositor del régimen de Polícrates), para realizar algunos viajes en la cuenca del mediterráneo.

Según se dan noticias en diferentes fragmentos, Pitágoras estuvo en Egipto y en las ciudades babilonias, donde asimiló numerosas doctrinas filosóficas y científicas.

Su patria de adopción fue finalmente Italia, que en esos días pertenecía a la denominada Magna Grecia.

En la escrupulosa compilación de textos sobre los filósofos presocráticos, realizada por Conrado Egers Lang y Victoria Juliá, donde incluyen textos de Dicearco y Porfirio, podemos leer: "Cuando arribó a Italia y habitó en Crotona, dice Dicearco, (Pitágoras) apareció como un hombre que había viajado por muchos lugares, poco común y muy bien provisto por la fortuna de una naturaleza singular, de aspecto noble y muy agradable, así como de excelsitud y dignidad en la voz, costumbres y en todo lo demás. Produjo en el Estado de Crotona tal efecto que después de conmover las almas de los ancianos gobernantes con largos y bellos discursos, éstos lo invitaron a pronunciar exhortaciones adecuadas a la edad de los jóvenes y a los niños congregados en los colegios, y luego a las mujeres; también fue organizada una reunión de las mujeres con él. Al suceder estas cosas, creció grandemente su fama, y ganó muchos discípulos de esa ciudad, no sólo hombres, sino también mujeres -el nombre de una de las cuales se hizo célebre, Teano-, así como muchos reyes y gobernantes de países bárbaros vecinos" (EGGERS LANG, C.; JULIÁ, V. 2000: 167).

La zona más recorrida por el filósofo fue la actual región de Reggio Calabria y la ciudad de Crotona, donde estableció su residencia. Además, visitó numerosas veces otras ciudades de esa misma región: Regium, Síbaris, Tarentum, Locri, etc. y de la isla de Sicilia: Milazzo, Selinunte, Agrigento, Catania, y Siracusa. En todas estas ciudades, Pitágoras estableció estrechas relaciones con sus habitantes, que le permitieron fundar numerosas escuelas e intervenir activamente en política.

Las tendencias políticas de Grecia podrían delinearse, para esos tiempos, y a grandes rasgos en: aristocráticas (donde prevalecían pocos grupos, con mucho poder) y democráticas (donde había mayor incidencia de numerosos grupos sociales).

Pitágoras estuvo siempre involucrado con los grupos más elitistas y ricos, en los cuales asumía sus concepciones aristocratizantes y restrictivas del poder y del conocimiento, que eran, potencialmente, para muchos, pero real y finalmente para unos pocos.

Pitágoras y sus discípulos se adecuaban por lo general al statu quo, de las ciudades que frecuentaban, primordialmente interesados en poder ejercitar su filosofía o sea su modo de vida y costumbres.

No obstante ello, la afirmación de una actividad política activa es bastante verosímil. En la ciudad de Crotona tuvieron participación activa en política. Bajo instigación pitagórica, los crotonenses atacaron la ciudad de Síbaris.

Una vez llegado a Crotona, Pitágoras pronunció cuatro discursos legendarios, compilados de acuerdo a las numerosas fuentes que nos presentan (EGGERS LANG, C. y JULIÁ, V. 2000:169-180) y recordándonos su aureola fantástica:

De ellos, podemos extraer algunas ideas claves del pensamiento de Pitágoras:

Primer Discurso: " (...) tanto en el universo como en la vida, en los estados y en la naturaleza, es más venerado lo que precede en el tiempo que lo que le sigue, dando como ejemplos: el levante (es más venerado) que el poniente, la aurora más que el crepúsculo, el principio más que el fin, la generación, más que la destrucción; a su vez, en forma semejante, los autóctonos, más que los forasteros; del mismo modo en las colonias, los líderes y fundadores de un estado (son los más venerados), y en general, los dioses más que los demonios, éstos, más que los semidioses y los héroes más que los hombres, y entre éstos, más los que son causa de nacimientos que los más jóvenes." (...) "A continuación habló sobre la moderación, afirmando que a la edad de los adolescentes pone a prueba su naturaleza en la época en que sus deseos alcanzan mayor fuerza. Después los exhortó a considerar que, entre las virtudes, sólo a la moderación conviene ser buscada tanto por muchachos como por mujeres vírgenes o casadas, así como también por la generación mayor, pero sobre todo por los más jóvenes. Sólo esa virtud, les reveló, abarcaba tanto los bienes del cuerpo como los del alma, preservando la salud y el deseo para las mejores realizaciones vitales" (...) "Y sostuvo otros argumentos similares unos provenientes de informaciones de otros, otros de opiniones personales, para demostrar que la formación integral es una buena constitución que es común a los más aventajados en cada género de actividades. En efecto, los descubrimientos de éstos sirven a la formación integral de los demás. Y esto es, por naturaleza, importante a tal punto que, mientras las otras cosas habitualmente elogiadas –por ejemplo, la fuerza, la belleza, la salud, la bravura- no se pueden transferir a otros, o bien –como en el caso del dinero, los puestos de mando, y otras cosas circunstanciales- (una vez transferidas) no se las puede recuperar más. De la formación integral, en cambio, puede hacerse partícipe a otro sin que por eso, quien la da, pierda lo que posee."

Segundo Discurso: "Una vez que los jóvenes narraron a sus padres lo que se les había dicho, el Consejo de los Mil invitó a Pitágoras, y tras elogiarlo por lo que dijera a sus hijos, le preguntaron si tenía algo de provecho que decir a los crotoniatas, para hacérselo saber a los que presidían el gobierno. En primer lugar, les aconsejó erigir un templo a las Musas, a fin de preservar la armonía existente" (...) "Después les dijo que debían tomar a la patria como un depósito que, en común, habían recibido de la mayoría de los ciudadanos".

Tercer Discurso: "(...) Se dirigió a los niños, diciéndoles que no fueran los primeros en injuriar ni que se desquitaran de los que los injuriaran. Debían poner atención en la formación integral, la cual llevaba ese nombre por la edad de ellos. Para el niño que obrara bien sería fácil conservar la nobleza de carácter toda la vida; pero para quien no se beneficiara durante esa etapa decisiva, sería difícil alcanzarla; en efecto, es imposible correr bien hasta la meta, tras haber comenzado mal".

Cuarto Discurso: "Según se cuenta, a las mujeres hizo una exposición acerca de los sacrificios" (...) "En resumen, se ha conservado el recuerdo de las mencionadas reuniones, que generaron una inmensa fama y veneración en torno a Pitágoras, tanto en el estado de Crotona como, a través de ella, por todo el sur de Italia".

Muchas fuentes sostienen que Pitágoras se había reencarnado varias veces y esta afirmación no es llamativa, si tenemos en cuenta la doctrina de la transmigración del alma. Esta consideraba al alma de origen celeste, opuesta al cuerpo, pero complementaria a él.

Innumerables fuentes lo presentan como un hombre de aspecto hermoso, locuaz, magnánimo, inmensamente sabio, virtuoso etc. Incluso, al ser de origen humano y divino, tenía un muslo de oro. Esta leyenda nació a partir de que alguno de sus allegados lo vio una vez desnudo. En otras oportunidades, se cuenta, que para demostrar su ascendencia divina, el mismo Pitágoras mostró a muchos su muslo de oro.

Según Diógenes de Laertes, "Pitágoras recordaba a menudo, haber vivido sucesivamente en Aithalides, hijo de Hermes y de una madre mortal, en el héroe troyano Euforbo, en Hermótimos de Clazomenes y en Pirro, pescador de Delos." (DIÓGENES DE LAERTES 1947:290).

En estos discursos se pueden visualizar claramente las ideas de Pitágoras en la pre-existencia del alma y en la transmigración, todo ello basado en la rigurosa ética de la purificación. La ascética pitagórica insistía en el esfuerzo que debía hacerse para incorporar la armonía en el alma de los hombres y solamente de este modo podía elevarse a la mística, o al estado de contemplación del orden del cosmos. En esta dimensión se asemejaría a la divinidad.

Esta moral pitagórica que inducía concretamente a las prácticas de las virtudes como la armonía (para superar el desorden), la amistad y la vida en común, se asentaba en las prácticas individuales de la austeridad, la pobreza, el desprendimiento de las cosas materiales, la prudencia, entre otras.

La oratoria pitagórica y la puesta en escena de estas representaciones impactaron fuertemente en la ciudad de Crotona y en muchas de las ciudades del sur de Italia, que Pitágoras visitaba. Si tenemos en cuenta este consenso, no es de extrañar que fuera uno de los filósofos más reconocidos y celebrados durante toda su vida.

Existen otras afirmaciones que dicen que después de su muerte se había reencarnado en una mujer hermosa, meretriz, de nombre Alco. (EGGERS, L.; y JULIÁ, V. 2000:162).

También se afirmaba, teniendo en cuenta el ambiente de las teorías de la reencarnación del alma, que había sido contemporáneo de personajes históricos que habían vivido en épocas anteriores.

Una de las intervenciones políticas más nombradas fue la que Pitágoras instigó para que los crotoniatas ataquen la ciudad de Síbaris (a pocos kilómetros al norte de Crotona). La invasión fue exitosa, pero la dominación crotoniata sobre los sibaritas duró poco tiempo. Tomando venganza, los sibaritas, liderados por el militar Cylon, devastaron Crotona, y con ello obligaron a Pitágoras a exiliarse en la ciudad de Metaponto, donde murió, según narran las fuentes que hemos tenido oportunidad de leer, en circunstancias bastante diferentes.

Según Jámblico, de acuerdo a la compilación de Eggers y Juliá, "Pitágoras fue el primero en tomar el nombre de filósofo. Esto no implicaba sólo un nombre nuevo, sino que anticipó una enseñanza útil de la propia ocupación. Dijo, en efecto, que el ingreso de los hombres en la vida se parece a la concurrencia masiva a las reuniones festivas. En efecto, así como allí andan por todos lados hombres que poseen diversos propósitos (uno, el que está apresurado por vender mercaderías con miras a un negocio ventajoso; otro, el que concurre para exhibir la fuerza de su cuerpo, en busca de honores; hay incluso una tercera especie, la más libre, que se congrega con el fin de ver los lugares y obras artesanales más bellas y los hechos y palabras virtuosas, de las cuales suele haber muestra en las reuniones festivas), análogamente en la vida, hombres muy diversos se congregan en un mismo lugar: unos son presa de ansias de

riquezas y bienes superfluos; otros, del deseo de dominio y mando, y son poseídos por el amor a la victoria y por la ambición desesperada. Y el más puro es ese tipo de hombre que se muestra en la contemplación de las cosas más bellas, al que corresponde el nombre de filósofo" (EGGERS, L.; y JULIÁ, V. 2000:182).

Uno de los temas más debatidos es si Pitágoras escribió su doctrina, o fue transmitida solamente en forma oral. "Ión de Quíos, en las Tríadas, dice que Pitágoras compuso algunos poemas y los atribuyó a Orfeo" (...) "Y sin embargo Pitágoras no escribió nada, ni tampoco Sócrates, ni Arcesilao ni Carnéades" (EGGERS, L.; y JULIÁ, V. 2000: 201)

Según Diógenes de Laertes, Pitágoras escribió al menos tres textos: sobre educación, sobre el gobierno de las ciudades y sobre física: "Algunos insisten en que Pitágoras no dejó ningún libro, en lo cual se equivocan. Así Heráclito, el físico ha gritado a toda voz y ha dicho: Pitágoras, hijo de Menesarco, se ejercitó en informarse más que los demás hombres, y con lo que extrajo de estos escritos formó su propia sabiduría: mucha erudición, arte de plagiarios. Hablaba así porque al comienzo del libro de la Física, Pitágoras dice esto: No, por el aire que respiro; no por el agua que bebo: nunca toleraré censura respecto de este discurso. Y Pitágoras ha escrito tres libros: Pedagogía, Política y Física" (EGGERS, L.; y JULIÁ, V. 2000: 201).

CAPITULO II

LA ESCUELA PITAGÓRICA

Ya se ha señalado anteriormente la complejidad en torno a las fuentes de la biografía de Pitágoras; todo ello sigue siendo válido al momento de acercarnos a la escuela pitagórica.

Nuevamente son esclarecedoras las afirmaciones de Zeller y Mondolfo:

"I.° el sistema pitagórico, tal como lo conocemos, es obra de distintos hombres y de distintos tiempos. II.° es difícil discernir en él, los elementos que pertenecen a Pitágoras" (ZELLER, M.; MONDOLFO, R. 1967-1974: 680).

En esta perspectiva, se debe admitir que en el pitagorismo se produce un largo proceso de recreación, donde se fueron adicionando numerosos elementos y aportaciones; por ello, se hace complejo discernir las aportaciones del pitagorismo primigenio, con los sucesivos pitagorismos, que fueron emergiendo en las costas del mediterráneo.

Existió un pitagorismo primigenio, o contemporáneo a Pitágoras y numerosos pitagorismos posteriores: en muchas fuentes, se los presenta sin discriminar, lo que dificulta la demarcación de las doctrinas originales y de las sucesivas.

Su originalidad y peculiaridad siempre fue notable y "debe tenerse presente que la hermandad pitagórica fue una de las primeras sociedades científicas cooperativas no sacerdotales de todo el mundo, sino la primera, y que sus miembros atribuían el trabajo común a todos, por consentimiento mutuo, a su maestro" (BELL, E.T. 2003: 65).

La escuela, o asociación pitagórica, tenía su fundamento en una base existencial y moral: "El fuerte sentimiento de los males y de las imperfecciones inherentes a la existencia humana, unido a un esfuerzo moral, parece haber engendrado en Pitágoras la idea de una asociación, que debería conducir a sus miembros, a través de una consagración religiosa, con la forma de preocupaciones morales y en virtud de ciertas prácticas, a la pureza de vida y a la observación de las normas morales" (ZELLER, M.; MONDOLFO, R. 1967-1974: 610).

A esta base, los pitagóricos la refuerzan, con una gran novedad: el cultivo de la investigación, que era como denominaban a la geometría: "La geometría era llamada investigación" (EGGERS, L.; y JULIÁ, V. 2000:183) y en íntima relación a ella, el cultivo de la música.

La búsqueda de la salvación para los pitagóricos entrelazaba los elementos místicos (con ritos iniciáticos), morales e intelectuales. En este sentido, se diferenciaron de todos los demás grupos místico-mágicos, que abundaban en la cuenca mediterránea.

Uno de los conceptos que más se adecua para denominar a la hermandad pitagórica, es el de "thyasa", que comprende cofradía, secta, y/o asociación de iniciados.

Los maestros y los seguidores de la escuela ocupaban diferentes lugares, donde existía un riguroso ordenamiento.

Se ordenaban en acústicos, matemáticos y físicos:

<u>Los acústicos, u oyentes</u>, que solamente escuchaban las lecciones del maestro, pero no podían verlo.

<u>Los matemáticos</u>, quienes podían ver al maestro y establecer cierto diálogo.

<u>Los físicos</u>, quienes gozaban, después de superar las etapas anteriores, de los beneficios de la escuela y de la experiencia contemplativa.

Hay quienes afirman que practicaban la comunidad de bienes: "Las cosas de los amigos son comunes, (aplicadas) a las cosas bien participadas. Dicen que el proverbio fue dicho por primera vez en la Magna Grecia, en aquellos tiempos en que Pitágoras persuadió a los que habitaban a poseer todo sin dividir. Al menos así dice Timeo, en el libro VIII: al acercársele los jóvenes que querían convivir con él, no los admitió en seguida, sino que, dijo era necesario que las fortunas fueran comunes a los que se reunían. Después de muchas cosas añade: y por medio de aquellos se habló por primera vez en Italia, de que comunes son las cosas de los amigos. Esto es mencionado también por Aristóteles en el libro VIII de la Ética" (EGGERS, L.; y JULIÁ, V. 2000:214).

En la escuela, se practicaban algunos preceptos como la prohibición de comer carnes, de comer habas, y otros alimentos, que contaminaban el cuerpo y el alma, y por ellos era oportuno evitarlos.

También existían preceptos para la vestimenta y el decoro: la lana para los vestidos se consideraba no aconsejable, en tanto que las telas más sutiles, como el lino, se adecuaban más a la vida cotidiana y a las prácticas simbólico-mágicas. Se cultivaron las disciplinas físicas, astronómicas, matemáticas, médicas y musicales por su valor científico y como ascesis, para intentar el acercamiento a la divinidad. También dieron mucha importancia al cultivo del cuerpo y a todas las actividades relacionadas al deporte y a la lucha.

En el catálogo de los pitagóricos más conocidos, figuran los siguientes nombres:

"De Crotona: Hipóstrato, Dimas, Egón, Hemón, Silo, Cleóstenes, Agelas, Epsilio, Ficíadas, Ecfanto, Timeo, Buto, Erato, Itaneo, Rodipo, Brias, Euandro, Milias, Antimedón, Ageas, Leofrón, Agilo, Onato, Hipóstenes, Cleofrón, Alcmeón, Damocles, Milón y Menón.

