SIMBOLIZACIÓN, MODELIZACIÓN Y DISEÑO INSTRUCCIONAL

K.GRAVEMEIJER, P. COBB, J. BOWERS Y J. WHITENAK [1]

TRADUCCIÓN: MERCEDES ARANÉZ Y ANA BRESSAN PARA EL GPDM. REVISIÓN JUNIO 2016.

SECUENCIA INSTRUCCIONAL PARA LA ESTRUCTURACIÓN DE NÚMEROS [2]

Con el fin de elaborar aún más la noción de una trayectoria de aprendizaje en general y la transición de un *modelo de* a un *modelo para* en particular, describimos la evolución de prácticas de matemática áulica durante un reciente experimento de enseñanza conducido en un aula de primer grado en un asentamiento suburbano del sudeste. La finalidad de este experimento de enseñanza fue la de apoyar el desarrollo en los alumnos del sentido general del número para números menores de 20. Esto es, nuestro objetivo instruccional era corroborar el emergente de lo que Greeno (1991) describió como un campo matemático. Primero discutimos el diseño heurístico de matematización y reinvención, fenomenología didáctica, y modelos emergentes describiendo la secuencia instruccional de Estructuración de Números y la trayectoria de aprendizaje conjeturada. Luego describimos el experimento de enseñanza áulico documentando primero las normas de participación que fueron establecidas en el aula de primer grado. Luego, registramos las prácticas de matemáticas que emergieron a medida que el maestro y los alumnos negociaban sus interpretaciones y comprensiones, y comparamos esta trayectoria de aprendizaje actualizada con la trayectoria conjeturada.

Matematización y reinvención en relación con la secuencia de Estructuración de Números

La secuencia aritmética en un ábaco fue creada para posibilitar el razonamiento cuantitativo flexible con números hasta 20. En términos de la metáfora del campo numérico de Greeno (1991), la intención era que los alumnos llegarían a actuar en un campo numérico estructurado por relaciones entre los números hasta 20. Desde la observación, esto estaría indicado por el uso flexible del pensamiento o por estrategias derivadas de la realidad para resolver un amplio espectro de tareas. Por ejemplo los estudiantes podrían resolver una tarea como 14 – X = 6 razonando que 14 – 4 = 10, 10 – 4 = 6, por lo tanto la respuesta es 8.

Alternativamente, ellos podrían razonar que 7 + 7 = 14, por lo tanto, 14 – 7 = 7, y 14 – 6 = 8. Nuestro intento global fue que las relaciones numéricas implícitas en estas y otras estrategias observables estuviesen a mano para los alumnos. En otras palabras, ellos no tendrían que descifrar estrategias adecuadas para usar. Nuestro objetivo, en cambio, fue que los alumnos tuvieran la experiencia de percibir directamente relaciones a medida que interpretaban y resolvían situaciones problemáticas aritméticas. No es necesario decir, que llegar a actuar en tal ámbito es un logro intelectual mayor que requiere un respaldo de desarrollo muy activo y está profundamente influenciado por las herramientas materiales y simbólicas que utilicen los alumnos. El desafío para el diseño fue, por lo tanto, conjeturar una trayectoria de aprendizaje y los medios para respaldarla, que culminara con la apropiación intelectual.

---

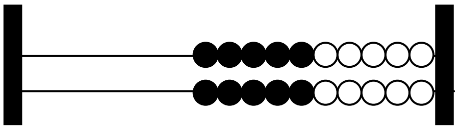
[1] Gravemeijer K., Cobb P., Bowers J. y Whitenak J. Symbolizing, modeling and Instructional design. En *Symbolizing and Communicating in mathematics classrooms* de Cobb P (ed), Yackel E (ed) y Mc Clain (ed). K. L. Erlbaum Assoc. Publishers. London. 2000. Cap.7.

[2] Freudenthal y sus sucesores consideran que hacer matemáticas, en parte, consiste en organizar fenómenos mediante un proceso de abstracción y formalización progresivos (Freudenthal, 1991, pp.11, 15; Treffers, 1987, p.59). Él propone que los alumnos aprendan matemáticas, en parte, haciendo esta organización, a la cual denomina *estructuración: "Al estructurar, más que formar conceptos nos apropiamos de la realidad*." Él utiliza el término estructurar en sentido general, para significar *"enfatizar la forma"*. Estructurar números, en este documento, significa organizar números más formalmente: estableciendo regularidades en ellos, relacionándolos entre sí y construyendo simetrías y patrones numéricos.

Una fuente de guía para el diseño fue proporcionada por la investigación que documentaba estrategias de solución informales de los alumnos. Se encontraron pruebas que revelaban que algunos alumnos frecuentemente desarrollaban estrategias que usaban los dobles (y múltiplos) de cinco como referencia. Como explicación a estos hallazgos, van den Berg y van Eerde (1985) notaron que el uso espontáneo del 5 y del 10 como puntos de referencia se relacionaba con la creación del modelo de los dedos de la mano que fortalecía los resultados del conteo. Treffers (1991) también sugirió que las estrategias centradas en los dobles, 5 y 10 como puntos de referencia, reflejaba relaciones implícitas en los dedos de las manos. Por ejemplo, un alumno podría mostrar 8 como 5 dedos de una mano y 3 de la otra, o con 4 dedos de cada mano. Estos esquemas pueden ser acortamientos de contar los dedos de a uno. En términos de Steffe, Cobb y van Glaserfeld (1988) los esquemas de los dedos encierran el resultado del conteo.

Basado en estos descubrimientos, Treffers (1991) diseñó un instrumento llamado el "contador" (rekenrek en holandés) cuyo uso respaldaría el desarrollo del razonamiento numérico, en el cual cinco, diez y dobles pueden surgir como puntos de referencia. Este instrumento consiste en dos caños paralelos conteniendo cada uno 10 cuentas o perlas. Como se muestra en la figura 7.2, las primeras cinco cuentas a la izquierda de cada cañito son rojas, y las otras cinco son blancas.

Fig.7.2 el contador



Los alumnos pueden usar el contador moviendo todas las cuentas hacia la derecha y creando luego varias configuraciones deslizando las cuentas hacia la izquierda. Por ejemplo, si un estudiante quiere mostrar el 8, puede mover 5 cuentas de arriba y 3 de abajo, o puede mover 4 sobre cada caño. Estas formas de actuar con el contador reflejan relaciones implícitas en los dedos de las manos y, desde la perspectiva del observador, aparecen como tomando cincos y dobles respectivamente como puntos de referencia. En la trayectoria hipotética de aprendizaje que nosotros proyectamos, las actividades instruccionales involucraban el uso del contador para resolver una serie de tareas aditivas.

Fenomenología didáctica en relación con la secuencia de Estructuración de Números

Como un diseño heurístico, la fenomenología didáctica involucra encontrar situaciones fenoménicamente apropiadas desde las cuales podrían surgir modelos en el curso de actividades y discusiones áulicas. En el caso de la secuencia de Estructuración de Números, un tipo de situación involucraba como ámbito (contexto) un ómnibus de dos pisos. Planificamos introducir el contador una vez que los alumnos hubiesen explorado esta situación. Nuestra intención era que las cuentas de arriba y de abajo fuesen usadas para mostrar el número de pasajeros en la planta baja del ómnibus, y que el mover las cuentas representara el ascenso y descenso de pasajeros. Es importante acotar que la mayoría de los estudiantes probablemente nunca habían visto un ómnibus de dos pisos, menos aún viajado en uno de ellos. Por lo tanto anticipamos que el maestro y los alumnos discutirían largo tiempo el contexto y quizás simularan viajar en un ómnibus de dos pisos para que fuese una situación experimentada realmente. El heurístico de la fenomenología didáctica no implica por lo tanto, que el contexto inicial usado como punto de partida deba ser auténtico en el sentido de que encaja con las experiencias actuales, vividas fuera de la escuela. En vez, la intención es identificar situaciones que pueden llegar a ser experimentalmente reales para los alumnos y que rápidamente estas situaciones se constituyan en ámbitos desde los cuales modelos matemáticamente significativos puedan surgir. Por eso, este concepto para diseñar involucra tomar conciencia de las consecuencias potenciales de la secuencia instruccional aún cuando se están eligiendo situaciones como punto de partida. Para parafrasear a Ball (1993), es un abordaje que involucra tener una mirada en el horizonte matemático y poner la otra en los intereses, gustos y comprensiones corrientes de los alumnos.

Modelos emergentes en la secuencia de Estructuración de Números

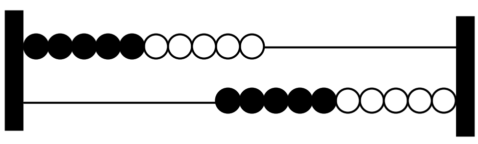
Es importante enfatizar que la trayectoria de aprendizaje que visualizamos cuando desarrollamos la secuencia instruccional necesariamente implicaba hacer suposiciones sobre la microcultura del aula. Por ejemplo, anticipamos que los alumnos se engancharían en conversaciones en las cuales ellos no sólo describirían como habían actuado con los contadores, sino también explicarían como habían interpretado las consignas y como así también por qué habían usado el contador de maneras particulares. Más aún, el maestro respaldaría activamente el emergente de soluciones diferentes y progresivamente eficientes. Estos comentarios otra vez hacen surgir la importancia de dar atención explícita al contexto social áulico.

Las primeras actividades instruccionales que planificamos para la secuencia de estructurar números eran los que involucraban el escenario del ómnibus de dos pisos. Intentamos construir sobre una secuencia instruccional llamada “Modelos y particiones” o “Haciendo esquemas y particiones” que enfatizaba las particiones de colecciones de hasta 10 elementos pidiendo a los alumnos primero que elaboren diferentes maneras en que un número dado de pasajeros podían sentarse en los dos pisos del ómnibus. Van den Brink (1989), el creador del escenario del ómnibus, suponía que la necesidad de dividir aparece naturalmente una vez que se hace la distinción entre los pasajeros en el piso de arriba y en el piso de abajo. Más aún, en esta situación, soluciones tales como 6 y 2, y 2 y 6 cuentan como diferentes ya que significaban distinta acomodación de los pasajeros en el micro. Una vez que la práctica de generar distintas divisiones había surgido, planificamos introducir el contador como medio de mostrar el número de pasajeros en ambos pisos.

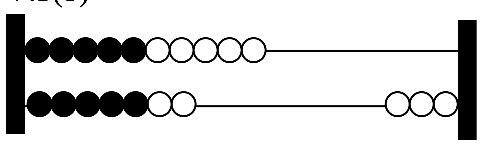
Las primeras actividades instruccionales, planificadas en la cual los niños usaron el contador involucraron el surgimiento de configuraciones (por ej. ¿Cómo podrías mostrar 15 personas en el micro?) y evaluar las configuraciones dadas. Nosotros anticipamos que las formas de razonamiento que involucraban agrupamientos, particularmente tomando 5 y 10, y dobles como puntos de referencia, podrían emerger como una práctica matemática. Hasta donde esto ocurriera, el contador estaría gradualmente constituido por la comunidad áulica como un instrumento numérico estructurado alineado con las intenciones de su diseñador. La interpretación de, por ejemplo, 5 cuentas rojas y 1 blanca en ambos cañitos como 10 y 2 serían por sí mismo evidentes y más allá de toda justificación.

El próximo juego de actividades que diseñamos antes que el experimento de enseñanza comenzara, tenía que ver con situaciones en las cuales los pasajeros subían y bajaban del ómnibus. Por ejemplo, luego de que los alumnos hubiesen mostrado 9 pasajeros en el micro, la maestra podría preguntar ¿cuántos pasajeros habrá en el micro cuando hayan subido 7 más? Nosotros anticipamos que, por la tarea modelo, algunos alumnos podrían mover primero 9 cuentas arriba y sumar 7 agregando 1 arriba y 6 abajo, ver figura 7.3(a). Desde la perspectiva del observador el uso de la estrategia de a 10 está implícita en esta solución (ej., 9 + 1 = 10, 10 + 6 = 16). También anticipamos que otros alumnos podrían primero mover 9 en la de arriba y luego mover 7 en la de abajo y entonces reconocer la configuración resultante como 7 y 7 es 14, y 2 es 16, ver figura 7.3(b). En este caso, una doble estrategia está implícita en la solución de los estudiantes. A esta altura, en la trayectoria de la conjetura, el contador funcionará como un modelo que posibilita un espectro más amplio de acontecimientos en el escenario del colectivo.

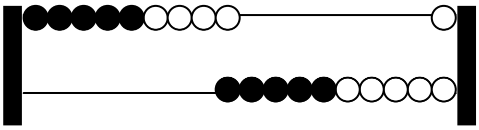
7.3(a)



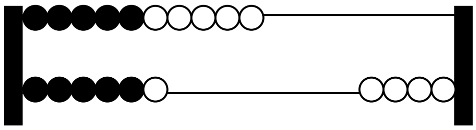
7.3(b)



7.3(b)



7.3(a)



El objetivo del próximo grupo de actividades era respaldar la aparición de relaciones aritméticas implícitas en el uso del contador por los alumnos como temas explícitos de conversación. Pensamos que esto haría posible que el contador se convirtiera gradualmente en un modelo para el razonamiento numérico. Para eso, visualizamos un escenario o ámbito en el cual maestro y alumnos podrían discutir la necesidad de desarrollar maneras de anotar su razonamiento con el contador para poder así comunicárselo a los otros. Las actividades subsecuentes consistirían en desarrollar y negociar simbolizaciones y el criterio clave sería que los otros chicos pudiesen entender cómo había sido resuelta la tarea. Este desarrollo anticipado, según di Sessa et al. (1991) busca conocer la importancia del conocimiento metarepresentativo. Además, imaginamos que el maestro jugaría un activo rol que podría incluir formas de simbolizar que coincidieran con la actividad del alumno. Por ejemplo, las maneras de razonar con el contador mostradas en las Fig.7.3a y 7.3b podrían ser simbolizadas como muestra la Fig. 7.4.

(a) 9 + 1 = 10

10 + 6 = 16

9 + 7 = 16

1 6

(b) 7 2

9 + 7

7 + 7 = 14

14 + 2 = 16

Fig. 7.4. Posibles formas de anotar las soluciones a 9 + 7 = mostradas en las fig. 7.3.a y 7.3.b.

Claramente el rol anticipativo del maestro sosteniendo el desarrollo de las formas en que los alumnos simbolizan e introduciendo maneras convencionales de simbolizar que encajen con su actividad involucra una tensión propia. En la actividad planificada como la imaginamos, las simbolizaciones del maestro constituirían aportes, pero sin la obligación de parte de los alumnos de imitarlas. En el análisis reportado por Bednarz et al (1993), las simbolizaciones que los alumnos desarrollaban combinaban varios símbolos convencionales (por ej., flechas, números) con otros símbolos inventados para comunicar sus métodos. Similarmente, según la RME, uno espera que las formas de simbolizar introducidas por el maestro podrían servir como una fuente que los alumnos podrían adaptar a sus propósitos. En el caso de la Secuencia de Estructuración de Números, por ejemplo, el intento máximo fue que los alumnos pudiesen llegar a razonar con simbolismos independientes del contador. Desde nuestro punto de vista, esa meta podría ser alcanzada solo en las prácticas matemáticas instauradas en el aula que implicaran el uso de estrategias flexibles de pensamiento para resolver una variedad de tareas aditivas.