De Metaponto: Brontino, Parmisco, Oréstadas, León, Darmameno, Eneas, Quilas, Melesias, Aristeas, Lafaón, Euandro, Agesidamo, Jenócades, Eurifemo, Aristómenes, Agesarco, Alcias, Jenofantes, Tráseo, Eurito, Epifrón, Eirisco, Megistias, Leócides, Trasímedes, Eufemo, Procles, Antímenes, Lácrito, Damótages, Pirrón, Rexibio, Alopeco, Astilo, Lácidas, Haníoco, Lácretes y Glicino.

De Agrigento: Empédocles. De Elea, Parménides.

De Tarento:, Filolao, Eurito, Arquitas, Teodoro, Aristipo, Licón, Hestio, Polemarco, Asteas, Cenias, Cleonte, Eurimedonte, Arceas, Clinágoras, Arquipo, Zopiro, Eutino, Dicearco, Filónides, Frontidas, Lisis, Lisibio, Dinócrates, Equécrates, Pactio, Acusiladas, Ico, Pisícrates, Clearato, Leonteo, Frínico, Simiquias, Arístoclidas, Clinias, Habróteles, Pisidorro, Brias, Helandro, Arquémaco, Mimnóaco, Acmónidas, Dicas y Carofántidas.

De Síbaris: Metopo, Hípaso, Anto, Próxeno, Evánor, Léanax, Menestor, Diocles, Émpedo, Timasio, Polemeo, Endio y Tirseno.

De Cartago: Milcíades, Anto, Hodios y Leócrito. De Paros, Ecio, Fanecles, Dexíteos, Alcímaco, Dinarco, Metón, Timeo, Timesiánax, Eumoiro y Timáridas.

De Locro: Gitios, Jenonte, Filodamo, Evetes, Eudico, Estenónidas, Sosístrato, Eutino, Zaleuco y Tímares.

De Posidonia: Atamante, Simo, Próxeno, Cránao, Mío, Batilao y Fedón. De Lucana, los hermanos Ocelo y Ocilo, Aresandro y Cerambro.

De Dardania: Malión. De Argos, Hipomedonte, Timóstenes, Eveltonte, Trasidamo, Critón y Polictor.

De Lacedemonia: Autocáridas, Cleanor y Euricrates. De Hiperbórea, Ábaris.

De Reggio: Arístides, Demóstenes, Aristócrates, Fitio, Helicaonte, Mnesíbulo, Hipárquides, Eutosionte, Euticles, Opsimos, Calaís, Salinuncio.

De Siracusa: Leptino, Fintias y Damón. De Samos, Meliso, Laconte, Arquipo, Heloripo, Heloris e Hipón.

De Caulonia: calímbrotos, Dicón, Nastás, Drimonte y Jéneo. De Fliunte, Diocles, Equécrates, Polimnasto y Fantón.

De Sición: Políades, Demón, Estratio y Sóstenes. De Cirene, Proro, Melanipo, Aristángelo y Teodoro.

De Cízico: Pitodoro, Hipóstenes, Brutero y Jenófilo. De Catana, Carondas y Lisíades.

De Corinto: Crisipo. De Tirrenia, Nausito. De Atenas, Neócrito. De Ponto, Lirammo.

En total, doscientos dieciocho." (EGGERS, L. y JULIÁ, V. 2000:216-218).

En el catálogo de Jámblico, se agrega una lista de diecisiete mujeres de la escuela pitagórica. (DIELS, H.; KRANZ, W. 1952:21B58).

Esta temática viene estudiándose desde hace varias décadas y uno de los textos clásicos es el de Meunier, M. (1932); más recientemente, podemos nombrar a Arrigoni, G, (1985); Cavarero, A, (1990) y Tognazzi, G, (2006), en cuyas obras logramos visualizar la profundización del pitagorismo y sus vinculaciones con los actuales estudios de género.

La escuela pitagórica se diferenció completamente de las otras escuelas presocráticas, al cultivar y utilizar asiduamente la matemática y todas las concordancias posibles entre el número y la realidad.

La filosofía y la matemática eran practicadas al unísono y eran consideradas indagaciones e investigaciones del ámbito divino. Eran consideradas actividades divinas.

Las matemáticas cultivadas por los pitagóricos, se reducía a los números naturales; "estaban fascinados por el 1, 3, 6 y 10, porque estos números podían expresarse geométricamente en triángulos compuestos de puntos. Entendían a la perfección la importancia de los números, que solamente son divisibles por sí mismos y por 1 –los números primos, como el 2, 3, 7 y 11-. También puede ser que entendieran que los números primos son fundamentales, esparcidos como rubíes oscuros entre una pálida panoplia de números ordinarios. Descubrieron que ciertos números, como el 6, 28 y 496, pueden expresarse como la suma de sus divisores. Vivían en cavernas-al menos eso dice la leyenda-, y allí en cuclillas, con un montoncillo de cantos en sus regazos, vieron que existían los números cuadrados y los números triangulares, que había relaciones amistosas entre los números –como cuando cada miembro de un par es la suma de los divisorios del otro, o cuando la suma de dos números triangulares consecutivos, como el 3 y el 6, es un número cuadrado- y progresiones entre una serie de números y otra" (BERLINSKI, D. 2006:16).

CAPITULO III

ALGUNOS TÓPICOS DE LA DOCTRINA PITAGÓRICA

a) LOS NÚMEROS, FUNDAMENTO DE LAS COSAS

Los "llamados pitagóricos construyen todo el universo con números" (ARISTÓTELES, METAFÍSICA 1964: 234), que son el fundamento material de todas las cosas. Existe una correspondencia e identificación total entre los números y las cosas; los números son concebidos como cosas, y las cosas, como números. Los números que los físico-filósofos pitagóricos conciben son únicamente los números enteros y en ellos fundamentan la pluralidad numérica que se manifiesta en las cosas.

"Con el término números, los pitagóricos se referían sólo a los números enteros, concebidos como las colecciones de varias unidades. No hicieron indagaciones particulares sobre la naturaleza de estas unidades, limitándose a representarlas con puntos, rodeados cada uno por un espacio vacío. Era problema esencial para los pitagóricos captar la manera en que de la colección de varias unidades, se generaban todos los seres" (GEYMONAT, L. 1998:22).

El cosmos es una unidad que da cuenta del número, pero "como el número, no es más que tomar en diversas formas la unidad (por ejemplo, el número 3 es tomar tres veces la unidad) entonces decían los pitagóricos que el Uno era el origen de todas las cosas y en ellas estaba. Este Uno, origen de las cosas e inmanente a ellas es eterno, único, inmóvil, idéntico a sí mismo; el Uno, en definitiva, es considerado como la divinidad. Lo que no es inmóvil, eterno, idéntico a sí mismo, son las manifestaciones del Uno. El Uno es una realidad que se manifiesta diversamente pero que, como fundamento, permanece siendo el mismo en sus diversas manifestaciones. Las manifestaciones son lo ilimitado respecto al Uno que es lo ilimitado. Para generar la diversidad, lo Uno, debe caer en el límite, debe limitarse a sí mismo. Hay un pasaje de la metafísica aristotélica donde podemos leer que los pitagóricos: abiertamente afirman que una vez consolidada la Unidad, bien a partir de plano, de superficie, de un germen o de elementos que no saben expresar, inmediatamente la parte de lo Ilimitado más próxima comenzó a ser arrastrada y limitada por el límite" (GARCÍA ASTRADA, A. 1984:27).

En un capítulo dedicado al sentido de los números, Spengler sostiene: "En el número, como signo de la total limitación extensiva, reside, pues, como lo comprendió Pitágoras, o quien fuera, con la íntima certidumbre de una sublime intuición religiosa, la esencia de todo lo real, esto es, de lo producido, de lo conocido y al mismo tiempo, limitado" (...) "La afirmación de que el número es la esencia de todas las cosas aprehensibles por los sentidos sigue siendo la más valiosa proposición de la matemática antigua" (SPENGLER, O. 1993:92 y 100).

En esta relación matemática-mística, están de acuerdo también historiadores de la matemática: "La filosofía pitagórica se basaba en la afirmación tácita de que el número entero era la causa de las distintas cualidades del universo. "Todo es número", he aquí la divisa de la escuela pitagórica. Su doctrina proclamaba que la elevación del alma y su unión con Dios se conseguirían por medio de las matemáticas y que Dios había ordenado el universo gracias a los números. Dios es la unidad, el mundo, la pluralidad que contiene los elementos contrarios. La armonía restaura la unidad con las partes y las moldea en el cosmos" (COLLETTE, J. P. 2002:73).

Pero una de las máximas expresiones de la intuición pitagórica, además del misticismo numérico, fue la que podría denominarse racionalismo numérico, que sería el fundamento de la cosmogonía más abstracta, a la que fue capaz de llegar el pensamiento presocrático.

b) LOS NÚMEROS Y LA REPRESENTACIÓN

Para los pitagóricos, la representación gráfica de los números fue de gran importancia.

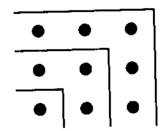
Existían para ellos, los números figurativos (donde por ejemplo, nueve puntos, dispuestos en tres filas lineales, formaban un número cuadrado).

Dejaron de representarlos con letra, como se hacía anteriormente, y comenzaron a utilizar pequeñas piedras, para facilitar las operaciones de cálculo.

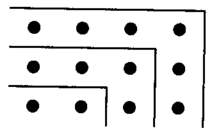
Representando los números, podían construir series y al distribuirlos, conforme al nomon (una especie de escuadra), podían visualizar la estrecha relación entre esos números y las variadas figuras geométricas que se conformaban.

En su clásico y voluminoso estudio sobre la filosofía de los griegos, los europeos Zeller y Mondolfo (ZELLER, E.; MONDOLFO, R. 1967-1974:676) nos facilitan valiosas representaciones:

Para el cuadrado de la mónada, utilizan esta figura:

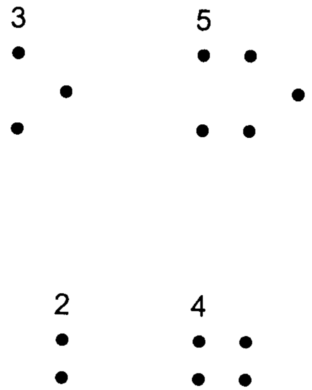


Y para el rectángulo de la díada:



Los números, por ser el fundamento de las cosas, como ellas, se reducen a oposiciones numéricas.

De esta oposición provienen los números pares e impares. Los números pares poseen una entidad ilimitada, y los impares, en cambio limitada:



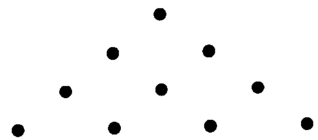
Como podemos visualizar, las dos series de puntos de los números pares proceden ilimitadamente, en tanto que los números impares proceden limitadamente, en un espacio cerrado.

De aquí, que par más par es igual a par, y así sucesivamente. Las oposiciones son el efecto de una

oposición primaria, de la que provienen todos los números, sus figuras geométricas y las cosas mismas.

Posteriormente, se generalizó la costumbre de interpretar simbólicamente los números, hecho que fue atribuido a sus seguidores:

el número 10, que incluía la representación de todos los números juntos:



que denominaron "tetraktys" (o grupo de 4). En esta representación se incluyen:

(1+2+3+4=10); (1+3=4); (4+3=7); (7+3=10)

y también las figuras geométricas:

1=punto; 2=línea; 3=superficie; 4=volumen.

Representando de este modo, los pitagóricos asumían la identificación entre aritmética y geometría, estudiando "la geometría a través de la aritmética". De ello surgió una disciplina que por su propio carácter fue llamada aritmogeometría.

"Estaba basada en la convicción de que por un lado, era posible extraer las principales características de las figuras a partir del número de puntos (que en cada caso se supone finito) que las componen y, por el otro, que fuera posible –viceversa-recurrir a la forma de las figuras para ilustrar las más recónditas propiedades de los números" (GEYMONAT, L. 1998: 23).

No es asombroso, que en esta posibilidad de representación, los números también tuvieran una correspondencia simbólica y místico-mágica.

Buscaron esta correspondencia en diferentes aspectos de la realidad, donde el:

1 correspondía al fuego, razón o lógos.

2 correspondía a la dóxa (opinión) y a la feminidad.

3 correspondía a la sabiduría y a la masculinidad.

4 correspondía a la justicia (número cuadrado, producto del igual por el igual) y al orden.

5 correspondía al matrimonio (siendo la suma de 2, primer par, y de 3, primer impar).

6 correspondía a la vida (siendo producto del primer par femenino, por el primer impar masculino).

7 correspondía al sol y a la luz, al Dios Apolo y a la salud.

8 correspondía al amor.

9 correspondía a la justicia (siendo el producto del igual, por el igual).

10 correspondía a la perfección y a la sacralizad por excelencia.

Estas correspondencias, fundadas en las principales oposiciones, también eran una representación del universo, que se fundaba en el orden matemático:

En este orden, al:

1 corresponde el punto, y de él, se deriva la línea

2 corresponde la línea y de ella, se deriva la superficie

3 corresponde la superficie y de ella, se derivan los sólidos, y de los sólidos, se derivan todos los elementos

4 corresponde al volumen

Y de ellos, se derivan:

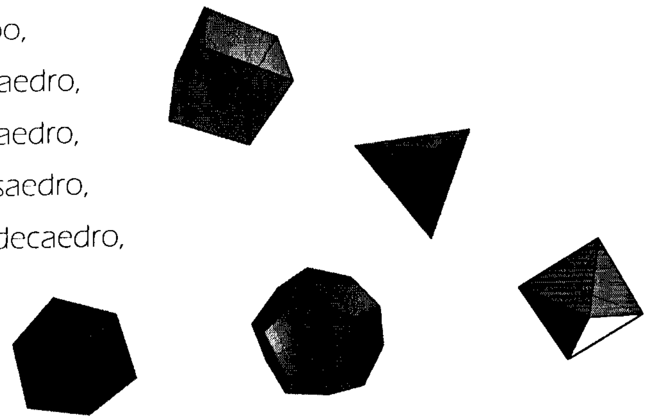
El cubo,

El tetraedro,

El octaedro,

El icosaedro,

El dodecaedro,



Concibiendo al número como fundamento de todas las cosas, también el número es clave de interpretación de las cosas, deducibles del orden aritmo-geométrico y físico.

En esta dimensión, los fenómenos terrestres y celestes también están en correspondencia y en orden, o sea en un cosmos.

Ese cosmos puede ser estudiado por la aritmogeometría, ya que los números son el fundamento de las cosas: todo puede ser medido, y concebido en clave numérica y geométrica.

"El principio de todas las cosas es la mónada; de la mónada viene la díada indefinida que le está subordinada como a su causa. La mónada y la díada indefinida, producen los números y éstos, los puntos. De los puntos vienen las líneas, de las líneas los planos, y de los planos, los sólidos; de los sólidos vienen los cuerpos sensibles, en los cuales entran los cuatro elementos: fuego, agua, tierra y aire, que se transforman y producen los seres. El mundo que resulta de su combinación, es animado, inteligente, esférico; envuelve por todas partes a la tierra, situada en su centro, es física, ella también y habitada en toda su extensión" (DIÓGENES, D. L. 1947:292).

c) LOS NÚMEROS Y LA ARMONÍA

Sería oportuno comenzar con este clásico relato sobre Pitágoras: "Se dice que pasando ante una herrería, advirtió que los sonidos producidos por el choque de los martillos con los yunques variaban según el peso de los martillos y el volumen de los yunques; tomando entonces medidas sobre cuerdas tensas dícese que comprobó que la octava se define por una relación 2/1 (sonidos emitidos por dos cuerdas, una de doble longitud que la otra), la quinta por relación 3/2, la cuarta por la relación 4/3. Ahí tenemos los orígenes de la acústica y de la interpretación matemática del universo" (SCHUHL, P. M. 1956:37).

La acústica pitagórica se fundamenta en el intento de la armonización de los contrarios y por ello, los pitagóricos estudiaron con detenimiento la vinculación entre los números y los intervalos musicales.

"Según la más antigua tradición, debemos admitir, en efecto, que Pitágoras logró descubrir los principales intervalos musicales. Habría llegado a este notable descubrimiento por el estudio experimental de las cuerdas sonoras y por la comprobación de que en los principales acordes la relación entre sus longitudes se expresa con números enteros muy simples.

De esa manera la acústica constituye una especie de aritmética aplicada, como la astronomía constituía una geometría aplicada. El cuadro de las investigaciones científicas, por lo tanto, resultó subdividido en cuatro ramas fundamentales: aritmética, música, geometría y astronomía" (GEYMONAT, L. 1998:24).

Es desde la aritmética pitagórica, que debe comprenderse la ley de los intervalos musicales: "La ley relaciona los tonos de las notas emitidas por cuerdas de la misma clase, sometidas a iguales tensiones, con las longitudes de las cuerdas. Este descubrimiento, el primero en la física matemática, reveló una interdependencia inesperada del número, el espacio y la armonía" (BELL, E. T. 2003:60).

En la ascesis pitagórica se daba un importante lugar (junto a la práctica de la ciencia matemática) al cultivo de la música, donde la lira, era el instrumento más utilizado. "Cantad al son de la lira y testimoniad, por medio de himnos, vuestro reconocimiento a los dioses y a los hombres virtuosos" (DIOGENES, D. L. 1947:292).

Sin embargo, la práctica del silencio (sobre todo en el primer período de la formación que se prolongaba por cincos años) era uno de los principales requisitos para ser parte integrante de la escuela.

El intento de la armonización de los elementos contrarios se practicaba en una dimensión existencial de totalidad: la vida estaba completamente unida a las experiencias cognoscitivas, existenciales y estéticas.

Es notable cómo los pitagóricos pudieron armonizar la práctica del silencio y del sonido, con una actitud muy particular de su espíritu, para transfigurar los elementos de sus conciencias de un modo tan creativo y particular.

La armonización del campo matemático con el estético es una muestra de complementariedad: el pentagrama representaba el conocimiento.

El concepto de armonía, como unión y combinación de sonidos diversos, simultáneos pero acordes, está íntimamente ligado al concepto de un orden y de una organización que impactará fuertemente en la mayoría de los modelos pedagógicos practicados por los griegos.

"Con la matemática entra en la educación griega un elemento esencialmente nuevo (...) Irradia especialmente del aspecto normativo de la investigación matemática. Baste recordar la importancia de la música para la educación primitiva de los griegos, y la íntima relación de la matemática pitagórica con la música, para ver que la primera teoría filosófica sobre la acción educadora de la música había de proceder de la consideración de las leyes numéricas del mundo sonoro. La conexión de la música con la matemática establecida por Pitágoras, fue, desde aquel momento, una adquisición definitiva del espíritu griego" (JAEGER, W. 1983:163). Aristóteles, en uno de los pocos reconocimientos que hace de los pitagóricos, afirma que extrapolaron sus concepciones matemáticas musicales, a la astronomía: "Viendo que los atributos y las razones, de la escala musical eran expresables por números, de aquí dedujeron que todas las cosas en la naturaleza eran expresables por números, y los números les parecieron que eran las mismas cosas de la naturaleza, y que todo el cielo era una escala musical y un número" (ARISTÓTELES METAFÍSICA 1964: 280).

CAPÍTULO IV

APORTES DEL PITAGORISMO

a) Práctica del pensamiento filosófico y del pensamiento científico, en una coordenada de complementariedad.

b) Impacto sustantivo en los modos posteriores de la práctica filosófica y científica, señalando una perspectiva cada vez más abstracta.

c) Construcción de una sólida sistematización racional (asimilando y profundizando algunas ideas matemáticas anteriores) donde la matemática se concibió, por primera vez como una totalidad. "Pitágoras transformó la filosofía concerniente a las matemáticas en una forma de educación libre" (EGGERS, L. C. y JULIÁ, V. 2000:184). Esa libertad llevó al modo pitagórico de pensamiento.

En esa totalidad, se recurrió, como ya se ha señalado, fundamentalmente a la capacidad de abstracción para la resolución de los problemas.

No sería desatinado recordar que algunos epistemólogos del siglo XX, subrayaron la importancia de la categoría de totalidad: "Un aspecto que hasta ahora no se ha subrayado lo suficiente, por lo menos en nuestra opinión: la importancia fundamental de la categoría de la totalidad.

El lenguaje común habla con frecuencia de la verdad matemática como absoluta e incuestionable; así, por ejemplo, se suele afirmar que cierto resultado es matemático, para decir, absolutamente cierto y que no reconocerlo como tal sería signo evidente de falta de racionalidad. Sin embargo, las cosas son completamente distintas, como ha puesto de manifiesto la crítica moderna.

En realidad, cuando se afirma que un resultado es matemáticamente cierto, se afirma únicamente que es demostrable en el ámbito de una teoría, es decir, deducible de sus axiomas en razón de ciertas normas lógicas predeterminadas de antemano. Se infiere que si es verdadero en una teoría, podría ocurrir perfectamente que no lo fuera en otra. Por ejemplo, es cierto en la teoría euclidiana que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos; pero este resultado ya no es cierto en la geometría no euclidiana.

Si bien es innegable que el hombre de la calle (es decir, el que no es especialista en matemáticas) habla con frecuencia de resultados matemáticamente verdaderos, sin hacer referencia explícita a la teoría dentro de la cual son ciertos (es decir, dentro de la cual pueden explicarse), es también innegable que esto sucede sólo porque la referencia a esa teoría parece superflua, dado que resulta, tanto para él como para quienes le escuchan, completamente familiar. Sin embargo, la crítica actual ha establecido sin lugar a dudas que ningún resultado matemático es verdadero por sí mismo. Es verdadero sólo en tanto que forma parte de una teoría, es coherente con sus axiomas y no puede negarse si se acepta la teoría en su globalidad. La referencia a la categoría de totalidad (totalidad de la teoría) es aquí incontestable" (GEYMONAT, L. 1977:20).

En esta perspectiva, el pitagorismo es concebido como una totalidad, como un sistema de pensamiento y de vida que se identificaban y se imbricaban mutuamente.

d) Aporte, a nivel metodológico, de la innovación y la necesidad de la demostración y las rigurosas exigencias de las deducciones lógicas.

e) Ubicación de la aritmética y de la geometría en un lugar primordial y fundacional para la matemática.

f) Definiciones fundantes de la matemática: el punto como unidad con posición.

La clasificación de los ángulos en las tres categorías: rectos, agudos, obtusos, según midan 90°, menos, o más de esta cifra.

g) Concepción geométrica del espacio, concebida como entidad continua, homogénea e ilimitada.

CAPÍTULO V

CIRCUNSTANCIAS QUE CONTRIBUYERON AL NACIMIENTO DEL PENSAMIENTO FILOSÓFICO GRIEGO

El pueblo griego, en su larga historia, produjo numerosas creaciones en la esfera política, social y cultural. Muchas de estas creaciones han tenido sustancial impacto en la posterior conformación de la cultura de occidente.

Esas magníficas creaciones se sustentaron en el modo de producción esclavista. (ANDERSON, P. 1979). Los filósofos griegos no solamente admitían la naturalidad del esclavismo, sino que también la justificaban. En la sociedad esclavista griega, los esclavos, que podían pertenecer al estado y/o a los ciudadanos particulares, eran considerados como cosas, u objetos y eran, numéricamente, la mayoría de la población (FINLEY, M. 1984).

Nunca se insistió demasiado en torno a la desmitificación de algunos lugares comunes alrededor de a la cuestión del "milagro", del "genio" del pueblo griego.

Para aproximarnos a esta idealización, es oportuno señalar que desde el humanismo y el renacimiento italiano, en los siglos XIV y XV, comenzaron los europeos a estudiar más críticamente y valorizar la cultura greco-latina.

Bruneto Latini, Dante Alighieri, Giovanni Boccacio, Francesco Petrarca, Coluccio Salutati, Pietro Paolo Vergerio, Leon Batista Alberti, Leonardo Bruni, Bernardino de Siena, Lorenzo Valla, etc. se abocaron al estudio de fuentes de los pensadores greco-latinos, con una perspectiva diferente a la que se había tenido en el medioevo.

Hubo dos hechos trascendentes: la llegada a Italia de los sabios griegos Jorge Gemistos Pletón, Juan Basilio

Besarión, y Argirópulos, en la primera mitad del siglo XV, y la creación de la academia florentina, donde actuó Marsilio Ficino y, vinculado a ella, Giovanni Pico Della Mirándola (GARIN, E. 1963), quien intentó conciliar las doctrinas de la iglesia, la cabala hebrea, junto a las doctrinas neoplatónicas y neopitagóricas. Todo ello dio un impulso inusitado a los estudios de los filósofos griegos (GARIN, E. 1983).

De ahí en más, la ponderación fue cada vez común, y las expresiones del milagro y del genio griego fueron moneda corriente en Europa. La obra que sostiene la tesis de la genialidad fue escrita en 1915, por J. Burnet y no indaga en esa peculiaridad (BURNET, J. 1944).

En el ámbito de la cultura clasicista ilustrada alemana del siglo XVIII, los filósofos, pensadores e historiadores del arte como Hegel, Lessing, Winckelman, Goethe (GOETHE, J. W. 2001), etc. resaltaron las virtudes del ideal helénico de las medidas proporcionadas y equilibradas; la imperturbabilidad, la serenidad, y la armonía; la claridad, que se encontraba solamente en la cuenca del mar mediterráneo. Incluso Sigmund Freud continuaba subyugado por este ideal mediterráneo, afirmando en sus cartas, enviadas desde las penínsulas italiana y griega: "y nuestro corazón como ha podido comprobarse, apunta hacia el Sur" (FREUD, S. 2003:134).

En ese coro de apologistas, una voz discordante fue la del filósofo Friedrich Nietzsche, quien señaló que en el espíritu griego luchaban el elemento apolíneo (medidas proporcionadas y equilibradas, serenidad, armonía, etc.) y el dionisíaco (la desmesura, el desequilibrio, la impetuosidad, la desarmonía, etc.). La genialidad de la capacidad creadora de los griegos se debía, según Nietzsche, al elemento dionisíaco. (NIETZSCHE, F. 2000).

Otros estudiosos nos presentan visiones más conciliadoras: la tesis de J. P. Vernant profundiza en el contexto económico, político y socio-cultural para explicar cómo se produjo el paso del mito al logos. (VERNANT, J.P. 1965).

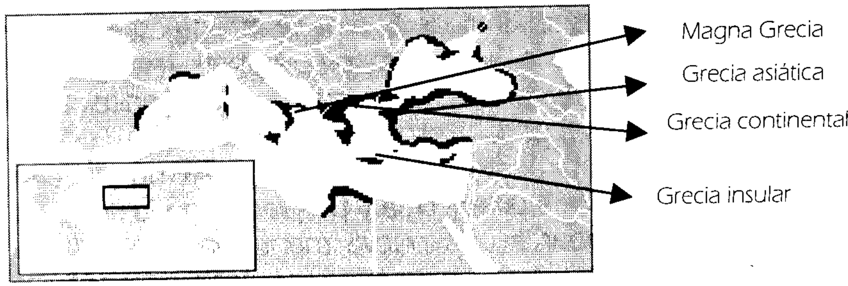
El epistemólogo italiano Ludovico Geymonat afirmó: "El milagro griego, o sea la maravillosa formación de la civilización helénica, no se produjo fuera de la influencia de las más antiguas civilizaciones mediterráneas. Más bien comenzó en el momento en que los griegos, al organizarse en una sociedad cada vez más rica y dinámica, necesitaron establecer relaciones más estrechas (antes que nada comerciales) con los pueblos vecinos. (...) Los misterios órfico-dionisíacos, claramente inspirados en el mito egipcio de Isis y Osiris, constituyeron una de las más directas experiencias de esta nueva sensibilidad, a veces perturbada por infinitas ansiedades y esperanzas. En general se atribuía el nombre de misterios a las prácticas rituales, de carácter orgiástico, tendentes a suscitar en los iniciados un estado de casi locura que habría debido prepararlos para la acción del dios.

Junto (...) se encuentra desde épocas homéricas otro tipo de religión –la llamada religión olímpica- con caracteres nítidamente diferentes (...) En el ánimo de los griegos se mezclaron profundamente, uno con el otro, el espíritu apolíneo y el espíritu dionisíaco (...) Justamente esta complejidad de motivos contrastantes constituye la verdadera grandeza de la civilización griega" (GEYMONAT, L. 1998:15,16).

Aun prestigiosos investigadores continuaban, hasta hace pocas décadas, invocando argumentos raciales para comprender "el milagro griego" y la predisposición al pensamiento deductivo de la matemática: "La raza helena, surgida probablemente de la fusión de las poblaciones egeas con los invasores aqueos llegados de Europa central al final de la Edad de Bronce, es una raza extraordinariamente dotada: curiosa, inteligente, intuitiva y artista, sensible sobre todo a la realidad de las formas inteligibles en la naturaleza, el arte y las costumbres y las leyes. Esta raza de hombres dedicados a la búsqueda de la verdad en todas sus formas, fomentó una atmósfera de racionalismo en la que, desde el siglo VI a. C., los hombres se preocuparon, no sólo de investigar el "cómo", sino sobre todo, de establecer el "porqué". Así las matemáticas prehelénicas estudiadas por el filósofo griego, se convierten en una ciencia deductiva cuyas características y resultados no dejan de asombrar al hombre de ciencia que trata de penetrar en sus secretos" (COLLETTE, J. P. 2002: 65,66).

Habiéndonos situado en algunos de los términos de esa clásica polémica, podríamos, a continuación, identificar algunas de las circunstancias que contribuyeron al nacimiento del pensamiento filosófico griego:

Situación geográfica: Grecia posee un clima mediterráneo. La tierra es escasa, árida y pocas extensiones son arables. El cultivo de la vid y del olivo se adecua perfectamente a esas condiciones desfavorables. Las costas de la península griega se despliegan en un espacio de más de dos mil kilómetros y en la antigüedad, la población se distribuía en la península balcánica (Grecia continental) y en el amplio espacio de la cuenca mediterránea: las islas del mar Egeo (Grecia insular), las costas de Asia Menor (Grecia asiática) y las costas de Regio Calabria y Sicilia, en el sur de Italia (Magna Grecia). Este espacio marítimo configuró un lugar abierto, que gracias a los viajes de intercambio y de expansiones militares (con las consiguientes tensiones que provocaban estas invasiones) posibilitó a los griegos el relacionarse con otras sociedades.



El mundo griego a mediados del siglo VI a. C.

Situación política y social: Los primeros estados, surgidos en Mesopotamia y Egipto, estaban rígidamente estratificados y el poder estaba centralizado en monarquías teocráticas. Los funcionarios, sacerdotes y guerreros detentaban las principales claves de la tradición escrita, contribuyendo a sostener y consolidar ese estado personalista y teocrático. Estas sociedades eran estáticas y poco permeables a los cambios. Las ciudades griegas, en cambio, estaban organizadas en sociedades más dinámicas, donde se mantenían fuertes vínculos familiares, de mayor solidaridad y horizontalidad. Este tipo de organización social, denominado "oikos", era una comunidad con capacidad de autoabastecimiento, con una economía abierta y activa. La estructura de poder se conformaba en torno al grupo de ancianos, los asesores y un jefe que, en la mayoría de los casos, era también guerrero, legislador y hacía aplicar la justicia. Una organización conformada de este modo permitió que las ciudades, "pólis", tuvieran formas de gobierno descentralizadas, y también impidió que se conformara un estado personalista y teocrático. Con el paso del tiempo, se conformaron repúblicas de tipo aristocrático en esas ciudades estado, donde el poder lo detentaba, ciertamente, la aristocracia en su propio beneficio, pero no eran comparables al tipo de dominación ejercida en los primeros estados teocráticos. El dinamismo de estas pólis se acentuó más aún cuando los comerciantes (enriquecidos gracias a sus intercambios de bienes en el mediterráneo) comenzaron a ganar espacios en la vida política, desplazando lentamente a la vieja aristocracia, que sostenía su riqueza gracias a la tenencia y propiedad de la tierra. Esa sociedad dio lugar a una nueva mentalidad de hombres libres, que, entre tentativas de reformas, regímenes tiránicos y revueltas sociales sería la base para las tentativas de reformas democráticas. Ese nuevo tipo de sociedad, caracterizado por el dinamismo de varias formas de gobierno y participación de sus ciudadanos, contribuyó al surgimiento de modos de pensamiento más libres y de autonomía personal, e intelectual. Las prerrogativas de participación estaban limitadas a la minoría de ciudadanos libres, en una sociedad esclavista. Por ello, el libre pensamiento, estaba reservado a unos pocos, pero ese número era potencial y sustancialmente mayor al de las sociedades teocráticas.

"Desde el comienzo, el mundo griego se distingue de los grandes imperios orientales por ciertos rasgos, de los cuales tal vez, el más notable sea la organización en pequeñas ciudades independientes, con formas de gobierno muy variadas. Mientras los lacedemonios constituyen en Esparta un estado militar y aristocrático, donde los hombres hacen sus comidas en común, como en un campamento, las ciudades jonias evolucionan, de una y otra parte del mar Egeo, hacia regímenes democráticos, que suponen, con la institución de magistraturas provistas por sorteo, el establecimiento de una legislación sometida a la aprobación de asambleas populares. Mas surgen tiranías aquí y acullá, por ejemplo, en ciertas colonias de Sicilia, tales como Siracusa. Por otra parte, la existencia de la esclavitud,

hace de todos estos estados, en ciertos aspectos, aristocracias" (SCHUHL, P. 1956:29).

CAPÍTULO VI

CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO FILOSÓFICO GRIEGO PRE-SOCRÁTICO

El nacimiento del pensamiento filosófico griego recibió su principal impronta del interés por la indagación de la naturaleza.

Es necesario subrayar, que "a lo largo del milenario desarrollo del pensamiento filosófico y científico el concepto de naturaleza ha asumido significados diferentes entre sí" (GEYMONAT, L. 1980:135).