Esta descripción del aprendizaje hipotético, trayectoria en términos de una secuencia anticipada de prácticas áulicas matemáticas dibuja una ruta a través de cuatro tipos de actividades resumidas en la Fig. 1. Por ejemplo, el punto de partida planificado para la trayectoria hipotética supone una actividad en el ámbito de un micro de dos pisos. Anticipamos que el razonar con el contador serviría como un modelo de actividad en este ámbito (ej. actividad referencial) pero que progresivamente tomaría vida en sí mismo y se volvería un modelo de razonamiento numérico (ej. actividad general). Supusimos que el desarrollo de formas de notación, jugaría un papel crucial en esta transición. En la trayectoria conjeturada, el tipo final de actividad mostrada en la Fig. 7.1. surgiría a medida que el razonamiento con relaciones numéricas tomara vida propia.

El diseño heurístico que hemos ilustrado, de modelos emergentes, implica la transición entre actuar con el contador como un **modelo de** un ámbito fenomenológico adecuado a actuar con el contador como un **modelo para** un razonamiento matemático más sofisticado. Nosotros deberíamos saber que esta heurística general provee una descripción relativamente cruda de un proceso complejo. Sin embargo, acordamos que es suficiente proveer una orientación para el diseño de secuencias instruccionales. También es importante enfatizar que la trayectoria de un aprendizaje conjeturado es justo eso, una conjetura. Aunque provea un sentido de dirección para la instrucción, es tentativo y potencialmente revisable. Siguiendo a Simon (1995), hemos argumentado que la relación entre la trayectoria de aprendizaje conjeturada y los juicios locales hechos en el aula mientras se hace una secuencia, es reflexiva. (Cobb, 1996; Gravemeijer, 1996). Por un lado, la trayectoria constituye el amplio, acompasado respaldo contra el cual los juicios locales se hacen. Por otro lado, la trayectoria conjeturada en sí misma se involucra como consecuencia de esas decisiones y juicios locales. Como una consecuencia, las trayectorias de aprendizaje actuales vividas en aulas están "intrínsicamente ligadas a historias que son vividas, mucho como senderos que existen solo a medida que se van transitando" (Varela, Thompson, & Rosch, 1991, p. 205). En otras palabras, aunque hay un intento instruccional abarcativo y una ruta conjeturada de cualquier punto, ambos están abiertos a revisión a medida que la trayectoria actual de aprendizaje se realiza en interacción en el aula. En este sentido, el proceso de llevar a cabo un secuencia instruccional ilustra el proceso de registros, discutido por Nemirovsky y Monk (cap. 6, este volumen).

Como una observación final, enfatizamos nuevamente que la trayectoria de aprendizaje conjeturada es dada en los términos colectivos de las prácticas matemáticas áulicas. Con referencia a esto, el foco está en el desarrollo matemático de la comunidad áulica más que la de cualquier alumno en particular. Por supuesto, esto no implica que los alumnos aprenderán en modo uniforme *(lockstep).* En su lugar, los alumnos hacen una variedad de interpretaciones matemáticas cualitativamente distintas aunque ellos participen de las mismas prácticas matemáticas áulicas. (Cobb & Yacket, 1996). Por lo tanto deberíamos acentuar que las observaciones de las actividades individuales de los alumnos informa el proceso de revisar la trayectoria de aprendizaje conjeturado a medida que una secuencia instruccional es vivida en el aula. (Simon, 1995). Más aún, las trayectorias individuales de aprendizaje de los alumnos pueden ser delineadas analizando el desarrollo de sus razonamientos a medida que ellos participan en las envolventes prácticas matemáticas áulicas. Visualizando simultáneamente la actividad individual matemática de los alumnos como actos de participación, el análisis necesariamente localiza sus aprendizajes en el contexto social del aula.

El experimento áulico de enseñanza de estructuración de números

La secuencia de Estructuración de Números era una de las dos secuencias instruccionales vividas durante un experimento de enseñanza de 3 meses en un aula de primer grado. El grupo estaba integrado por 7 niños y 11 niñas, la mayoría de los cuales eran de clase media o clase media alta. La maestra con la que colaborábamos, Srta. Smith, valoraba el razonamiento de sus alumnos y deseaba desarrollar aún más un acercamiento instruccional que capitalizara sus contribuciones. El material generado durante el experimento comprendía entrevistas individuales con los 18 niños videograbadas en setiembre, diciembre y enero, grabaciones en video de entrevistas adicionales con 10 niños en noviembre, grabaciones en video de 47 clases de matemática, copias de todos los trabajos escritos de los alumnos, y tres juegos de notas de campo diarias.

La primera secuencia instruccional puesta en práctica en el experimento de enseñanza fue llamada Modelos y Particiones. La racionalidad para esta secuencia se basa en la investigación que indica que el uso del contador para agrupar cuentas **en lugar de para contar cuentas** es en sí mismo un logro para niños pequeños. Las actividades instruccionales en la secuencia Modelos y Particiones enfocaba el uso de los esquemas de dedos flexiblemente, al evaluar configuraciones de hasta 10 elementos sin contar (por ej., por esquematización o reconocimiento de patrones) y generando diferentes particiones de colecciones de hasta 10 elementos (por ej., una colección de láminas de 8 elementos visualizada como 7 y 1, 6 y 2, etc.). Este último tipo de actividad instruccional sirvió como un precursor para la actividad del micro de dos pisos que fue el punto de partida para la secuencia de N.

Un análisis detenido del experimento de enseñanza (Whitenack, 1995) indicó que la mayoría de los 18 alumnos actuaron en un medio o ámbito que estaba estructurado por relaciones entre números hasta 20. Conducimos este análisis primero para documentar las normas sociales y sociomatemáticas del aula y luego para describir la trayectoria real de aprendizaje percibida en el aula.

Normas sociales y sociomatemáticas

Las normas sociales y sociomatemáticas son aspectos centrales de la microcultura áulica dentro de las cuales se vivencian las secuencias instruccionales. La microcultura establecida en el aula de la Srta. Smith era una en la cual se valoraban y respetaban interpretaciones alternativas. Las normas sociales generales que ella negoció con sus alumnos incluían expectativas de que:

1- Los alumnos explicarían y justificarían sus pensamientos cuando contribuyeran a discusiones de toda la clase.
2- Los alumnos escucharían los aportes realizados por sus compañeros.
3- Los alumnos avisarían cuando no entendieran una explicación o un aporte de un compañero y harían preguntas clarificadoras.

Como estas tres normas indican, la microcultura áulica enfatizaba la participación activa e intentos de comprensión por parte de los alumnos. En contraste con estas normas generales sociales del aula, las normas sociomatemáticas son específicas para normar aspectos de la actividad matemática de los alumnos (Yackel & Cobb, 1996). La norma sociomatemática que fue re-negociada a lo largo del experimento matemático fue la de qué era lo que contaba como una solución matemática distinta. La Srta. Smith respondió diferenciadamente a las contribuciones de los alumnos, indicando que ella particularmente valoraba las soluciones de no-conteo, que ella y sus alumnos convinieron en llamar “formas de agrupar”. Un análisis detallado del rol de la maestra en respaldar activamente los aprendizajes matemáticos de sus alumnos, indica que éste era un aspecto importante de su efectividad como maestra de una reforma (McClain, 1995). Particularmente, las normas sociomatemáticas establecidas por la Srta. Smith y sus alumnos posibilitaron a los alumnos ser conscientes de formas más sofisticadas de razonamiento matemático, haciendo por lo tanto posible que sus esfuerzos en la resolución de problemas tengan un sentido de direccionalidad. (Voigt, 1995). Persiguiendo esto, sin embargo, la Srta. Smith continuó aceptando y solicitando activamente soluciones de conteo a los alumnos que ella consideraba que no eran aún capaces de desarrollar soluciones por agrupamiento. Esto aseguraba que todos los alumnos tenían formas de participar activamente en las comprometidas prácticas matemáticas en el aula.

Como consecuencia del rol de la maestra en guiar el desarrollo de las normas sociomatemáticas, varios tipos de soluciones por conteo que los investigadores hubieran juzgado como distintas (por ej. contando todo contra seguir contando a partir de un cantidad dada) no fueron juzgadas como diferentes en este aula. Al contrario de eso, la maestra y sus alumnos sí diferenciaron entre varios tipos de soluciones de agrupamiento o de estrategias de pensamiento. Estas soluciones fueron juzgadas como diferentes si involucraban (a) distintas interpretaciones cuantitativas (ej. una tarea interpretó 6 + - =14 con preferencia a 14 – 6 = -), o (b) diferentes procesos de cálculo de manera que entidades numéricas fueran descompuestas y compuestas de distintas maneras (ej. soluciones que usaban dobles y 10 como punto de referencia debían ser juzgadas como diferentes.). Como había sido argumentado en alguna otra parte, lo que cuenta como una explicación matemática diferente puede diferir marcadamente de un aula a otra y puede influir profundamente las comprensiones matemáticas que los alumnos desarrollen. (Yackel y Cobb, 1996)

***Documentando la trayectoria de aprendizaje en sí misma. La evolución de las prácticas matemátic*as**

Nuestra meta al describir la evolución de las prácticas áulicas de matemáticas es documentar la secuencia instruccional como fue vivida en el aula y el aprendizaje de la comunidad áulica.

En general, las prácticas matemáticas áulicas avanzan mientras la maestra y los alumnos discuten problemas y soluciones e involucran medios de simbolizar, discutir y validar en situaciones con tareas específicas (Balacheff, 1990). El análisis de la enseñanza de secuencias de Estructuración de Números en experimentación incluía delinear las siguientes cinco prácticas:

1- Hacer configuraciones en el contador.
2- Describir configuraciones en términos de cincos, dieces, y dobles
3- Razonar en términos de grupos mientras se resuelven tareas (problemas) de suma y resta.
4- Razonar en términos de relaciones numéricas para construir y evaluar configuraciones.
5- Razonar numéricamente para resolver tareas de suma y resta.

Práctica matemática 1: Hacer configuraciones en el contador. Los alumnos participaron en la práctica matemática inicial contando cuentas de a uno o moviendo grupos de cuentas para mostrar un número dado de gente en el micro de dos pisos. Durante las discusiones de sus soluciones, un número creciente de alumnos comenzaron a describir las configuraciones resultantes en términos de grupos. Por ejemplo, alumnos que habían contado, digamos, siete cuentas individuales en un cañito algunas veces explicaban que ellos habían movido primero cinco y luego dos cuentas más, o que ellos habían movido un grupo de siete cuentas. En estas instancias, los alumnos parecían re-conceptualizar su actividad anterior cuando ellos se referían a las cuentas para explicar lo que ellos habían hecho. Como era dado esperar, algunos alumnos continuaron describiendo sus acciones en términos de contar de a uno. Aunque la Srta. Smith aceptaba estas explicaciones lo mismo que las que involucraban agrupamiento, ella y sus alumnos implícitamente negociaban que las soluciones por agrupamiento eran más eficientes y por lo mismo más valoradas.

Un aspecto importante de estas discusiones iniciales era que, más que pedir a los alumnos que explicaran como habían hecho ellos realmente sus configuraciones, la maestra les pedía que describieran las configuraciones que mostraban en sus contadores. Haciendo esto, ella iniciaba intercambios que se focalizaban en formas de interpretar la actividad con el contador más que en las secuencias específicas de acciones que los alumnos habían efectuado. Esto servía para resguardar contra la posibilidad de que el uso del contador pudiera llegar a ser automatizado.

Un intercambio que ocurrió durante la segunda semana de la secuencia y en el segundo día en que los alumnos usaban los contadores para ilustrar la variedad de sus soluciones. Durante este episodio en particular, la maestra y los alumnos discutieron cómo se podrían mostrar ocho personas sentadas en el micro de dos pisos. La discusión comenzó cuando la Srta. Smith preguntó a una de las alumnas, Amy, quien explicó que la configuración que ella había hecho era "cuatro y cuatro". Al redescribir la solución de Amy, la maestra habló como si Amy hubiese hecho dos grupos de cuatro intencionalmente.

> Amy dijo que ella había mostrado un grupo de cuatro arriba y un grupo de cuatro abajo porque un grupo de cuatro y otro grupo de cuatro hacen ocho en el micro. Levanten la mano si alguien lo mostró de la misma forma que Amy.(Varios alumnos levantaron sus manos). Bien, bajen sus manos

Siguiendo este intercambio, otro alumno, Casey, ofreció una solución diferente en la cual él mostraba ocho como cinco arriba y tres abajo. El explicó, "Cinco más tres… bien, tiene cinco (hace cinco con los dedos) seis, siete y ocho (cuenta mientras levanta tres dedos de la otra mano)." La Srta. Smith redescribe entonces la explicación de Casey:

> Casey lo pensó como que tenía los ocho abajo pero como un grupo de cinco y tres (primero señala a las cinco cuentas y luego a las tres en un contador proyectado en la pantalla)

Al redescribir la explicación de Casey, la maestra parecía inferir que el pensó a ocho como cinco y tres antes de hacer su configuración. Lo mismo que con el intercambio anterior con Amy, ella parecía interpretar la solución de Casey como una que suponía agrupamiento. En contraste, cuando otros alumnos explicaron que habían contado de a uno, ella **no** redescribió sus soluciones en términos de anticipaciones previas.

Mediante discusiones como éstas, la maestra y los alumnos negociaron que las soluciones por agrupamiento eran especialmente valorizadas y que estas soluciones incluyen mover grupos de cuentas más que el contar cuentas individualmente. Más aún, la forma en la que la maestra imprimía intencionalidad a las explicaciones de los alumnos afianzaba el desarrollo de estos tipos de soluciones y servía para ilustrar su rol activador en esta aula. Sin embargo, debemos destacar que ella no obligaba a los alumnos a solucionar sus tareas de esta forma. Ella los alentaba a participar de la manera que tenía sentido para ellos y continuaba aceptando soluciones por conteo. No vimos indicaciones de que los alumnos estuvieran intentando imitar formas más sofisticadas de razonamiento.

Práctica matemática 2: Describir configuraciones en términos de cincos, dieces y dobles. A medida que la maestra y sus alumnos continuaban discutiendo soluciones que involucraban hacer o evaluar configuraciones, las explicaciones en las cuales los niños se referían a grupos de cinco y diez y, ocasionalmente, a dobles, surgían como una práctica matemática distintiva. Aunque habíamos anticipado esta transición cuando formulamos la trayectoria de aprendizaje hipotético, no especificamos las maneras diversas en las que los alumnos podrían participar en esta práctica. Por ejemplo, en una práctica llamada Bingo Rack algunos alumnos contaron todas las cuentas en una configuración mostrada por la maestra. Pudieron reconocer 5 cuentas de un color como "cinco" después que habían contado, pero esto parecía significar un modelo figurativo específico más que una cantidad numérica. En contraste, otro alumno primero contó cinco cuentas de un color y luego razonó en términos de grupos para evaluar toda la configuración. Para los alumnos, el resultado del conteo aparecía más como una cantidad numérica que como un modelo figurativo. Finalmente, el resto de los alumnos no contaron para nada sino que razonaron en términos de grupos, algunas veces describiendo sus soluciones en términos de imaginar la actividad de crear grupos de cinco de cuentas de diferentes colores (por ej., tres rojas y dos blancas en diferentes cañitos.).