Los filósofos griegos utilizaban el concepto de "fisis" para referirse a la naturaleza, concebida como una realidad fija, inmutable, estable. Esta "fisis" era material, y conformaba el denso substrato de la realidad. Contrapuesta a esta densidad material, existen las cosas singulares, sujetas a cambios: nacimiento y muerte, inestabilidad, mutabilidad, etc. Ellas, no son "la realidad", ya que en su calidad de cosas, son sus manifestaciones materiales.

Sin embargo, esa contraposición no se concibe como dilema, ya que el cosmos de los griegos era armónico y reflejo de un orden, que se manifestaba tanto en su dimensión estática como dinámica.

Ciertamente, para la indagación de la "fisis" los griegos se sirvieron de la ciencia y, para la indagación de las cosas, de la opinión, admitiendo de este modo dos vías al mismo tiempo válidas y alternativas para abordar la realidad.

Es preciso recordar que para algunos investigadores, el nacimiento del pensamiento filosófico y científico griego se dio al unísono, y no admiten la afirmación de que la filosofía es la "madre de las ciencias". Dice al respecto el filósofo español Gustavo Bueno: "La filosofía académica –es decir, la filosofía de tradición platónica- no antecede a las ciencias ya en marcha: nadie entre aquí sin saber geometría. (BUENO, G. 1995:112) fue uno de los lemas de la escuela platónica".

Uno de los principales motivos de indagación de los filósofos griegos, fue el de descubrir la "arché" o sea el principio constitutivo de la realidad. La pregunta por esta "arché" incluye además el querer descubrir de qué elementos se conforma, y también cómo se conformaron esos elementos.

Por ello, se ha considerado a los pensadores griegos pre-socráticos, como filósofos, cosmogonistas y físicos al mismo tiempo. Esto no debería parecernos extraño, si intentamos situarnos en sus coordenadas, es decir, si entendemos que concebían un universo armónico regulado por leyes de orden filosófico, cosmogónico y físico.

Esta indagación pudo sostenerse, por una de las principales características de la actitud filosófica de los griegos: la capacidad de asombro; ella está desde un primer momento, sosteniendo a la filosofía. "Por ello Platón y Aristóteles consideraban que el asombro era el origen de la filosofía" (GARCÍA ASTRADA, A. 1984:249). A esta capacidad de asombro, los filósofos pre-socráticos, la abordaron en forma comunitaria, en contraposición al pensamiento filosófico- religioso de las castas sacerdotales de oriente, donde los preceptos fueron celosamente custodiados.

Las respuestas que las escuelas pre-socráticas daban a la cuestión de la naturaleza, ante el asombro que ella les provocaba, se presentaban clásicamente de este modo:

<u>Escuela Jónica</u>: la "arché" era la materia viviente. Para Tales de Mileto era el agua; para Anaximandro, lo

indeterminado, denominado "to ápeiron"; para Anaxímes, el aire; para Heráclito, el fuego.

<u>Escuela Pitagórica</u>: las oposiciones, sustentadas en los números.

<u>Escuela Eleática</u>, y sobre todo para Parménides, el ser, que es.

<u>Escuela Ecléctica</u>: para Empédocles, los cuatro elementos (tierra, agua, aire y fuego), en una pluralidad limitada; para Anaxágoras y los Atomistas, esa pluralidad era infinita.

Este orden se realiza teniendo en cuenta el interés que tenían estos filósofos por la cuestión de la "físis" y no necesariamente siguiendo un ordenamiento cronológico, ya que por ejemplo Anaxágoras y Demócrito eran contemporáneos de los filósofos sofistas y de Sócrates.

Los filósofos pre- socráticos, al ensayar una mirada de conjunto de la realidad en su dimensión física y metafísica, indagaron tanto en el mundo material como en el mundo de las esencias (inmateriales). Esta perspectiva está construida desde la doctrina según la cual la materia está animada (hilozoísmo) y todo es Dios (panteísmo).

Durante el siglo y medio en el que se desplegaron estas escuelas, el pensamiento filosófico griego pre-socrático aventajó al pensamiento oriental (que continuó apegado sustancialmente a los mitos y a las alegorías). Ciertamente, los griegos no abandonaron definitivamente las teogonías, pero abrieron, creativamente, una vía nueva, que dio lugar a la emergencia de un pensamiento mucho más racionalista.

Afirmaba al respecto el pensador ítalo-hebreo, exiliado en Argentina, Rodolfo Mondolfo: "Ciertamente que el principio universal de las cosas es buscado por los naturalistas en una realidad natural, que, por otra parte, no es solamente sustancia o materia, como quiere hacer aparecer Aristóteles, para los primeros cosmólogos, sino que es sustancia y fuerza conjuntamente: es la naturaleza (physis) originaria, que es también lo divino (theion), como ya en las teogonías. Es el principio universal del cual derivan todas las cosas, del cual constan, al cual retornan, permaneciendo siempre ese principio, permanente e inmutable a través del aparecer, cambiar y desaparecer de todas las cosas singulares. Esta concepción representa la tentativa racional de unificar y explicar la infinita multiplicidad y variabilidad de las cosas testimoniadas por la experiencia, por medio de la unidad y permanencia de un ser que las reúna a todas en él, como fuente y causa de su devenir, y que justamente es buscado entre los seres de la naturaleza fluyente y dinámica, pues debe explicar el flujo universal" (MONDOLFO, R. 1989:9,10).

El lugar de los griegos, en la historia del pensamiento occidental, es fundante e ineludible. Ciertamente, el impacto del pensamiento griego en la posterior historia de occidente no puede concebirse como lineal, ininterrumpido y directo, pero debe subrayarse que tanto la filosofía como las ciencias occidentales "están ligadas al pensamiento y a la obra de los griegos más que al pensamiento y a la obra de cualquier otra civilización" (GEYMONAT, L. 1998:17).

CAPÍTULO VII

PERÍODOS DE LA HISTORIA DE LA FILOSOFÍA GRIEGA

La cuestión de la periodización de la filosofía griega es bastante problemática, ya que muchas veces varias escuelas filosóficas debatían en torno a una misma temática, desde diversas perspectivas. Sin embargo, teniendo en cuenta que algunas temáticas eran abordadas con mayor profundidad, se identifican, tradicionalmente, cinco períodos en su creativa producción intelectual:

- Período cosmológico: comprende todas las escuelas pre-socráticas. La temática fundamental era la indagación sobre la "arjé" de la "físis" -como ya hemos visto, el origen de la naturaleza. Al mismo tiempo, realzaron la posibilidad del conocer, desde el "lógos", o sea desde la inteligencia y la racionalidad.

- Período antropológico: comprende la escuela de los filósofos sofistas y del filósofo Sócrates. La indagación fundamental se realizó en torno al lenguaje y al hombre.

- Período ontológico: comprende a los filósofos Platón y Aristóteles. Estos autores crearon sólidos sistemas filosóficos, retomando y profundizando las temáticas de los períodos anteriores (cosmológico y antropológico). La temática del ser en cuanto ser, de la realidad y de las relaciones de los hombres con esa realidad demuestra la madurez de que fue capaz el pensamiento griego, sistematizado en una admirable totalidad.

- Período ético: se trata de las escuelas posteriores a Aristóteles, que se dedicaron a profundizar la problemática de la conducta y el comportamiento de los hombres. Fueron las escuelas estoicas, epicúreas, escépticas y eclécticas, que impactaron en la sociedad griega y, posteriormente, en la romana.

- Período religioso: fueron las escuelas neoplatónicas y las afines a ellas, como la escuela del místico Plotino. La búsqueda y el encuentro de Dios fueron, para estas escuelas, uno de sus principales problemas. Eran contemporáneas al surgimiento del cristianismo.

Esta periodización no puede concebirse como una rígida y estática división, ya que las numerosas y profundas problemáticas abordadas por los griegos se fueron entrelazando en los complejos procesos históricos que se desarrollaron en el mundo mediterráneo antiguo. Sin embargo, pretende indicar algunas tendencias, para facilitar una visión de conjunto y, posteriormente, identificar con mayor detenimiento cada una de estas numerosas y pródigas escuelas de pensamiento filosófico, científico y religioso.

Muchas de las problemáticas que se abordaron en un período tan dilatado fueron retomadas y reformuladas en diferentes períodos posteriores del pensamiento europeo, tanto en el Medioevo como en el Renacimiento, en la Modernidad, como en la Post- modernidad.

En esta perspectiva, el pensamiento griego es una fuente imprescindible para indagar en algunas de las principales claves de Europa occidental y su cultura.

PERÍODOS DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA GRIEGA

El investigador Jean-Paul Collete nos presenta una periodización que delimita tres grandes períodos: el nacimiento de la matemáticas griegas (desde los orígenes hasta Platón); de Platón a Euclides, y finalmente, de

Arquímides hasta los maestros de la escuela de Alejandría. (COLLETE, J.P. 2002).

El historiador de la ciencia argentino José Babini, algunas décadas antes, había periodizado la matemática del siguiente modo:

- Un período helénico, que llega hasta la muerte a Alejandro el grande y de Aristóteles, y cuya culminación es el siglo de Pericles. En ese período, sacudido por las guerras médicas y las guerras del Peloponeso, la matemática se desarrolla en conexión con las escuelas filosóficas, de las que toma algunos de sus fundamentos: permanentes unos, transitorios otros.

- Un período helenístico, que llega hasta principios de la era cristiana y en el que la matemática cobra autonomía y logra sus mejores realizaciones: en un mundo en el cual la cultura griega se cristaliza en centros como Alejandría, Pérgamo, Rodas, y la dominación romana inicia su expansión, nacen las más grandes creaciones de la matemática griega por obra de Euclides, Arquímides y Apolonio.

- Un período greco-romano y de la decadencia que comprende los primeros siglos de la era cristiana y en los que la matemática no encuentra sino epígonos y comentaristas. Con el fin de este período encuentra también su fin el mundo clásico y, de acuerdo a los cánones de la historiografía, se inicia la Alta edad media" (BABINI, J. 1953:16,17).

Estas perspectivas de periodización, evidencian diferentes formas de encuadrar los acontecimientos, que son decisiones tomadas por los historiadores y no emergen espontáneamente de la historia. Son presentaciones didácticas. Hay que estar prevenidos, en no caer en la tentación de una concepción lineal y continuista de la historia de las ciencias y de la matemática en particular.

En este punto son más que oportunas estas reflexiones, del doctor en historia de la física cuántica, Helge Kragh: "El marco estructural del historiador incluye, entre otras cosas, la división en períodos históricos. Evidentemente, la periodización es obra de los historiadores, no de la historia. En el curso histórico de los acontecimientos no puede hallarse insita ninguna manera objetiva o natural de dividir. Ello no significa, a pesar de todo, que todas las formas de organizar los materiales históricos sean igualmente buenas. (...) Los períodos utilizados serán normalmente cronológicos, de modo que se sigue simplemente el desarrollo a lo largo de un tiempo lineal. Pero no hay que considerar que acontecimientos cronológicamente simultáneos, sean también históricamente simultáneos. (...) El tiempo cronológico lineal, constituye, al fin y al cabo, el marco natural de referencia de la periodización histórica. La conexión causal de los acontecimientos va del pasado al presente, es decir, sigue siendo un tiempo lineal" (KRAGH, H. 2007:105, 107).

Es oportuno señalar, que la historia de la matemática griega, abarca mil años aproximadamente: desde el 600 a. C. hasta el 400 d. C. y que es en este espesor temporal, donde deben situarse las principales formulaciones de problemas, soluciones e irresoluciones que aportaron.

Sea cual fuere, la forma de organización o periodización del material que suministra la historia de la matemática griega, no deja de sorprender la riqueza y creatividad de este campo, que los griegos, cultivaron de modo cada vez más específico, creativo, minucioso y serio.

CAPÍTULO VIII

CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO CIENTÍFICO Y DE LA MATEMÁTICA GRIEGA

La originalidad del pensamiento científico griego, aun cuando haya asimilado numerosos elementos cognoscitivos de las civilizaciones egipcias y de oriente medio, podría señalarse con las siguientes características:

- Depuración y separación del léxico mítico-religioso, y progresiva construcción de un corpus y un vocabulario cada vez más abstracto.

- Tendencia al cultivo del pensamiento abstracto como pensamiento en sí, o sea, no determinado absolutamente sino relativamente por sus aplicaciones, tanto teóricas como prácticas.

- Interés, cada vez más acentuado, por la teorización, generalización y argumentación.

- Deseo de conocimiento de las causas de las cosas y de los hechos, para abordar la realidad.

- Creación de reglas cada vez más abstractas, tanto para el pensamiento filosófico como para el científico; intento de sistematización de proposiciones que se deduzcan de sólidos principios.

- Creación de ciencias nuevas, para estudiar delimitando y especificando diferentes niveles de realidad.

- Fundamentación en la racionalidad, aun cuando esa racionalidad, en algunos casos, contradijera algunas experiencias del sentido común y de la vida cotidiana.

Estos tópicos, ciertamente, no llegaron a impactar, en forma directa ni lineal, en las innovaciones científicas y técnicas que comenzaron a emerger en Europa moderna en el lapso entre el Renacimiento y la revolución científica de los siglos XVII y XVIII. Ello no implica subestimar la originalidad del pensamiento científico griego, que, como hemos señalado, se separa visiblemente de las concepciones egipcias y medio orientales, pues eran pragmáticas, no indagaban en sus causas y continuaban ligadas a lo mítico (astrológico).

En esta perspectiva, podrían inscribirse los principales caracteres de la matemática griega, que presenta José Babini: "**La primera nota matemática que aporta el espíritu griego es la demostración**: las propiedades matemáticas dejan de ser hechos para convertirse en conocimientos. Esa demostración, con que los griegos otorgan a la matemática su sello característico y permanente, arranca de las críticas eléatas, se elabora en el seno de las discusiones de los sofistas y encuentra su elemento constructivo en el Órganon aristotélico.

La segunda nota matemática permanente que aportan los griegos es la abstracción. Pero la abstracción de la matemática griega tiene caracteres específicos, rasgos propios conferidos por el pitagorismo que la vio nacer. Este tipo especial de abstracción de la matemática griega, semejante a la de las ciencias naturales actuales, es el que le confiere sus notas características. Hace de ella una matemática táctil, apegada a los cuerpos naturales, una matemática de figuras, como se comprueba con su concepción corporal y geométrica de los números.

Este carácter táctil de la matemática griega explica también su predilección por lo finito y su preocupación por eliminar, o por lo menos, reprimir el infinito en sus demostraciones.

Esa abstracción de la matemática griega, abstracción que inicia sus primeros balbuceos, es la que explica también que la matemática no haya logrado grandes generalizaciones entre los griegos. Es una matemática que va a la caza, no de teorías generales, sino de problemas singulares, aunque a veces las nociones previas que la solución de esos problemas exige son tantas y tan complejas, que de por sí, pueden considerarse como constituyendo un sistema, tal como ocurre con los Elementos.

Esta predilección por el problema y la correlativa despreocupación por una teoría general, les impidió ver el proceso y la continuidad en su totalidad, y por lo tanto les ocultó la importante noción de variabilidad, mostrándose así otra característica de la matemática griega: su estatismo, su carácter más estático que dinámico, más cinemático que cinético. Este carácter estático de la matemática griega se debe en gran parte a la influencia del platonismo que, por lo demás, se ha ejercido también en otros aspectos de esta ciencia. Así al acentuar el carácter ideal de los objetos matemáticos, ha conferido a éstos una de sus notas permanentes; pero al mismo tiempo, en conexión con su teoría de las ideas, ha arrojado esos objetos en un trasmundo, lejos de todo contacto y vinculación con este mundo sublunar de los hombres y de las cosas.

De ahí el destierro a que se condenara a la aritmética práctica (la logística de los griegos); de ahí, su inaplicabilidad a la ciencia natural, con las escasas excepciones que muestran las consideraciones geométricas de la astronomía, óptica y estática griegas que, bien examinadas, más que ramas de la ciencia natural, deben entenderse como ramas de la misma matemática griega, pues poseen todos los caracteres que hemos descubierto en la matemática" (BABINI, J. 1953: 42,43).

Si una de las motivaciones que impulsó al pensamiento filosófico fue la del asombro, a la del pensamiento científico se sumó otra de capital importancia, invocada en esta lúcida reflexión: "La simple comprobación de un hecho que causa asombro, inesperado por salir de lo común, no es de por sí suficiente para iniciar un proceso de investigación científica. Si el hombre se limita a contemplar con estupor, a expresar con palabras más o menos vivas la conmoción de su ánimo, no da el menor paso hacia la ciencia. A lo sumo podrá hacer poesía bella o fea (tanto da, pero nada más que poesía).

Para hacer ciencia es necesario no permanecer inmóviles ante el motivo del asombro; hay que pasar del estado puro de contemplación al de la acción. El acta de bautismo de la ciencia se vincula con tal acción, es decir, con la producción de los medios para sondear lo asombroso, analizándolo en sus elementos, componiéndolo con otros hechos, reproduciéndolo en circunstancias semejantes o distintas. La más moderna filosofía de la ciencia da a estos medios el nombre de técnicas, independientemente de que se obre con instrumentos empíricos o con instrumentos conceptuales" (GEYMONAT, L. 1994:9).