El siguiente episodio, que tuvo lugar en la cuarta semana de la secuencia instruccional, ilustra aún más las distintas maneras en que los alumnos explicaban sus razonamientos. Cuando comenzó el episodio, la maestra mostró brevemente una configuración de cinco cuentas arriba y ocho abajo. Luego llamó a uno de los alumnos, Donald:

Donald: Yo vi trece porque vi cinco más cinco y se que hacen diez.

Maestra: Sí.

Donald: ...y agrego tres más. Cuando tuve diez lo puse todo, y agregué los otros números para hacer como uno, dos, tres (hace un movimiento horizontal con su mano) y llegué a trece.

Las explicaciones de agrupamientos de este tipo parecían ser fácilmente comprensibles para la mayoría de los alumnos y no necesitar más justificación. A esta altura del experimento, era bastante común que los alumnos explicaran que cinco y cinco hacían diez, o que diez y tantos más hacían… No decimos que todos los alumnos interpretaban las configuraciones de la misma forma. Como hemos indicado, aunque estas maneras de describir configuraciones habían llegado a ser una forma de práctica áulica, los alumnos hacían una variedad de interpretaciones cualitativas distintas mientras participaban en esta práctica. Por lo tanto enfatizamos que las prácticas matemáticas que tuvimos identificaron focos del desarrollo de la comunidad áulica documentando los cimientos evolutivos compartidos para la comunicación. Uno de los desafíos al analizar la trayectoria real de aprendizaje de una comunidad áulica es documentar las diferentes maneras en que los alumnos participan individualmente.

Por eso, hemos indicado que la práctica de hacer configuraciones en el contador evoluciona en la práctica de describir configuraciones en términos de cincos, dieces y dobles. En esta transición, aspectos de la actividad de los alumnos que estaban implícitos cuando participaron en la primera práctica se volvieron explícitos en la segunda práctica. Esto es, el razonamiento en términos de grupos emergió de la actividad inicial de los alumnos de hacer configuraciones en el contador. Para respaldar esta transición, hemos indicado el rol de soporte crucial del maestro junto con las actividades de enseñanza. El juego del Bingo en el contador fue particularmente importante para respaldar el cambio del conteo al agrupamiento en la manera eficaz de enumerar configuraciones surgidas como útiles para la tarea a realizar- principalmente llenar los cartones de Bingo.

Práctica matemática 3: Razonar en términos de grupos mientras se resuelven tareas (problemas) de suma y resta. Como hemos visto, la segunda práctica matemática involucraba razonar en términos de grupos para evaluar una configuración dada. La tercera práctica matemática surgía como una extensión natural cuando los alumnos resolvían tareas aditivas y substractivas presentadas en el ámbito del micro de dos pisos. En el caso de tareas aditivas, la tercera práctica involucraba mostrar primero el número inicial de pasajeros que subieron al micro moviendo cuentas arriba y abajo, respectivamente. La mayoría de los alumnos razonaron luego en términos de cinco, dieces y dobles, para evaluar la configuración resultante. Por ejemplo, cuando se les pedía averiguar cuánta gente estaba en el colectivo si inicialmente venían 8 pasajeros y subieron 7, muchos estudiantes movieron las 8 cuentas al alambre superior y pusieron 7 en el inferior. Algunos evaluaron esta configuración razonando que 8 y 2 hacían 10 y 5 más eran 15. Otros explicaron que dos cincos (uno del piso de arriba del micro y otro del piso de abajo) hacían 10, y 5 eran 15. Aunque esta práctica no constituyó una práctica superior sobre la anterior, su significado aparece cuando discutimos el surgimiento de las prácticas subsiguientes.

Práctica matemática 4: Razonar en términos de construcción de relaciones numéricas y configuraciones *evaluativas*. La cuarta práctica matemática surgió cuando los estudiantes continuaron resolviendo tareas de suma y resta, situados en el ámbito del micro de dos pisos. Significó un cambio entre mover las cuentas arriba y abajo y luego evaluar la configuración resultante a crear configuraciones flexibles haciendo agrupamientos que facilitaban la enumeración. En otras palabras, aunque los alumnos habían participado en la tercera práctica razonando en términos de agrupamientos que ellos habían establecido, participaron en la cuarta práctica anticipando activamente configuraciones de cuentas que facilitarían el enumerar la colección. Más aún, aunque los grupos habían estado a mano cuando se evaluaban configuraciones, ahora aparecían a mano relaciones numéricas como cuando se hacían configuraciones. Por ejemplo, en vez de resolver la tarea correspondiente a 8 + 7 moviendo ocho cuentas arriba y siete abajo, algunos alumnos movían ocho y dos más arriba y luego cinco abajo porque anticipaban que esto sería más fácil de evaluar. Desde nuestra perspectiva de observadores, la actividad de estos estudiantes con el contador parecía incluir una estrategia de ir a través del diez. Como vemos más tarde, la manera como la maestra anotaba el razonamiento de los alumnos jugó un papel importante para posibilitar la aparición de la cuarta práctica matemática

Para clarificar este cambio en la práctica matemática, consideramos un episodio que ocurrió durante la quinta semana de la secuencia de Estructuración de Números. En este episodio, la Srta. Smith escribió la secuencia numérica 6 + 7 en la pantalla y pidió a los alumnos que determinaran el número de personas a bordo del micro. La mayoría de los alumnos usaron el contador para resolver esta tarea. En la discusión siguiente, una alumna, Kendra, explicó su respuesta de 13 como sigue:

> Porque yo sé que seis más seis es doce y yo sé eso, yo sé que siete más siete es catorce y trece está entre medio entre… entre doce y catorce por lo tanto pienso que sería trece.

Kendra no parecía referirse a sus acciones con el ábaco cuando dio esta explicación. Sin embargo, cuando la maestra reescribió la explicación de Kendra, se volvió al proyector y usó una versión anterior del contador para mostrar una configuración de seis arriba y siete abajo, y luego continuó:

> Kendra pensó en algo que ella sabe, seis más seis… un grupo de seis y seis es doce (mueve una cuenta de abajo para mostrar seis y seis) y ella sabe que un grupo de siete y siete es catorce (mueve una cuenta arriba y una abajo para hacer siete en ambos) y catorce, por lo tanto ella tenía seis y siete que harían trece (mueve una cuenta de arriba sacándola).

A medida que ella hablaba, la maestra anotaba sus acciones con el contador, escribiendo 6 + 6 = 12, luego 7 + 7 = 14 debajo, y finalmente 6 + 7 = 13 entre las dos primeras oraciones. (Ver Fig. 7 5 a).

Mientras que la discusión continuaba, otros dos alumnos explicaron que ellos habían resuelto la tarea de forma diferente. La primera alumna, Leigh, explicó que ella había movido seis arriba y siete abajo y luego evaluó la configuración resultante para llegar al 13 como respuesta.

> Y yo vi que (habría) hecho 10 (refiriéndose a los dos cincos en ambos alambres) y uno haría once (refiriéndose a la cuenta blanca en el alambre de arriba) así que estos dos (dos cuentas blancas de abajo) harían 13.

a) 6 + 6 = 12

6 + 7 = 13

7 + 7= 14

b) 6 + 7

5 1 5 2

5 + 5 = 10
10 + 1 = 11
11 + 2 = 13

c) 6 + 7

3 3

7 + 3 = 10
10 + 3 = 13

Fig. 7.5. Modos de anotar (a) el de Kendra. (b) el de Leigh (c) el de Donald.

Aunque la maestra redescribió esta solución usando el contador encima de su cabeza, no lo anotó escribiendo un cálculo. Significativamente, como Leigh más que anticipado una configuración, había hecho primero una configuración y luego la había evaluado, habría sido engorroso de anotar (una posible manera de anotar esta solución está mostrada en Fig. 7.5b). Así, al anotar la Srta. Smith algunas soluciones y otras no, sostenía el desarrollo de soluciones anticipativas e implícitamente indicaba que estas soluciones eran particularmente valoradas. Además, su anotación estimulaba a los alumnos a interpretar su actividad con el contador en términos de relaciones numéricas más que de agrupamiento de cuentas.

El tercer alumno en dar una explicación, Donald, no se refirió al contador y en cambio dijo: *"Pienso que es 13 porque um…, porque um…, yo fui hasta siete y saqué tres de los seis y eso me dejó con tres por eso yo sé que… diez más tres es… 13."* La maestra anotó su solución como se muestra en Fig. 7.5c. En contraste con Leigh, Donald describió su actividad con el contador en términos de relaciones numéricas que parecían estar bien a mano para él. Al anotar su solución, la maestra posibilitó que la estrategia implícita en su razonamiento de pasar por el diez, pasara a ser un tópico explícito de conversación.

Resumiendo, cuando emerge la cuarta práctica matemática, el foco de la discusión pasó de evaluar configuraciones ya establecidas a describir formas anticipativas de actuar con el contador en términos de relaciones numéricas. Así, aunque la mayoría de los alumnos había pensado previamente al seis como cinco y uno más, ésta y otras relaciones estaban ahora a mano para resolver sus tareas.

Práctica matemática 5: Razonar numéricamente para resolver tareas de suma y resta. Aunque los alumnos hablaban de relaciones numéricas mientras participaban en la cuarta práctica matemática, aparecían imágenes de estar actuando con el contador, implícitas en muchas de sus explicaciones. En contraste, los alumnos no se apoyaban más en esta imagen para hacer sus razonamientos cuando participaron en la quinta práctica matemática. Las relaciones numéricas que habían anticipado previamente cuando hacían configuraciones en el contador, tenían ahora vida propia cuando los alumnos resolvían tareas o posicionados en distintos ámbitos, razonando con notaciones escritas.

Ilustramos este giro final en las prácticas matemáticas examinando un episodio que ocurrió al final de la secuencia instruccional. En este episodio, la maestra propuso una tarea correspondiente a 8 + 9 = -----. Primero Jordan explicó que él había contado dos cuatros de nueve. Otros alumnos explicaron sus soluciones, que fueron redescriptas por la maestra y anotadas como se muestra en la Fig. 7.6.

(a) 8 + 9

1 7

9 + 1 = 10
10 + 7 = 17

(b) 8 + 8 = 16
8 + 9 = 17

(c) 9 + 9 = 18
8 + 9 = 17

(d) 8 + 8 = 16
8 + 9 = 17
9 + 9 = 18

(e) 8 + 9

2 7

8 + 2 = 10
10 + 7 = 17

Fig. 7.6 Anotaciones de la Srta. Smith para (a) Bob, (b) Karen, (c) Amy, (d) Leigh y (e) Joseph.

Maestra: Bien. Gracias. Jordan dijo que él lo hizo contando… ¿Alguien lo resolvió de otra manera? ¿Bob?
Bob: Yo sé que si tomamos uno, si tenía nueve y luego…más ocho y luego sacamos uno de ocho y lo ponemos con el nueve nos quedan siete y eso hace 17 (anotado como figura en la Fig. 7.6.a)
Maestra: ¿Entendieron lo que dijo Bob? ¿Tiene sentido? ¿Alguien lo hizo de otra manera? ¿Karen?
Karen: Yo sé que si ocho más ocho es dieciséis y tengo uno más, es diecisiete (anotado como figura en Fig. 7.6.b).

Estas explicaciones indican que Karen ha usado dobles como referencia mientras que Bob ha usado el diez como referencia. La discusión continuó como sigue:

Maestra: ah, Amy, ¿otra forma?
Amy: Yo pensé que nueve más nueve es dieciocho y que si yo tenía ocho más nueve sería diecisiete (anotado como figura en la Fig. 7.6.)
Maestra: (Redescribe el método de solución de Amy) ¿Otra forma, Leigh?
Leigh: Yo pensé que ocho más ocho es dieciséis y nueve más nueve es dieciocho así que, um… yo pensé que estaría en el medio, así que nueve más ocho debía ser diecisiete. (Anotado como en Fig. 7.6d)
Jose: Um…, yo tenía como ah!, yo saqué nueve. Quiero decir yo tomo, yo saqué dos del nueve y los puse con el ocho y eso haría diez y yo tenía siete más (inaudible) (Anotado como muestra la Fig. 7.6.e)
Maestra: Bien. Joseph estaba haciéndolo hasta diez, el rompió el nueve en vez del ocho y usó el dos para ir con el ocho para hacer que ocho y dos es diez, y diez más siete, que él había dejado, hacen diecisiete. (Señala la anotación en el pizarrón registrando el método de solución de Joseph).

El hecho de que ninguno de los alumnos reiteró una solución que ya había sido explicada indica que las sutiles diferencias entre las variadas soluciones fueron tomadas como compartidas. Más aún, para evitar repeticiones, los alumnos deben haber estado monitoreando las contribuciones de sus compañeros y diferenciándolas de sus propias soluciones (cf Yackel & Cobb, 1996). Las anotaciones de la maestra sostenían este proceso ofreciéndoles registros de soluciones explicadas previamente.

Para investigar las formas de anotaciones que los alumnos habían desarrollado, a medida que participaban en intercambios tales como los ilustrados en los episodios ejemplificados, la maestra les pedía que hicieran registros de sus pensamientos cuando ellos resolvían tareas individualmente así sus compañeros podían entender sus razonamientos. El desafío de simbolizar sus pensamientos probó ser relativamente fácil para la mayoría de los alumnos. Cuatro simbolizaciones de alumnos de una tarea de 8 + 6 se muestran en la Fig. 7.7. Como puede verse, solo las anotaciones del primer niño están completamente de acuerdo con las de la maestra. Los otros tres niños han adaptado aspectos de las anotaciones de la maestra de formas originales. Esto sugiere que aunque los niños entendieron las redescripciones de sus soluciones que hizo la maestra, ellos no estaban obligados a copiar su manera de anotarlas sino que podían inventar anotaciones que respaldaran y expresaran sus razonamientos.

Nuestro análisis de esta quinta práctica matemática refleja el reclamo de que el razonamiento con cantidades numéricas se ha institucionalizado en el experimento áulico de enseñanza al final de la secuencia de enseñanza. Esto, por supuesto no es para decir que los alumnos interpretaron y resolvieron tareas de maneras idénticas. Aunque el razonamiento numérico era rutinario para la mayoría de los alumnos, algunos participaron en la quinta práctica numérica usando el contador como una necesidad para contar. El intercambio con Jordan en el episodio del ejemplo, indica que la Srta. Smith continuaba aceptando una amplia gama de explicaciones mientras indicaba que las soluciones con estrategias de pensamiento eran particularmente valoradas. Por eso los alumnos participaban y contribuían a la evolución de las prácticas matemáticas que constituían la situación social de sus desarrollos en formas diversas y significativamente personales.