En esta perspectiva, se evidencia que uno de los principales aportes de la matemática griega fue el de dilucidar y poner al descubierto qué tipo de problemas estaba a su alcance solucionar, y qué problemas, no.

La confianza en la racionalidad, la valentía de la superación del estado de asombro y el paso al de la acción convirtieron a la matemática griega, más allá de sus resultados, en uno de los mejores frutos del pensamiento griego.

BIBLIOGRAFÍA

ALLENDE LEZAMA, L. 1947. Los elementos. Epistemología y Metodología de las ciencias. Ed. El Ateneo. Bs. As. Argentina

ANDERSON, P. 1979. Transiciones de la antigüedad al feudalismo. Editorial Siglo XXI. Madrid. España.

ARISTÓTELES. 1964. Obras. Metafísica. Física. Ed. Aguilar. (Samaranch, F. de P. Estudio preliminar y traducción) Madrid. España.

ARRIGONI, G. 1985. Le donne in Grecia. Ed. La Terza. Bari. Italia.

BABINI, J. 1953. Historia sucinta de la matemática. Espasa-Calpe, S. A. Buenos Aires. Argentina.

BABINI, J. 1986. Historia de la ciencia en la Argentina. Ediciones Solar. Buenos Aires. Argentina.

BARRAOU, J. D. 1997. ¿Por qué el mundo es matemático? Editorial Grijalbo Mondadori. Barcelona. España.

BELL, E. T. 2003. Historia de las matemáticas. Fondo De Cultura Económica. México. D. F. México.

BERLINSKY, D. 2006. Ascenso infinito. Breve historia de las matemáticas. Ed. Debate. Buenos Aires. Argentina.

BERNAL, J. D. 1979. Historia social de la ciencia. Vol. 1. Editorial Península. Barcelona. España.

BLOCH, M. 1974. Introducción a la historia. Fondo de Cultura Económica. México. D. F. México.

BONNARD, A. 1970. Civilización Griega. Ed. Sudamericana. Buenos Aires. Argentina.

BUENO, G. 1995. ¿Qué es la ciencia? La respuesta de la teoría del cierre categorial. Ciencia y Filosofía. Pentalfa Ediciones. Oviedo. España.

BURCKHARDT, J. 1947. Historia de la cultura griega. Obras Maestras. Barcelona. España.

BURNET, J. 1994. La aurora del pensamiento griego. Editorial Argos. México.

CASERTANO, G. 1977. La nascita della filosofia, vista dai greci. Ed. Il Tripode. Napoli. Italia.

CAVARERO,A. 1990. Nonostante Platone. Figure femminili nella filosofía antica. Ed. Riuniti. Roma. Italia.

CENTRONE, B. 1999. Introduzione a i pitagorici. Ed. Laterza. Roma-Bari. Italia.

COLLETE, J.P. 2002. Historia de las matemáticas I y II. Ed. Siglo XXI. México. D.F. México.

DIELS, H. ; KRANZ, W. 1952. Die Fragmente der Vorsokratiker, griechisch und Deutsche. Sexta Edición. (Se utiliza la clásica nomenclatura DK. Para referenciar el estudio de estos filólogos alemanes). 6ta. edición Berlín. Alemania.

DIÓGENES DE LAERTES. 1947. Los grandes filósofos. (De Cadiz, L. M. Estudio preliminar y traducción) Editorial Claridad. Buenos Aires. Argentina.

EGGERS LANG, C.; JULIÁ, V. 2000. Los filósofos presocráticos. (Introducciones, traducciones y notas por Eggers Lang, C. y Juliá, V.) Editorial Gredos. Madrid. España.

FARRINGTON, B. 1957.Ciencia griega. Editorial hachette. Buenos Aires. Argentina.

FINLEY, M. I. 1984. La Grecia antigua: economía y sociedad. Editorial Crítica. Barcelona. España.

FONTANA, J. 1982. Historia. Análisis del pasado y proyecto social. Editorial Crítica. Barcelona. España.

FREUD, S. 2003. Il nostro cuore volge al sud. Ed. Bompiani. Milano. Italia.

GARCÍA ASTRADA, A. 1984. Introducción a la filosofía. Multi Editora. Córdoba. Argentina.

GEYMONAT, L. 1977. Scienza e realismo. Giangiacomo Feltrinelli Editore. Milano. Italia.

GEYMONAT, L. 1994. EL pensamiento científico. EUDEBA. Buenos Aires. Argentina.

GEYMONAT, L. 1998. Historia de la filosofía y de la ciencia. Ed. Crítica. Barcelona. España.

GOETHE, J. W. 2001. Viaje a Italia. Biblioteca Grandes Viajeros. Barcelona. España.

JAEGER, W. 1983. Paideia. Fondo De Cultura Económica. México. D. F. México.

KRAGH, H. 2007. Introducción a la historia de la ciencia. Ed. Crítica. Barcelona. España.

MASINI, G. 1980. Il romanzo dei numeri. Nardini Editore. Centro Internazionale del libro, S.p.A. Firenze. Italia.

MEUNIER, M. 1932. Femmes pytagoricenns fragments de lettres de Theano. Ed. Seuil. París. Francia.

MIELI, A. 1915. La scienza greca. Libreria Della Voce. Firenze. Italia.

MIELI, A. 1952. Panorama General De Historia De La Ciencia. Tomo 1. El Mundo Antiguo. Griegos Y Romanos. Espasa Calpe Argentina S. A. Buenos Aires. Argentina.

MINAZZI, F. 2004. Insignare a filosofare. Barbieri Editore. Manduria. Ta. Italia.

MONDOLFO, R. 1956. Alle origini della filosofia della cultura. Ed. Il Mulino. Bologna. Italia.

MONDOLFO, R. 1989. Breve historia del pensamiento antiguo. Ed. Losada, S. A. Buenos Aires. Argentina.

MONTANELLI, I. 1998. Historia de los griegos. Plaza Janés. Barcelona. España.

PLATÓN. 1982. República. EUDEBA. (Farré L. Estudio preliminar) Buenos Aires. Argentina.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. 2000. Historia de la matemática. Gedisa editoral. Barcelona. España.

SCHUHL, P. 1956. La obra de Platón. Librería Hachete. S. A., Buenos Aires. Argentina.

SPENGLER, O. 1993. La decadencia de occidente. Ed. Planeta Agostini. Buenos Aires. Argentina.

TIMPANARO CARDINI, M. 1969-1973. Introduzione ai Pitagorici. Testimonianze e frammenti. La Nuova Italia. Firenze. Italia.

TOGNAZZI, G. 2006. Le donne di Pitagoras: una questione di numeri e armonía. Centro A. M. A., Siena. Italia.

VERNANT, J. P. 1965. Los orígenes del pensamiento griego. EUDEBA. Buenos Aires. Argentina.

ZELLER, M.; MONDOLFO, R. 1967-1974. La filosofia dei greci nel suo svilupo storico. Ed. La Nuova Italia. Firenze. Italia.

GARIN, E. 1963. Giovanni Pico della Mirándola. Ed.: Le Monnier. Firenze. Italia.

GARIN, E. 1983. Il ritorno dei filosofi antichi. Ed.: Bibliopolis. Napoli. Italia.

NIETZCHE, F. 2000. El nacimiento de la tragedia. Ed.: Alianza. Madrid. España.

CAPITULO IX

PITÁGORAS EN LA ESCUELA DE HOY

"Habitualmente se destaca la importancia de la matemática para la vida diaria y para obtener beneficios económicos. Sin embargo, desde que hace 2500 años Pitágoras planteó su teorema, la humanidad ha estudiado matemática sin buscar más justificativo que la alegría de comprender las verdades profundas que se esconden en el mundo abstracto de los números.... La admiración por la belleza es un rasgo común de los matemáticos, que unas veces la encuentran en la simpleza de una prueba, otras en la compleja sofisticación del edificio conceptual.... Con la matemática se aprende una manera de ver las cosas, de analizarlas, los números son lo de menos. El asunto es entender. Aprender a manipular esos conceptos abstractos nos permite entrever la abismal dimensión de nuestro propio misterio al advertir que cada uno de nosotros encierra dentro de sí, posibilidades infinitas de crear originales universos eternos". (ETCHEVERRY J. G.; 2000)[1]

La historia de la Matemática, en nuestro trabajo, es considerada como una herramienta metodológica que favorece la contextualización temporal, geográfica y social de los conceptos básicos de la misma. Asimismo, ésta constituye un elemento motivador y de interés para el estudiante, que le permite valorar el surgimiento de esta ciencia exacta como producto de las necesidades del hombre y la aplicación que se le ha dado desde la antigüedad.

[1]ETCHEVERRY J. G (Ex rector de la Universidad de Buenos Aires) en una nota publicada, en mayo de 2000, en la revista de *La Nación*, en ocasión del Año Internacional de la Matemática.

Durante el desarrollo del Seminario "Una aproximación a la historia de las ciencias. Estudiando a Pitágoras", se realizaron algunas entrevistas informales a docentes del tercer ciclo, a directores y a supervisores de escuela primaria en las ciudades de Neuquén capital y Cipolletti (Río Negro). Según este relevamiento se observó que, lamentablemente, la utilización de la historia de la Matemática en el desarrollo de los contenidos de la educación primaria es, en estos casos, nula o escasamente anecdótica.

Por ello, es de nuestro interés ofrecer, en este trabajo, ideas para generar espacios donde el/la docente encuentre estrategias para que los/las estudiantes se comprometan en un proceso de producción matemática, en el que la actividad que lleven a cabo tenga el mismo sentido que el de los pensadores matemáticos, forjadores de nuevos conceptos.

La matemática provee una manera particular de pensar y producir conocimiento. Es un sistema teórico que permite conocer la realidad de una cierta manera y esto promueve y contiene un valor formativo porque enseña a razonar, "no es el único lugar, pero sí uno privilegiado, para ejercitar la confrontación de ideas y la gestión de la verdad, donde se puede aprender a no dejarse convencer por la seducción o el carisma del otro, sino por la validez de sus argumentos..." (BROUSSEAU, G; 1986).

En la segunda parte de este libro, de índole práctica, haremos hincapié en el trabajo áulico. Desarrollaremos distintas propuestas de trabajo que podrán implementarse al momento de enseñar los saberes provenientes de la escuela pitagórica, que hoy continúan siendo fundamentales en la formación de los niños y niñas de nuestra sociedad. Lo hacemos desde el punto de vista de que, como señala Sadovsky –parafraseando a Freudenthal–,

"la matemática es una actividad humana a la que todos pueden acceder, y es la actividad misma, y no sólo sus resultados aunque estos obviamente se incluyen-, la que se constituye en un objeto de enseñanza con alto valor formativo para niños y jóvenes" (SADOVSKY; P. 2005: 11).

La idea de trabajar sobre los saberes que se atribuyen a la escuela pitagórica, posee dos aspectos interesantes:

1) Poder abordar la enseñanza de importantes conceptos con el apoyo de la visualización y la utilización de un lenguaje natural y formalizar estos conocimientos desde la claridad y sencillez que propone esta escuela para el tratamiento de contenidos fundamentales de la currícula matemática. Este enfoque constituye una fuente importantísima que moviliza al alumno, provocando un trabajo de reinvención matemática, en el que son progresivo.

2) Permitir comprender la importancia de cómo surgen los saberes matemáticos ligados a la historia de la humanidad.

La demostración juega un papel fundamental en el desarrollo de los saberes matemáticos. Algunos docentes opinan que es tema prioritario de la enseñanza en los niveles más elevados del sistema educativo, otros consideran lo contrario, que se debe iniciar en la escolaridad primaria. Esta estrategia ha ido cambiando su concepción a lo largo de la historia de la educación matemática.

Pero ¿qué es demostrar? y ¿qué tipos de procedimientos avalan la demostración?

Según la Real Academia Española, el término demostración admite entre sus acepciones, la de "comprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o de una teoría" y también la de "prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes"(www.rae.es, consulta 07/09/09).

¿Cómo enseñar a demostrar? ¿Cómo o de quién aprendió Pitágoras a demostrar?

Hoy en día, son muchos los epistemólogos y didactas que se dedicaron a estudiar cómo trabajar la demostración en el aula. En este trabajo, seguimos las ideas de Balacheff (2000), quien clasifica las demostraciones en dos categorías: pragmáticas o experimentales y conceptuales o deductivas, y cada una de estas, a su vez, en subclases.

Dentro de las demostraciones pragmáticas o experimentales se distingue:

- **Empirismo naïf**: el proceso consiste en la verificación de la propiedad para unos pocos ejemplos elegidos sin ningún criterio. Se caracterizan por la ausencia de validación. Es el tipo más elemental de demostración.

- **Experimento crucial**: consiste en los procedimientos de los estudiantes se basan en la elección minuciosa de un ejemplo, tan poco particular como le es posible, convencidos de que si se cumple allí, se cumplirá siempre.

- **Ejemplo genérico**: es el caso de procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que actúa como representante de su clase. Los estudiantes empiezan a usar propiedades abstractas en sus demostraciones, aunque referidas al caso particular. Para ejemplificar: si suprimimos el dibujo usado, la demostración que queda pierde información o carece de significado.

Entre las demostraciones conceptuales o deductivas, aparecen los siguientes tipos:

- **Experimento mental**: la explicación se centra en la acción interiorizada, separándola de su ejecución sobre un representante particular. Es una demostración deductiva abstracta organizada a partir de la manipulación de ejemplos concretos. Es posible suprimir los dibujos realizados que acompañan a la demostración, sin que esta pierda significado. Este tipo de demostración aparece como medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación.

- **Cálculo sobre enunciados**: Consiste en construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales en base a reglas lógicas rigurosas.

Lo anterior nos habla sobre la existencia de un proceso de aprendizaje de la demostración, esta importante herramienta matemática, requiere de una enseñanza progresiva y debe surgir de la necesidad de los alumnos de justificar un pensamiento o un modo de defender un conocimiento de manera incuestionable y no reducirla a una tarea de simple imitación repetitiva. Como claramente lo expresara el Dr. Luis Santaló, ..."si un alumno sabe repetir una demostración, pero no sabe repetirla si se cambian las letras o la posición del polígono, significa que ha aprendido la demostración de memoria y esto sí no tiene ningún valor. Mejor dicho: tiene un valor altamente negativo, pues significa que el alumno, no solamente ignora tal demostración, sino que desconoce totalmente lo que es la Matemática y que ha desperdiciado el uso de la memoria con un objetivo inútil y nada educativo... " (SANTALÓ; 1962).

La geometría, como una parte de la matemática, ayuda a estimular y a ejercitar habilidades de pensamiento, como así también estrategias de resolución de problemas.

También brinda oportunidades para observar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y razonar visualmente como preparación a la tarea de deducción formal.

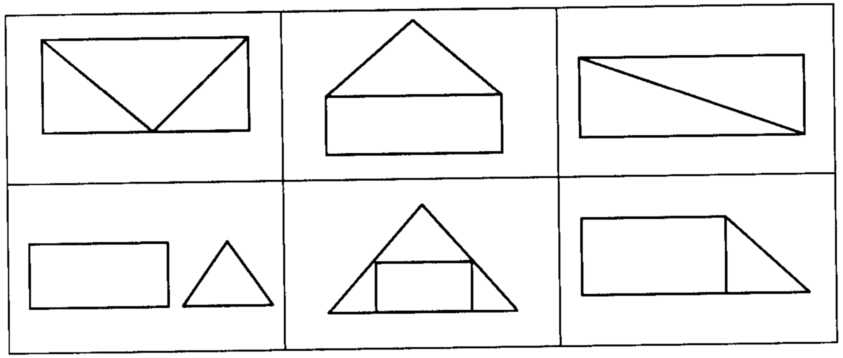
"Además de símbolos, los matemáticos usan diagramas, lo que abre varios tipos de razonamiento visual. Las imágenes son menos formales que los símbolos, y por esta razón su uso ha sido mal visto a veces. Hay una sensación ampliamente extendida de que una imagen es de algún modo menos rigurosa, lógicamente hablando, que un cálculo simbólico. Es cierto que las imágenes dejan más lugar para diferencias de interpretación que los símbolos. Además las imágenes pueden contener hipótesis ocultas: no podemos dibujar un triángulo "general"; cualquier triángulo que dibujemos tendrá un tamaño y una forma particulares que quizá no sean representativos de un triángulo arbitrario. Sin embargo, la intuición visual es una característica tan poderosa del cerebro humano que las imágenes desempeñan un papel destacado en matemáticas." (STEWART, I.; 2008:25).

A continuación, plantearemos cinco consideraciones previas que surgen de nuestra experiencia y que, pensamos, pueden ser valiosas para que el docente tenga en cuenta antes de la enseñanza del teorema de Pitágoras:

• Es cierto que "las imágenes dejan más lugar para diferencias de interpretación" que los símbolos. Por ello cuando empezamos a hablar de un tema debemos asegurarnos que todos entendemos lo mismo acerca del concepto al cual hacemos referencia. En particular, en nuestro caso, con respecto al *triángulo rectángulo*.

¿Qué entiende el/la alumno/a cuando decimos "triángulo rectángulo"?, ¿Lo ve como una única figura?