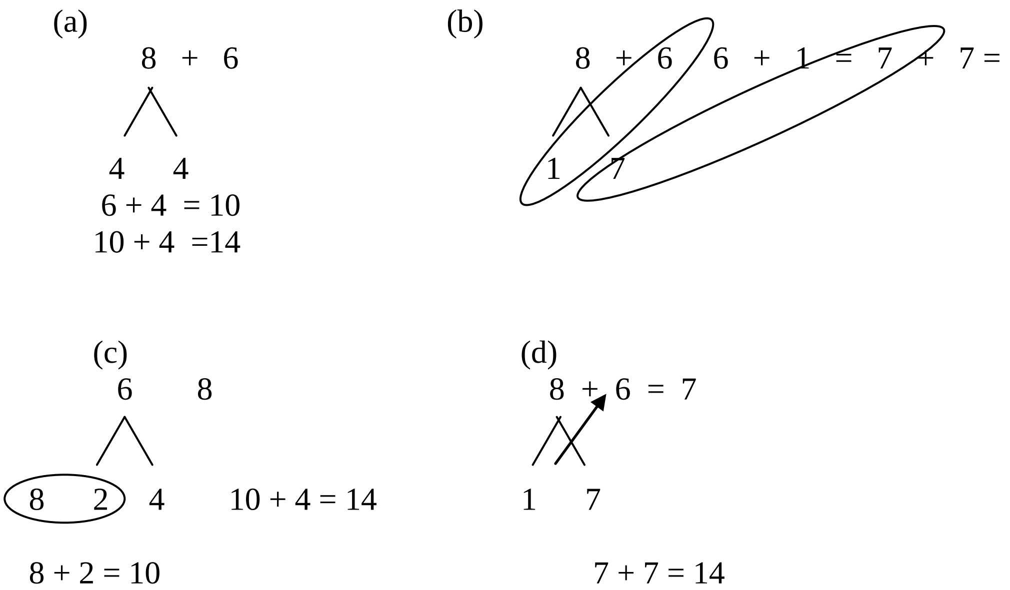


Fig. 7.7. Simbolizaciones de los alumnos de sus razonamientos cuando resolvieron una tarea correspondiente a 8 + 6.

Reflexión: Simbolización y el surgimiento de un entorno matemático

El análisis de las prácticas matemáticas áulicas indica que muchas de las conjeturas que formulamos cuando diseñamos la trayectoria hipotética de aprendizaje probaron ser viables cuando dirigíamos el experimento de enseñanza en colaboración con la Srta. Smith. Sin embargo, el análisis clarifica tanto la diversidad de razonamiento matemático individual de los alumnos como el proceso de desarrollo matemático colectivo de la comunidad áulica. Con respecto a este último tema, el análisis también ilustra los cuatro nivele de actividad mostrados en la Fig. 7.1. Inicialmente, los alumnos actuaron en el ámbito de la tarea cuando ellos y la maestra representaron el ascenso y descenso del micro de dos pisos. Como contraste, las tres primeras prácticas matemáticas incluyeron actividad referencial en la cual el uso del contador fue institucionalizado como un modelo de actividad en el ámbito del micro de dos pisos. La cuarta práctica matemática incluyó actividad general en la cual el uso del contador fue institucionalizado como un modelo para el razonamiento numérico. Finalmente, la quinta práctica matemática incluyó razonamiento con relaciones numéricas sin el apoyo del contador.

Esta trayectoria de aprendizaje ejemplifica la contestación de Freudenthal (1991) de que “las matemáticas deberían comenzar y permanecer dentro del sentido común”. Freudenthal intentaba que este adagio fuera interpretado dinámicamente y argumentaba que el sentido común no es estático. El aclaró, por ejemplo, que lo que es sentido común para un matemático difiere significativamente de lo que es sentido común para una persona lega. Además, él enfatizó que el sentido común evoluciona en el curso del aprendizaje. Por eso, en la primera fase de la trayectoria de aprendizaje propiamente dicha, el viajar en un micro de dos pisos fue establecido como una actividad de sentido común. Al final del experimento de enseñanza, el actuar en un entorno estructurado en términos de relaciones numéricas había llegado a ser sentido común. Freudenthal clarificó más aún su posición sustituyendo el término realidad por sentido común: “Yo prefiero usar el término “realidad” a eso que en un cierto momento el sentido común se experimenta como real” (Freudenthal, 1991, p.17). Este uso del término *realidad* en la Educación Matemática Realística (RME) es altamente compatible con la metáfora ambiental de Greeno (1991) y enfatiza que el destino supremo del diseño matemático es el de respaldar la emergencia gradual de una realidad matemática áulica tomada como compartida.

A través del análisis, hemos enfatizado el rol crucial que la simbolización jugó en la evolución de las prácticas áulicas matemáticas y por lo tanto, en la emergencia de la realidad matemática. Las maneras de simbolizar que establecieron la maestra y sus alumnos en realidad constituyeron una cadena de significación (Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain, & Whitenack, 1997; Walkerdine, 1998; Whitson, 1997). El componente básico de una cadena de significado es un signo, donde un signo es pensado como una relación semántica entre significante y significado. Un nuevo eslabón en la cadena se establece cuando un signo en sí mismo se vuelve el significado para un nuevo significante. La cadena de significación establecida durante el experimento de enseñanza se muestra en la Fig. 7.8.

Pasajeros del
micro de dos pisos ------significado 1

significado 2

Cuentas o dedos ---------significante 1 significado 3

Notaciones no
estándares ---significante 2

Notaciones
convencionales ---significante 3

Fig. 7.8 La cadena de significación que emergió durante el experimento de enseñanza.

En la fig. 7.8, el signo 1 consiste en la relación semántica entre significado 1 (la distribución de pasajeros en el micro de dos pisos) y el significante 1 (las cuentas en los dos cañitos del contador). Este signo subsecuentemente se vuelve el significado 2 para las notaciones no estándares que la Srta. Smith inicialmente introdujo (significante 2), y la relación semántica entre ellos constituyó el signo dos. También podemos visualizar que el signo 2 podría convertirse en el significado 3 para formas de notación más convencionales (significante 3).

Es importante destacar que esta cadena de significación emergió a medida que evolucionaban las prácticas matemáticas áulicas. Como notó Walkerdine (1988), significantes como el contador y notaciones informales se establecieron inicialmente como sustitutos de términos precedentes, con la condición que el significado de esos términos sería preservado a través de los eslabones de la cadena. Sin embargo, Walkerdine continuó argumentando que una combinación original de signos (por ej. distribución de pasajeros en un micro de dos pisos/ cuentas en los dos cañitos del contador) no está meramente disimulada detrás de significantes sucesivos. En cambio, el significado del signo evoluciona a medida que se constituye la cadena. La contención fundamental de Walkerdine era que una combinación de signos que origina una práctica particular se desliza bajo subsiguientes significantes que se originan en otras prácticas motivadas por diferentes incumbencias e intereses. En el caso de la secuencia de Estructuración de Números, el signo 1 estaba constituido inicialmente por un corto relato de pasajeros que viajaban en un micro de dos pisos. La incumbencia e interés en la primera práctica matemática era el uso del contador para mostrar como se sentarían los pasajeros del micro. Más tarde, a medida que los alumnos participaban en la Práctica 5, la incumbencia e intereses fueron primariamente matemáticos e involucraba razonamiento en término de relaciones numéricas.