En este caso nos remitimos a una experiencia personal, que se desarrolló con alumnos de primer año de una escuela secundaria de Neuquén Capital, al realizar un diagnóstico. En él se pedía que: dibujaran un "triángulo rectángulo". Como respuesta a esta solicitud, se encontró en las respuestas de los alumnos varias combinaciones de cuadriláteros rectángulos con triángulos. A continuación reproducimos alguna de ellas:



En este escrito no nos vamos a detener a analizar el por qué de la variedad de respuestas, pero sí nos proponemos sugerir que al tratar la clasificación de triángulos, analizar los términos involucrados, claro que cada uno se refiere a la propiedad que cumple la figura y no con la unión de figuras, como pensaron estos alumnos.

• En el trayecto escolar de un estudiante, frecuentemente el docente desarrolla los temas usando una única forma de representación de acuerdo a la rama de la matemática que está trabajando, o al énfasis que cada docente ponga, según su interés, en lo algebraico, lo numérico, lo geométrico, lo gráfico y lo oral. Cierto es que no se suelen ver los temas desde distintas perspectivas y esto repercute desfavorablemente en la cognición de los estudiantes, además de desarticular sus saberes matemáticos.

La enseñanza del teorema de Pitágoras aporta al juego entre marcos, motivando el pasaje del marco geométrico a conceptos aritméticos, métricos y algebraicos, como lo señalan Duval (1999), Douady (1995), Brousseau (1986) y otros muchos autores. Ellos sostienen que la diversificación de las representaciones de un mismo concepto u objeto matemático aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, sus representaciones mentales. Por ello, se debe tratar cada tema en su mayor variedad posible de escrituras (geométrica, algebraica, aritmética, entre otras), lo que permitirá que cada individuo comunique lo que piensa o sabe sobre conceptos matemáticos. **Pero no basta tener varias representaciones de un mismo objeto de estudio, sino que es necesario desarrollar la habilidad de pasar de una escritura a otra cuando así se lo requiera, para poder considerar que el saber está aprendido.**

- Si se debe tratar cada tema en su mayor variedad posible de escrituras, ante la enseñanza de los nombres que reciben los lados del triángulo rectángulo, nos surge una pregunta: ¿Siempre hay un cateto mayor y uno menor?

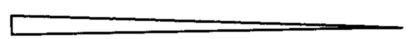
Muchas veces, por hacer alusión a la escuadra que disponemos en el aula, que suele ser un triángulo escaleno, describimos a los catetos del triángulo rectángulo, como "cateto mayor" y "cateto menor". De esta manera, hacemos referencia únicamente a los triángulos rectángulos escalenos, descartando la posibilidad que los catetos sean congruentes y, en consecuencia, alejamos al alumno de la posibilidad de que los triángulos sean rectángulos isósceles.

Es necesario darnos el tiempo para examinar representaciones variadas, para que los/as alumnos/as no se queden fijados a una, refiriéndonos al triángulo utilizando sus dos clasificaciones (según sus lados y según sus ángulos). De este modo, no se trata de triángulos rectángulos por un lado y de triángulos escalenos u isósceles por el otro, como si se tratara de diferentes figuras: los triángulos rectángulos pueden ser tanto escalenos como isósceles.

- Debemos ser prudentes y controlar nuestra ansiedad de ver a nuestros alumnos trabajar con la rigurosidad y el formalismo propio de esta disciplina. Para ello debemos ofrecer oportunidades de que actúen como si fueran el mismo Pitágoras, e ir avanzando en las justificaciones de tipo visual y verbal. "El maestro que respeta al alumno está dispuesto a escucharlos. Escuchar es una actividad que insume tiempo, pero es una de las formas de que un maestro pueda llegar a los proceso del pensar" (RATHS, L.E.; 1997:347).

Se presenta otro interrogante: ¿Cuál es la hipotenusa?

Sabemos que la hipotenusa es el lado más largo del triángulo rectángulo, y que es el lado del triángulo rectángulo que se opone al ángulo recto, pero nuestros estudiantes ¿la identifican así? Para reflexionar, presentamos aquí una situación áulica real. Pedimos a los/las alumnos/as de diferentes niveles educativos (primario, secundario y terciario) graficar un triángulo rectángulo isósceles. Observamos, en algunos casos, un extremado esfuerzo por hacer congruentes un cateto y la hipotenusa, dando como respuesta la siguiente representación:



Los estudiantes justificaron la construcción únicamente desde la acción de medir, sin contemplar los errores que ella encierra ¿Cuál es la intervención docente ante esta respuesta? ¿Cómo guiamos el razonamiento de los/as alumno/as para que pueda construir a partir del error? Para probar la veracidad o no de esta gráfica, debemos apoyarnos en las propiedades que cumple o no. La verdad se demuestra mediante un argumento lógico para que los alumnos/as descubran, comprendan, asimilen y apliquen las ideas, conceptos, propiedades, relaciones, etc., que son motivo de su aprendizaje.

EL razonamiento deductivo se alcanza tras un largo trabajo de construcción cognitiva. El trabajo de Pierre y Dina Van Hiele (Bressan; 2000, 2006:76) distingue niveles en el proceso de desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos que pueden ser utilizados para la organización de secuencias de enseñanza. A continuación, sintetizamos cada nivel:

Nivel 0: De Reconocimiento. No hay demostración. La verdad de una afirmación se justifica por la observación de una figura.

Nivel 1: De Análisis. No hay demostración formal, aunque sí empírica. La verdad de una afirmación se verifica en uno o más ejemplos, realizando mediciones, transformaciones, recuentos, etc.

Nivel 2: De Clasificación. Demostración deductiva informal. La verdad de una afirmación se demuestra mediante un argumento deductivo informal, después de analizar ejemplos o realizar mediciones, transformaciones. No se distingue con claridad una implicación de su recíproca.

Nivel 3: De Deducción Formal. Demostración deductiva formal. La verdad de la proposición se

comprueba mediante la producción de demostraciones deductivas formales. Los estudiantes son capaces de aceptar diferentes formas de prueba y de comprender la estructura axiomática de la matemática: significado y uso de axiomas, definiciones, teoremas, etc.

Nivel 4: De Rigor. Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del inicial de la geometría euclídea, capacidad para compararlos y decidir sobre su equivalencia. (BRESSAN A., BOGISIC, B. Y CREGO, K., 2000:76)

EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN LA ESCUELA

"Este teorema con la multitud de demostraciones del mismo ilustra de forma sorprendente el hecho de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad". (LOOMIS, E.S.; 1968: 3).

Cuando trabajamos el Documento Curricular del Segundo año del Tercer Ciclo de la Escuela Neuquina, aparece como contenido: *"Teorema de Pitágoras".* Como sugerencia didáctica, expresamos: *"La exploración e interpretación de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo que establece el Teorema de Pitágoras, en distintos contextos (geométrico y numérico)"* (A.A.V.V.; 2007: 89. D.C.T.C. Neuquén)

El abordaje del teorema de Pitágoras se puede realizar con diferentes justificaciones; existen 367 pruebas registradas en el libro *The Pythagorean Proposition* (1927) - *La proposición Pitagórica-* de E. S. LOOMIS, profesor de matemáticas de la Universidad de Baldwin, Estados Unidos. "En ese libro, Loomis clasifica las demostraciones en cuatro grandes grupos: **algebraicas**, donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo; **geométricas**, en las que se realizan comparaciones de áreas; **dinámicas** a través de las propiedades de fuerza, masa; y las **cuaterniónicas**, mediante el uso de vectores" (www.es.wikipedia.org.)

En las aulas de la escuela de hoy ¿se trabaja alguna de estas demostraciones del teorema de Pitágoras?, ¿se contrastan?, ¿se ven sus ventajas y limitaciones o sólo se enuncia el teorema para utilizarlo para resolver problemas?

ALGUNOS EJEMPLOS ACCESIBLES DE DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Demostraciones pragmáticas o experimentales.

Siguiendo las ideas de Balacheff, proponemos algunas sugerencias de demostraciones pragmáticas que pueden ser propuestas en las aulas de la escuela primaria y/o secundaria.

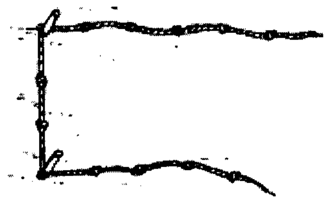
PROPUESTA 1: *Relacionando longitudes*

Trabajando con nudos en la soga

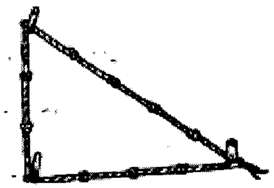
Antes de que Pitágoras demostrara la relación que enuncia el teorema que lleva su nombre, en Egipto se utilizaba la terna 3, 4 y 5 unidades de longitud. Con ella se obtenía el triángulo rectángulo más pequeño con medidas enteras, utilizado para obtener ángulos rectos que servían en la agrimensura y en las construcciones arquitectónicas, entre otras cosas. Era conocido como el Triángulo sagrado egipcio o Triángulo egipcio.

Esta propuesta trabaja sólo con longitudes.

Conseguir un trozo de soga o de piolín no extensible. A distancias iguales, atar nudos, hasta obtener 13. Tomar 3 estacas. Sobre una superficie lisa extender la soga, sujetando las estacas a los nudos, como muestra la figura (1). En la figura (2) el primero y el último nudo quedan superpuestos hasta formar un triángulo que, en este caso, será rectángulo.



(1)



(2)

ANALICEMOS: Esta actividad es práctica y accesible, pero no demuestra la relación pitagórica entre los lados de un triángulo rectángulo, sólo muestra que se puede construir un triángulo rectángulo con determinadas medidas. Se trata de un caso particular, por lo tanto no implica una generalización.

Para movilizar a los/as alumnos/as a mayores niveles de abstracción y generalización debemos incentivarlos a que se cuestionen y realicen preguntas. Podemos proponer las siguientes:

- ¿Qué cantidad de nudos se podrán hace en la soga, aparte de los mencionados, a intervalos constantes, para logra un triángulo rectángulo?

- Si 3, 4 y 5 son números consecutivos, las cantidades de nudos necesarios para obtener un triángulo rectángulo, ¿serán siempre otros números consecutivos?

Posibles resultados: serán los obtenidos a partir de multiplicar o dividir por 2 o por 3 y, en general, por "n" los números de la terna 3, 4 y 5 (en el caso de obtener números reales, no siempre se pueden representar con los nudos de la soga concreta).

- ¿Sólo multiplicando por "n" a la terna 3, 4, 5 se podrán encontrar la cantidad de nudos de la soga para lograr un triángulo rectángulo?

Los resultados se pueden registrar en una tabla, para poder analizarlos y realizar inferencias.

Medida de cada lado	Doble	Triple	10 veces	Otro no proporcional	Mitad
3 u	6 u	9 u	30 u	8 u	1.5 u
4 u	8 u	12 u	40 u	15 u	2 u
5 u	10 u	15 u	50 u	17 u	2.5 u

Esta actividad apunta a que los alumnos progresen en la utilización del lenguaje pertinente, en un contexto de discusión. Algunos interrogantes pueden surgir de los mismos estudiantes y otros, del docente, como por ejemplo ¿qué relación verifican los números de cada terna? o ¿existe alguna regularidad que verifican las mismas?

La interacción entre alumnos/as es importante, ya que les obliga o ordenar sus ideas, analizarlas y expresarlas de modo comprensible para los demás.

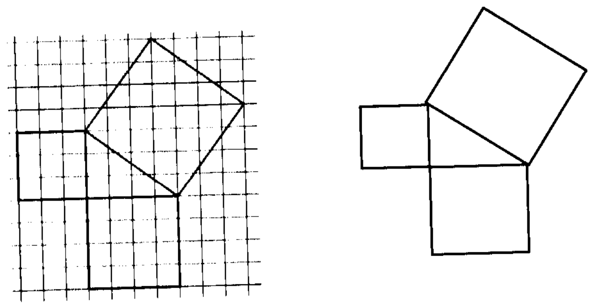
En esta propuesta, tenemos que tener claro que el nivel de justificación y de razonamiento de la categorización realizada por los esposos Van Hieler no depende de la actividad misma, sino de la secuenciación del contenido planificada para trabajar con nuestros/as alumnos/as.

PROPUESTA 2: *Comparando áreas, en papel cuadriculado.*

Proponemos dos casos:

a. <u>Trabajando con triángulos rectángulos escalenos</u>

Proponer a los alumnos la construcción de triángulos rectángulos escalenos u ofrecerles triángulos ya construidos sobre papel cuadriculado y liso.

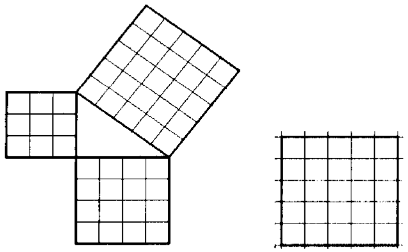


Luego, los/as alumno/as deben construir sobre cada lado del triángulo, un cuadrado.

A continuación, realizar el cálculo del área de todos los cuadrados con distintas estrategias, las que deberán quedar registradas para luego de socializarlas, abrir la discusión acerca de su validez.

Por último, examinar la relación que tienen las áreas de los cuadrados y establecer relaciones numéricas entre ellas. Invitar a que se enuncie la o las relaciones encontradas, dado que puede expresarse en distintos lenguajes, entre ellos el coloquial: "La suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa", o bien "La diferencia entre las área de la hipotenusa y de un cateto es igual al área del cuadrado del otro cateto".

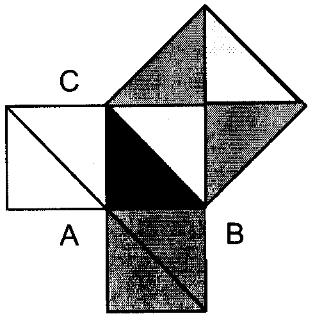
Si se quiere lograr un impacto visual más evidente, se puede construir los cuadrados de modo tal que las líneas del cuadriculado resulten paralelas a los lados del triángulo.

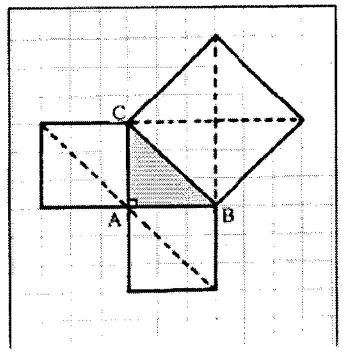


De esta manera, se reduce la dificultad para hallar el área de cada cuadrado, ya que se toma como unidad de medida el cuadrado del papel cuadriculado, y se encuentra el área encontrar el área contando cuadraditos. Esta actividad se corresponde con el Nivel 1 de desarrollo cognitivo que propone Van Hiele, lo cual no significa que no pueda ser superado; todo depende de la reflexión que proponga el docente a sus alumnos y alumnas, aparte del grado de profundidad con la que siga trabajando la propuesta.

b. <u>Trabajando con triángulos rectángulos isósceles</u>

Proponemos el trabajo con triángulo rectángulo isósceles, el cual puede verse como la mitad de un cuadrado; sus catetos coinciden con los lados del cuadrado y la hipotenusa con la diagonal del mismo. Por ello, resulta muy visible la relación entre la suma de las áreas de los cuadrados y el cuadrado que se forma sobre la hipotenusa.





Dado el triángulo rectángulo CAB, donde AB = AC

Encontrar la relación entre las áreas resulta sencillo, pero es aquí donde se produce un desequilibrio en los pitagóricos: **el valor de la hipotenusa para un triángulo de cateto, cuya longitud es una unidad de medida, resulta ser un número irracional, por lo que la hipotenusa resulta ser un segmento inconmensurable. La aparición de estos números rompió con la lógica con la cual venían trabajando los Pitagóricos.**

ANALICEMOS: Esta propuesta tiene la simplicidad de poder "mostrar" la relación entre las áreas de los cuadrados que se forman sobre cada cateto y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo elegido. Debemos asumir que queda sujeta a un caso particular, lo que puede obstaculizar la generalización. Debemos proponer el análisis de otros ejemplos. La verdad de una afirmación se verifica en uno o más ejemplos, realizando mediciones -según enuncia el Nivel 1 del trabajo de Pierre y Dina Van Hiele-, dado que el razonamiento deductivo se alcanza tras un largo trabajo de construcción cognitiva. Por eso, todo docente debería proponer más casos y tratar de que el alumno/a pueda analizar la verdad de una afirmación mediante un argumento deductivo informal, lo que le permitiría avanzar al Nivel 2 de razonamiento antes expuesto.

El trabajo realizado hasta el momento se concentra en la visualización y la argumentación de carácter verbal, pero hoy en día disponemos de una herramienta con la que Pitágoras no contaba. Dicha herramienta es el lenguaje simbólico o semiótico, por lo que podemos proponer a nuestros estudiantes expresar la relación encontrada en diferentes lenguajes.

Por ejemplo en lenguaje coloquial, un/a alumno/a podría plantear: **"La suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa"**

Expresado a través del uso de tablas, resultaría:

	Medida de cada lado	Doble	Triple	10 veces	Otro no proporcional	Mitad
Cateto a	3 u	6 u	9 u	30 u	8 u	1.5 u
Cateto b	4 u	8 u	12 u	40 u	15 u	2 u
hipotenusa	5 u	10 u	15 u	50 u	17 u	2.5 u
Área del cuad. Cateto a	9 u^2	36 u^2	81 u^2	900 u^2	64 u^2	2.25 u^2
Área del cuad. Cateto b	16 u^2	64 u^2	144 u^2	1600u^2	225 u^2	4 u^2
Área del cuad. de la hipotenusa	25 u^2	100 u^2	225 u^2	2500 u^2	289 u^2	6.25 u^2

En lenguaje símbolos o semiótico, se expresaría: si a; b y c son lados de un triángulo rectángulo cualquiera, donde a y b son los catetos y c la hipotenusa resulta que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Debemos propiciar espacios donde la representación que cada alumno utilice sea una forma de expresar lo que está pensando, y donde el debate posterior sobre la pertinencia y economía de sus producciones permita su evolución hacia las representaciones convencionales. **La evolución de los alumnos en el uso de las representaciones es una tarea a largo plazo y requiere un trabajo constante.**

PROPUESTA 3: *Utilizando puzzles*

En esta propuesta presentamos dos casos:

a. Descomposición y composición de figuras

La demostración a partir de descomponer y componer un cuadrado goza hoy en día de una amplia popularidad, ya que aparece en varios textos de nivel secundario y terciario. Incluso Adrián Paenza, en la entrevista que ofreció al diario Página 12, expresó: "Cuando uno habla de la belleza de la matemática, inexorablemente tiene que producir algo precioso que justifique el calificativo." (PAENZA; A. 2007) y luego continúa presentando esta demostración.

En nuestro seminario propusimos la realización de la actividad con algunas modificaciones; fue implementada a partir de un puzle.

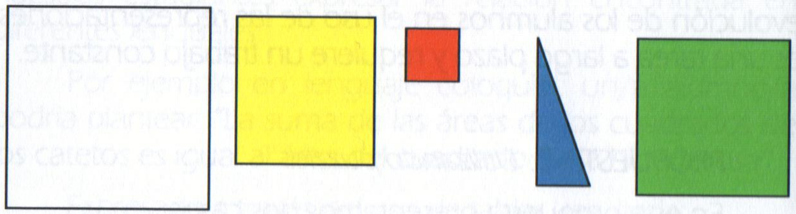
Presentamos a los alumnos las siguientes piezas (en cartulina de diferente color):

1°) dos cuadrados congruentes (puede ser blancos), 2º) ocho triángulos rectángulos congruentes (azul) de catetos a y b, (cuidando que a + b se igual al lado del cuadrado realizado en 1º)

3º) un cuadrado de lado igual al cateto "b" (amarillo)

4º) un cuadrado de lado igual al cateto "a" (rojo)

5º) un cuadrado (verde) cuyo lado coincide con la longitud de la hipotenusa de los triángulos rectángulos construidos en 2º.



• Entregamos a los/as alumnos/as los dos cuadrados congruentes (blancos), los tres cuadrados (verde, amarillo y rojo) y 8 triángulos rectángulos (azules).

• A continuación, se les solicitó que cubrieran con las piezas cada cuadrado (blanco) y que expresaran las relaciones que se podían deducir de esta actividad en forma simbólica.

• Por último, se aunó criterios con los alumnos sobre la simbología a utilizar.

Por ejemplo: cuadrados mayores: C_1 y C_2

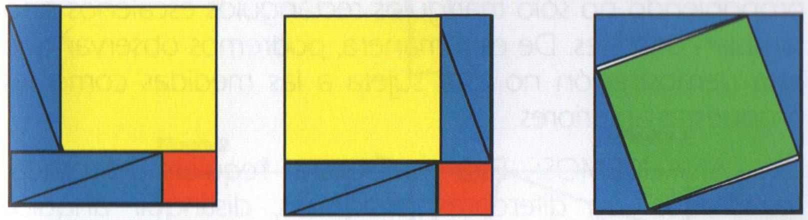
Área del cuadrado de lado a = a^2

Área del cuadrado de lado b = b^2

Área del cuadrado de lado hipotenusa h = h^2

Áreas de rectángulos = a . b

Área del triángulo = a.b/2



Luego se puede expresar en forma simbólica las piezas que cubrieron a los cuadrados:

Área C_1 = Área C_2

Área C_1 = $a^2 + 2a.b + b^2$, o bien, Área de C_1 = $a^2 + 4(a.b/2) + b^2$

Área C_2 = $h^2 + 4(a.b/2)$

Y Como: Área C_1 = Área C_2

Resulta $a^2 + 2ab + b^2 = 4(a.b/2) + h^2$

O bien

$a^2 + 4(a.b/2) + b^2 = 4(a.b/2) + h^2$

Si quitamos los 4 triángulos, podemos decir que:

$a^2 + b^2 = c^2$

Y ¿cómo expresamos este enunciado simbólico en lenguaje coloquial?

Nos preguntamos ¿será sólo con estas piezas que se logra armar el puzle?, ¿la relación expresada ¿se cumplirá sólo para las piezas dadas o para cualquier otra?

Tal vez sea oportuno brindar en el aula diferentes posibilidades de puzles, con diferentes medidas, o bien que los cuadrados base (blancos) sean iguales, pero varíen los triángulos entregados a cada grupo de chicos/as, proponiendo no sólo triángulos rectángulos escalenos sino también isósceles. De esta manera, podremos observar que esta demostración no está sujeta a las medidas como las propuestas anteriores.

ANALICEMOS: Esta propuesta requiere identificar "cuadrados" en diferentes posiciones; distinguir ángulos rectos, rectángulos y triángulos también en distintas posiciones; reconocer el papel de las explicaciones lógicas o argumentos deductivos en la justificación de hechos, el intercambio de ideas y experiencias entre compañeros/as en las que el papel del profesor/a es fundamental, ya que hace que surja un nuevo saber de otros ya adquiridos. Además, su actuación pretende corregir el lenguaje de los/as alumnos/as y promover el pasaje entre los diferentes marcos, lo que es fundamental para realizar el trabajo y lograr, de este modo, un aprendizaje de mayor complejidad.

Cabe aclarar que esta propuesta no requiere un lenguaje específico y conceptos rebuscados. Por el contrario, Adrian Paenza en su relato nos dice: "Usted no necesita saber nada. Bueno, casi nada. Hace falta que usted sepa lo que es un triángulo, un ángulo recto (de 90 grados, como si fuera una escuadra) y que sepa que se llama triángulo rectángulo justamente a un triángulo que tiene un ángulo recto. Eso es todo."

A continuación, transcribimos un caso de demostración presentado por Paenza en la contratapa del diario página 12:

Figura 1

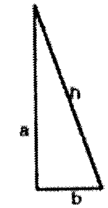


Figura 2

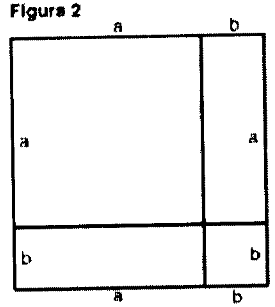


Figura 3

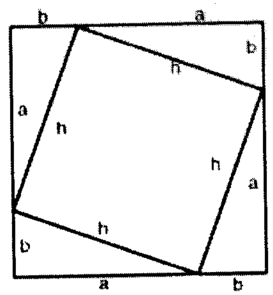
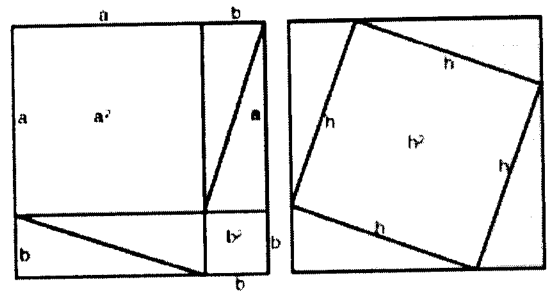


Figura 4



Supongamos que se tiene un triángulo rectángulo, que voy a llamar T, y a los lados los voy a llamar a, b y h (figura 1).

Imaginemos que el triángulo T está hecho "pegando" tres hilos. Supongamos que se le puede "cortar" el lado h, y que uno puede "estirar" los lados a y b.

Con este nuevo "lado", de longitud (a+b), fabricamos dos cuadrados iguales. Cada lado del cuadrado mide (a+b).

Marcamos en cada cuadrado los lados a y b, de manera tal de poder dibujar estas figuras (figuras 2 y 3).

Ahora, observemos en cada cuadrado cuántas veces aparece el triángulo T (para lo cual hay que marcar en un dibujo los cuatro triángulos T en cada cuadrado).

Como los cuadrados son iguales, una vez que hemos descubierto los cuatro cuadrados en cada uno de ellos, la superficie que queda "libre" en cada uno tiene que ser la misma (figura 4).

En el primer cuadrado, quedan dos "cuadraditos" de superficies a^2 y b^2 respectivamente. Por otro lado, en el otro cuadrado, queda dibujado un "nuevo" cuadrado de área h^2.

Conclusión: "tiene" que ser

$$a^2 + b^2 = h^2$$

que es justamente lo que queríamos probar: "en todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

En este caso, los catetos son a y b, mientras que la hipotenusa es h.

¿No es una demostración preciosa? Es sólo producto de una idea maravillosa que no requiere ninguna herramienta complicada. Sólo sentido común." (PAENZA, A.; 2007)

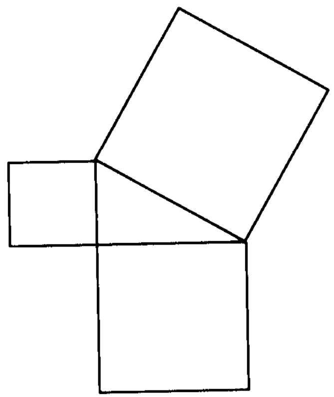
b. <u>Tres Rompecabezas y Demostración de Bhâskara</u>

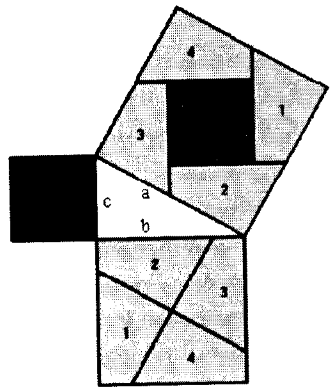
En la propuesta anterior trabajamos con dos cuadrados iguales; aquí presentamos diferentes maneras de

descomponer las áreas de los curados formados sobre cada cateto, para luego componer el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

b.1. <u>Rompecabezas de Henry Perigal[2]</u>

En esta idea, Perigal propone descomponer en cuatro piezas el cuadrado construidos sobre uno de los catetos, para luego utilizarlas junto al otro cuadrado construido sobre el cateto, y componer el cuadrado de la hipotenusa.





Nosotros llevamos esta propuesta a nuestros estudiantes, como un puzzle. Les ofrecimos, en un papel, los triángulos rectángulos con el cuadrado sobre la hipotenusa ya construido. Luego, les entregamos las piezas para armar, como si fuera un rompecabezas, el cuadrado de la hipotenusa. Otra opción para llevar adelante esta actividad es solicitar que cada alumno/a lo construya.

¿Cómo se construye?

---

[2]Henry Perigal (1801- 1898) Matemático inglés, dedicó muchos años de vida a la demostración de teoremas geométricos utilizando la técnica de disección.

• Se grafica un triángulo rectángulo cualquiera (escaleno o isósceles), de catetos b y c e hipotenusa a;

• se dibuja sobre cada lado un cuadrado;

• luego, se realiza una partición del cuadrado de lado b de la siguiente forma: por el centro del cuadrado (punto de intersección de las diagonales) se trazan dos segmentos, uno paralelo a la hipotenusa y el otro perpendicular a ella.

• Se obtienen así cuatro piezas, que, junto al cuadrado de lado "c", encajan perfectamente en el cuadrado de lado "a".

Surgen algunas preguntas: ¿Nuestros/as alumnos/as construyeron el mismo triángulo? ¿Los triángulos tienen las mismas medidas? ¿Qué sucede si el triángulo rectángulo es isósceles? ¿Cómo son las piezas en este último caso?

Si cada estudiante o cada grupo, según se decidiera en la organización de la clase, construyo triángulos rectángulos diferentes, incentivarlos a que expresen en forma general lo observado en las figuras. Preguntar ¿Cómo enunciar lo realizado con las piezas?

ANALICEMOS: En esta demostración, nos apoyamos en la representación gráfica, a la cual no podemos dejar de lado, pero es independiente la medida de los lados del triángulo considerado. Podemos concluir, entonces, que **en "todo" Triángulo Rectángulo la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa**, relación pitagórica, sin más necesidad de aclarar lo que muestra el desplazamiento de las piezas.

b.2. Rompecabezas de ocho piezas

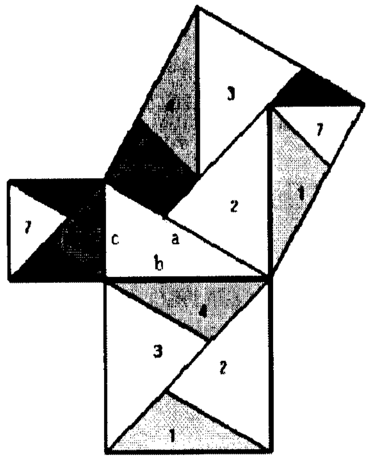
• Se parte de la construcción de un triángulo rectángulo cualquiera;

• se construye un cuadrado sobre cada lado del triángulo;

• se traza una diagonal a los cuadrados de los catetos;

• desde los otros dos vértices, se trazan los segmentos paralelos a la hipotenusa, hasta la diagonal.

Los segmentos anteriores determinan cuatro partes en cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos. Así, quedan determinadas ocho piezas. Estas, dispuestas convenientemente, recubren el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

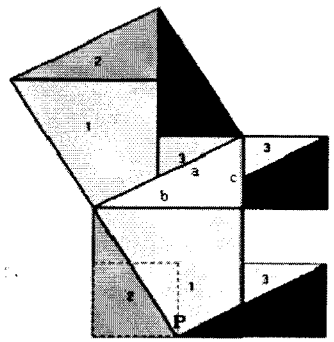


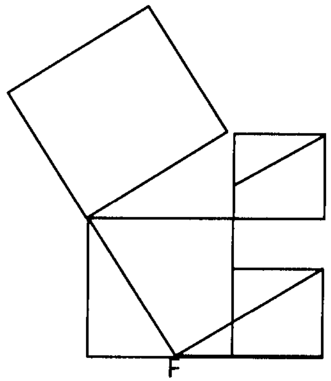
ANALICEMOS: la demostración gráfica, apoyada en lo visual, no se puede desprender de la representación gráfica para poder justificar la relación pitagórica. Podemos ver que esto se cumple en cualquier triángulo rectángulo, dado que no se apoya en la medida. La dificultad que puede presentarse, con este puzzle, es de carácter operativo, por la cantidad de piezas a manipular para cubrir el cuadrado de la hipotenusa.

b.3. Rompecabezas de Ozanam[3]

Este rompecabezas cuenta con cinco piezas. Todas ellas se obtienen al cortar los dos cuadrados construidos sobre los catetos, de la siguiente manera:

- Se construyen los cuadrados de lados **b** y **c**.
- Se reproduce el cuadrado de lado **c**, situándolo inferiormente como muestra la figura.





- Se prolonga el lado del cuadrado de la hipotenusa para determinar el punto P.
- Una vez determinado el punto P, se traza un segmento paralelo a la hipotenusa, que llega hasta el vértice superior derecho del cuadrado inferior, y uno perpendicular a la misma desde el punto P hasta el vértice superior izquierdo del mismo cuadrado.

[3] Jacques Ozanam (1640 - 1717) Matemático Francés, desde muy temprano las matemáticas le atrajeron

Estos segmentos determinan las cinco piezas que (como en los casos anteriores), situadas convenientemente, cubren el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

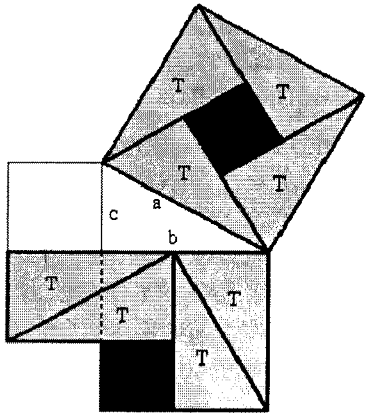
ANALICEMOS: Son estas diferentes opciones, en las que el apoyo visual y gráfico son fundamentales. Se puede solicitar a los alumnos que expresen de diferentes maneras lo realizado u observado, que justifiquen la relación pitagórica utilizando un lenguaje coloquial, pertinente, desde lo visto y que puedan expresarlo en diferentes lenguajes.

b.4. Demostración de Bhâskara[4]

Esta demostración se le atribuye al matemático hindú Bhâskara. Es una de las más antiguas demostraciones del teorema.

A partir de un triángulo rectángulo de catetos **b** y **c** e hipotenusa **a**, se ha hecho una división en cinco partes del cuadrado de lado **a**. Cuatro de estas partes son triángulos rectángulos iguales al de partida, y la otra es un cuadrado de lado **b-c**. Esas mismas cinco piezas recubren los dos cuadrados de lados **b** y **c**.

[4] **Bhâskara (1114-1185) matemático y astrónomo hindú. Descubrió el doble signo de los radicales cuadráticos y el carácter anormal de los mismos cuando el subradical es negativo Expuso la demostración del Teorema de Pitágoras en su libro Vijaganita sin añadir más comentarios que el de "observe".**



Observando el gráfico, nos preguntamos: ¿Cómo se puede expresar, en forma simbólica, el área del cuadrado de lado a?

Una posible respuesta es: Podemos expresar que:

$a^2 = 4\,T + (b - c)^2$

Pero $(b - c)^2$ ¿Se puede indicar de otra manera?

Si expresamos como un producto la potencia, tenemos:

$(b - c)^2 = (b - c) . (b - c)$

Ahora, resolvemos aplicando la propiedad distributiva:

$(b - c)^2 = (b - c) . (b - c) = b^2 - b.c - b.c + c^2$

Trabajamos y obtenemos:

$(b - c)^2 = b^2 - 2.b.c + c^2$

De lo que resulta que:

$a^2 = 4\,T + c^2 - 2\,bc + b^2$

como $4\,T = 2\,bc$

Reemplazando en la primera expresión y simplificando, se obtiene:

$$a^2 = c^2 + b^2$$

Queda así expresado, en forma general, el teorema de Pitágoras.

ANALICEMOS: En estas propuestas de trabajo con puzzles, el alumno trabaja descomponiendo áreas y recomponiéndolas en otra. Aquí, es fundamental que el estudiante observe y comprenda la conservación de las áreas.

¿Qué es la conservación del área?

"La conservación, significa que el valor del área permanece intacto mientras su figura puede ser cualitativamente nueva (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1981; Kordaki y Potari, 2001). La conservación puede darse a partir del cambio de la posición de una figura sin modificar su forma, a través de movimientos: traslación, rotación y reflexión. También puede conservarse el área, modificando una figura, partiéndola y reacomodando sus partes, o bien; reacomodar sin separar las partes". (CRISÓLOGO D.; 2006)

PROPUESTA 4: *Usando la semejanza*

<u>Demostración atribuida a Pitágoras</u>

Para abordar esta propuesta, se debe contemplar el trabajo con figuras semejantes y, en particular, con triángulos semejantes. En el documento curricular del tercer ciclo de la escuela primaria neuquina, se propone propiciar situaciones de enseñanza que faciliten: "La diferenciación entre figuras congruentes y semejantes", "Figuras congruentes y semejantes. Propiedades" y se sugiere "La construcción y reconocimiento de figuras semejantes (ampliar y reducir figuras) aplicando proporcionalidad" (A.A.V.V.; 2007: 77. D.C.T.C. Neuquén). "Semejanza: Ampliación y reducción de figuras", "La observación, el reconocimiento y la construcción de figuras semejantes (congruencia de ángulos y proporcionalidad de lados correspondientes) La construcción y reconocimiento de figuras semejantes (ampliar y reducir figuras) aplicando proporcionalidad. La diferenciación entre figuras congruentes y semejantes" (A.A.V.V.; 2007: 87. D.C.T.C. Neuquén).

Para que el alumno/a realice la demostración, que, supuestamente, Pitágoras propuso, primero se identifican los triángulos semejantes;

¿Qué condiciones son necesarias para reconocerlos?

Nuevamente, se presentan varias preguntas:

¿Cómo son las medidas de los ángulos de los 2 triángulos semejantes?

¿Cuál es la razón existente entre los lados homólogos, o sea, los lados correspondientes?

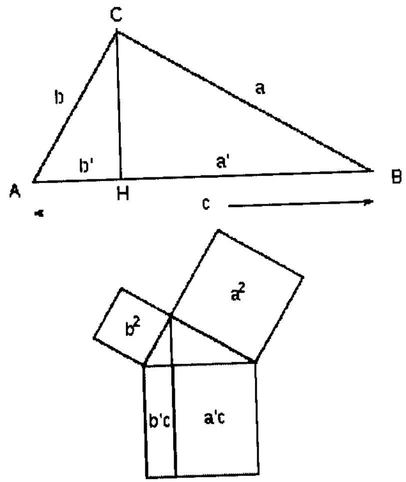
¿Son proporcionales los lados homólogos?

De las respuestas a estas preguntas, surge una de las conclusiones –pero no la única posible-, que puede ser: *Dos triángulos son semejantes si los ángulos homólogos son congruentes y los lados homólogos son proporcionales.*

El triángulo ABC es rectángulo, y también lo son los triángulos AHC y BHC, dado que resultan de trazar la altura, CH, del triángulo ABC.

¿Los triángulos encontrados son semejantes? ¿Por qué?

Sí, los triángulos son semejantes.



Se cree que Pitágoras se basó en la semejanza de los triángulos ABC, AHC y BHC.

Sea el triángulo ABC, rectángulo en C. El segmento CH es la altura relativa a la hipotenusa, en la que se determinan los segmentos a' y b', proyecciones de los catetos a y b, respectivamente.

Los triángulos rectángulos ABC, AHC y BHC tienen sus tres ángulos congruentes: todos tienen un lado en común, y los ángulos agudos son iguales, bien por ser comunes, bien por tener sus lados perpendiculares. En consecuencia, dichos triángulos son semejantes.

De la semejanza entre ABC y AHC, resulta:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b}$$

$$b^2 = b'c$$

De la semejanza entre ABC y BHC:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a}$$

$$a^2 = a'c$$

Sumando las dos igualdades, se obtiene:

$$a^2 + b^2 = a'c + b'c = c\,(a' + b')$$

Pero $(a' + b') = c$, por lo que finalmente resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ANALICEMOS: Esta demostración se basa en la relación que existe entre los lados homólogos de triángulos semejantes. En este caso, la representación gráfica puede estar presente o no. Los/las alumnos/as parten de otras propiedades para arribar a una conclusión general y reconocen cómo unas propiedades derivan de otras, estableciendo relaciones entre ellas. De esta manera, se estaría trabajando en el Nivel 2 de la clasificación de Van Hiele, demostración deductiva informal, que implica que la verdad de una afirmación se demuestra mediante un argumento deductivo informal.

PROPUESTA 5: *Sólo con números*

Expresiones algebraicas para obtener triángulos rectángulos con valores enteros

El gran Pitágoras de Samos nos legó su Teorema, en el que se relacionan las medidas de los catetos y de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

$a^2 = b^2 + c^2$"

Como ya dijimos, la menor terna pitagórica es: 3, 4 y 5,

Pero ¿Cuántas ternas pitagóricas hay? ¿Son finitas o infinitas las que se pueden encontrar? Para analizar estas preguntas, podemos, simplemente, multiplicar cada término de la relación pitagórica por un número natural "n",

Si n = 2 es 3.2; 4.2 y 5.2, siendo otra terna 6; 8; 10. De esta manera, encontramos un triángulo cuyos lados son el doble del primero.

Como decimos, la terna surge de la relación:

$a^2 = b^2 + c^2$

Si multiplicamos por un número cualquiera n, siendo n distinto de 1 resulta:

$(a.n)^2 = (b.n)^2 + (c.n)^2$

Un ejemplo: Si n = 3, $(3n)^2 + (4n)^2 = (5n)^2$ resulta:

$(9)^2 + (12)^2 = (15)^2$ que cumple: 81 + 144 = 225

Los triángulos que se obtienen de multiplicar la medida de sus lados por un número natural cualquiera son semejantes.

Cabe entonces la pregunta ¿Se puede obtener ternas pitagóricas que no sean proporcionales a la más pequeña?

Analicemos esta pregunta, en primer lugar, experimentando:

Empezaremos completando la tabla de los 30 primeros cuadrados:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	4	9							

11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2

21^2	22^2	23^2	24^2	25^2	26^2	27^2	28^2	29^2	30^2

Luego, estableceremos las relaciones que nos permitan formar las ternas. (3;4;5); (6;8;10); ...

Existen diferentes maneras de encontrar ternas pitagóricas, como por ejemplo:

Terna pitagórica de **Mesopotamia** (entre 1900 y 1600 a. C.):

$(p<q)$ $\quad b = p^2 - q^2 \quad c = 2pq \qquad a = p^2 + q^2$
$a^2 = b^2 + c^2$

Terna pitagórica de **Pitágoras** (griego, siglo VI a.C.):

$(n \neq 0) \quad a = 2n^2 + 2n + 1; \quad b = 2n + 1; \quad c = 2n^2 + 2n$
$a^2 = b^2 + c^2$

Terna pitagórica de **Platón** (griego, siglo IV a. C.)

$(n>1) \quad a = n^2 + 1; \quad b = 2n; \quad c = n^2 - 1 \qquad a^2 = b^2 + c^2$

Podemos probar o demostrar algunas de estas expresiones.

Si consideramos a "b" y "c" catetos del un triángulo rectángulo y "a" hipotenusa, se cumple que: $a^2 = b^2 + c^2$

Se consideran dos números naturales p y q, con $p>q$

Se forma una terna con a, b, y c, en la que se cumpla:

$b = p^2 - q^2 \qquad c = 2pq \qquad a = p^2 + q^2$

Elevando ambos miembros de cada igualdad al cuadrado, se obtiene:

$b^2 = (p^2 - q^2)^2 \qquad b^2 = p^4 + q^4 - 2\,p^2\,q^2$

$c^2 = (2pq)^2 \qquad c^2 = 4\,p^2\,q^2$

$a^2 = (p^2 + q^2)^2 \qquad a^2 = p^4 + q^4 + 2\,p^2\,q^2$

De esto resulta que siempre se verifica la relación $a^2 = b^2 + c^2$

La siguiente tabla presenta algunos ejemplos:

p	q	$p^2 - q^2$	2pq	$p^2 + q^2$
		Cateto b	Cateto c	Hipotenusa a
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
4	1	15	8	17
5	1	24	10	26
...	1			
3	2	5	12	13
4	2	12	16	20
...	2			
4	3	7	24	25
5	3	16	30	34
...	3			
...	...			

La relación pitagórica nos sirve también para reconocimiento de triángulos según sus ángulos.

Dados los tres lados de un triángulo, **éste es rectángulo si el cuadrado del mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.**

Si a es el lado mayor, b y c los otros dos, se obtiene:

T. rectángulo si: $a^2 = b^2 + c^2$

T. acutángulo si: $a^2 < b^2 + c^2$

T. obtusángulo si: $a^2 > b^2 + c^2$

Hemos llegamos al final de esta experiencia didáctica. Nuestra intención se vería cumplida si este trabajo sirve de ayuda al docente en su difícil e importante labor de cada día. Lo esencial, desde esta perspectiva, es que en el aula se pueda observar, manipular, construir, comprobar, demostrar -entre otras acciones- los conceptos matemáticos. El hecho de que compartamos esta propuesta pretende mostrar una de las tantas maneras posibles de abordar el teorema de Pitágoras en nuestra escuela.

Como nos dice Stewart, "La historia de la matemática es larga y complicada. Los pioneros de las matemáticas hacían avances extraordinarios, pero también se adentraban en callejones sin salida. Este es el signo de los pioneros. (...) Durante su larga historia, las matemáticas se han inspirado en dos fuentes: el mundo real y el mundo de la imaginación humana" (STEWART, I.; 2008:297).

BIBLIOGRAFÍA

ALAGIA H, BRESSAN, A, SADOVSKY, P, 2005, Reflexiones teóricas para la educación Matemática. Ed.: Zorzal, Buenos Aires, Argentina

APOSTOL, T.M. 1984. Introducción a la teoría analítica d números. Ed.: Reverte. Barcelona. España

BALACHEFF, N. 2000 Procesos de prueba en los alumnos de matemática. Una empresa docente, Universidad de los Andes, Bogotá. Colombia

BRESSAN A., BOGISIC, B. Y CREGO, K., 2000, Razones para enseñar geometría en la educación básica. Ed. Novedades Educativas, Buenos Aires, Argentina.

BRESSAN A., REYNA I., ZORZOLI G., 2003, Enseñar Geometría. Redescubrir una tarea posible, Ed. Styrka, Buenos Aires, Argentina.

BRESSAN, A.; CASTELLANO, V.; MARINO, M. R.; CALAMANDREI, M. M., 2005. Área de Matemática. Documento Curricular Primer Ciclo, Resolución 1864/05. Neuquén. Argentina.

BRESSAN, A.; MIOTTI, M. A.; MARINO, M. R.; CALAMANDREI, M. M., 2006. Área de Matemática. Documento Curricular Segundo Ciclo, Resolución 1237/06. Neuquén. Argentina.

BRESSAN, A.; MIOTTI, M. A.; MARINO, M. R.; CALAMANDREI, M. M., 2007. Área de Matemática. Documento Curricular Tercer Ciclo, Resolución 1265/07. Neuquén. Argentina.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en didactique des Mathématiques, (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Traducción de Centeno Pérez; Melendo Pardos;. Murillo Ramón) [en línea]: http://lem.usach.cl/biblioteca/index.php?Tipo=4&Tema=7

CRISÓLOGO D. 2006. Matemática educativa. Algunos aspectos de la socioepistemologia y la visualización en el aula Ed.: Díaz de Santos. [en línea]: http://books.google.com.ar/books?id=McHVDSfPwsAC&printsec=frontcover&source=gbs_v2_summary_r&cad=0

DOUADY, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

DUVAL, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? Grupo Editorial Iberoamericana

FLORES, A. 1992. La Feria Pitagórica. Revista Educación Matemática Vol. 4 Nº 1 y Nº 2. México.

ITZCOVICH, H, 2005, Iniciación al estudio de la didáctica de la geometría. Ed.: Zorzal, Buenos Aires, Argentina

PACIOLI, L., 1509 - 1947. La Divina Proporción. Ed.: Losada. Buenos Aires. Argentina.

PAENZA, A., 2007 Matemática... ¿estás ahí? Episodio 3,14; Ed.: Siglo XXI. Buenos Aires. Argentina.

PANIZZA, M. (COMP.), 2004, Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas. Ed. Paidós. Buenos Aires. Argentina

PARRA, C. Y SAIZ, I. (COMPS.), 1994, Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones. Ed.: Paidós. Buenos Aires. Argentina

RATHS, L. E. Y OTROS. 1997. Cómo enseñar a pensar. Teoría y aplicación. Ed. Paidós. Buenos Aires. Argentina

SANTALÓ, L. 1981. La Enseñanza de la Matemática en la Escuela Media. Proyecto CINAE – Buenos Aires. Argentina.

STEWART, I. 2008. Historia de las matemáticas. En los últimos 10.000 años. Ed.: Crítica. Madrid. España.

PÁGINAS WEB

www.rae.es

www.es.wikipedia.org

http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/MirtaDiaz/Proyectofinal/

http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Euclid/perigal/perigal.html

http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-88928-2007-07-31.html

http://www.gpdmatematica.org.ar/

LOS AUTORES

Sergio Alfredo Sciglitano
Nació en la prov. de Buenos Aires en 1964.
Es profesor en Historia, y magíster en Filosofía e Historia de las Ciencias, con la tesis: "La Ciencia y el materialismo dialéctico en Ludovico Gerymonat, egresado de la U. N. Comahue.
Realizó estudios (CTS) Ciencia, Tecnología y Sociedad en el Departamento de Anatomía Patológica e Historia de la Ciencia, Facultad de Medicina, Granada, España y estudió la obra de Ludovico Geymonat, en el Istituto Per La Filosofia Della Scienza, La Logica e la Storia Della Scienza e Della Tecnica, de Milán, Italia.
Actualmente, es profesor del Seminario de Historia de las Ciencias, en el Instituto Superior de Formación Docente N° 6, Consejo Provincial de Educación Neuquén.

María Alejandra Miotti
Nació en General Roca, Córdoba, en 1964.
Es profesora de Matemática egresada del Instituto Superior del Profesorado María Inmaculada, de Marcos Juárez, Córdoba.
Formó parte del equipo pedagógico para la elaboración del Documento Curricular de Segundo y Tercer ciclo de la escuela primaria neuquina (2006-2007)
Dictó clases en diferentes escuelas secundarias de las provincias de Río Negro y Neuquén. Actualmente, se desempeña como decente de nivel terciario en el Instituto Superior de Formación Docente N° 6. Sus cátedras son la de Matemática y su Enseñanza y Didáctica de la Matemática en la carrera Profesorado de Enseñanza Básica. En el presente se desempeña como Coordinadora del área de extensión.

Correo: pitagorasescuela@gmail.com

INDICE

Este libro se terminó de imprimir
en el mes de Marzo de 2010 en
La Imprenta Ya - Av. Mitre 4031
Munro - Buenos Aires - Argentina
www.laimprentaya.com

educo
Editorial Universitaria
Universidad Nacional del Comahue

REUN
RED DE EDITORIALES
DE UNIVERSIDADES
NACIONALES

ISBN 978-987-604-183-6
9789876041836