Esta cadena de signos deslizándose bajo sucesivos significantes proporciona un análisis semántico del proceso de matematización que ocurrió durante el experimento de enseñanza. El aspecto crucial de este análisis para nuestros propósitos es que el proceso de un signo deslizándose bajo un significante corresponde a la transición del ***modelo de / al modelo para*** que es central a la RME. Esta correspondencia ilustra que la RME es una teoría de diseño que proactivamente explota la constitución de procesos semióticos como medio de respaldar los procesos de desarrollo matemático de los alumnos. Más aún, la perspectiva de Walkerdine (1988) enriquece la teoría del diseño. Por ejemplo, hemos visto que formulando una trayectoria de aprendizaje conjeturada, cuando planificamos una secuencia instruccional, involucra, en parte, especificar posibles transiciones de un *modelo de / a un modelo para*. El trabajo de Walkerdine enfatiza la importancia de localizar estas transiciones en un contexto social, considerando las prácticas posibles dentro de las cuales podrían originarse actos de significación o modelado.

Resumiendo nuestro intento de describir la evolución de prácticas matemáticas en un aula ha sido para documentar el desarrollo matemático de una comunidad áulica durante un extenso período de tiempo. Al reflexionar sobre el análisis, hemos traído procesos semióticos de simbolización y modelado a la superficie.

Visualizado de esta forma, la negociación de la manera de modelar, no estaba separada de las prácticas matemáticas áulicas sino que era un aspecto central de su evolución. Por lo tanto seguimos a Meira (1995) al enfatizar que el significado de las simbolizaciones no puede ser separado de la actividad de simbolización (e.f Lesh & Doerr, cap. 10, y Nemirovsky & Monk, cap.6, este volumen). En la próxima sección de este capítulo, nos dirigimos a la pregunta de cómo los significados simbólicos colectivos evolucionan en términos más generales razonando casos desde la historia de las matemáticas.

UNA PERSPECTIVA MÁS AMPLIA DE SIMBOLIZACIÓN Y SIGNIFICADO

Como la discusión de la secuencia de Estructuración de Números lo aclara, la simbolización no está restringida al razonamiento con simbolizaciones matemáticas convencionales, sino que también incluye inventar (y, en algunos casos re-inventar) sistemas de símbolos alternativos. En la historia de las matemáticas, el desarrollo de estos dos tipos de simbolización pueden ser vistos como dos aspectos de un único proceso. Por un lado, las simbolizaciones convencionales fueron establecidas como formas culturalmente aceptadas de comunicar ideas matemáticas. Por el contrario, las simbolizaciones recientemente inventadas surgieron a medida que los matemáticos se esforzaron por desarrollar nuevas ideas y entendimientos. Estos nuevos caminos, a su turno, a menudo cuestionan maneras de razonamiento y simbolización predominantes. En consecuencia, las formas estándar de simbolización frecuentemente se vuelven tema de un proceso de análisis, reflexión y matematización. Primero, los significados de las simbolizaciones recientemente inventadas estuvieron íntimamente conectadas con los ámbitos de los cuales ellas derivaban. Más tarde, esta conexión gradualmente se movió dentro del entorno y las nuevas simbolizaciones comenzaron a ser interpretadas separadas de sus ámbitos/contextos originales. Como consecuencia, los símbolos comenzaron a desarrollar significado dentro de un contexto más amplio de la actividad matemática. Como Bednarz et al (1993) notó, Descartes y Leibniz acentuaron una de estas dos fases generales en el proceso matemático.

Para Descartes, las conexiones entre simbolizaciones y el ámbito del cual ellas derivaban eran críticas. En su opinión, el valor de la simbolización era para "rastrear el razonamiento en una forma sucinta" (Bernarz et al, 1993). Leibnitz, por el contrario, enfatizaba el uso de simbolizaciones que surgían de sus orígenes. Para él, la función asociada con la escritura simbólica "no solo ayuda al razonamiento, lo reemplaza. En realidad, libera a la mente de "pensar" los conceptos que maneja, sustituyendo el calcular por el razonar, el signo para la cosa significada" (Corturat citado por Bednarz et al, 1993). Esta visión resalta el valor de usar simbolizaciones estándar, bien establecidas, que hacen posible efectuar cómputos rutinaria y eficientemente sin tener que atender conscientemente a sus significados. Podemos inferir, sin embargo, que Leibnitz también valoraba la realidad de que la sustitución de significantes podía conducir a la creación del nuevo entorno matemático. Su énfasis en el rol de la significación en el desarrollo de las ideas matemáticas es consistente con la discusión de Sfards (1991) del proceso de reificación, donde acciones con símbolos que significaban entidades matemáticas subsecuentemente ellas mismas se vuelven entidades matemáticas. Podemos clarificar aún más este proceso tomando el desarrollo histórico del uso de letras como símbolos en álgebra como un ejemplo. Al hacerlo, interpretamos el cambio de una fuente de significado a otra en términos de la teoría de diseño de la RME.

De acuerdo con Harper (1987), uno puede identificar tres fases anchas del desarrollo histórico del álgebra: pre-Diophanto, de Diophanto a Vieta, y post Vieta. Los pasos mayores en este desarrollo incluía la introducción de Diophanto de letras para denotar cantidades desconocidas, y el uso de letras de Vieta para cantidades conocidas. La extensión de Vieta del uso de letras desde cantidades desconocidas a cantidades conocidas fue crítico ya que creaba oportunidades para la generalización. Esta secuencia de desarrollo puede ser interpretada en términos de cuatro niveles de actividad que caracterizaba las transiciones de *modelo de / a modelo para* como se muestra en la Fig. 7.1. En el acercamiento de Diophanto, aunque las cantidades desconocidas eran verdaderamente desconocidas, también eran fijas. Esto era porque las descripciones algebraicas de Diophanto matematizaban un ámbito específico. En otras palabras, su uso de las letras era comparable con lo que hemos llamado un modelo del ámbito específico, en el sentido de que podemos situar este uso de letras al nivel de la actividad referencial. Las letras derivan su significado del ámbito al cual se refieren. El abordaje de Vieta era más general en eso, ya que las cantidades desconocidas pueden ser llenadas después. Como consecuencia, los desconocidos no eran fijos, y por lo tanto no atados a preguntas específicas. El abordaje puede ser situado en el nivel de actividad general en las cuales las expresiones algebraicas eran usadas por él para expresar y respaldar razonamientos sobre relaciones entre variables. El desarrollo entre la postura de Diophanto y el de Vieta puede, por lo tanto, ser visto involucrando la transición de un *modelo de / a un modelo* para en el curso del cual, letras, o mejor, variables tomaron vida propia y se volvieron entidades por derecho propio. Antes que este cambio ocurriera, el significado de las letras estaba muy atado al ámbito que simbolizaba, como sugería Descartes. Después que ocurría el cambio, una variable podía ser tratada como un símbolo independiente como Leibniz sugería.

Esta transición no fue, por supuesto, el capítulo final en el desarrollo del álgebra. En cambio, la actividad de usar símbolos algebraicos llegó a ser vista como un sistema que podía ser investigado y analizado. Como un ejemplo, considere procedimientos para simplificar ecuaciones. Al principio, las expresiones algebraicas fueron interpretadas como descripciones de cálculos aritméticos. Más tarde, la atención se desvió a la estructura de las expresiones. Como consecuencia, matemáticos experimentados fueron capaces de interpretar una expresión como compuesta de "chunks" (saltos) más complejos que una simple variable. Al tomar la estructura de la expresión en esta forma directa, están actuando en un entorno matemático en el cual las relaciones algebraicas están a mano para ellos de la misma forma en que las relaciones numéricas estaban a mano para los alumnos de primer grado en el aula donde se realizó el experimento.

Al reflexionar sobre este proceso de algebrización, podemos notar que para el matemático, la actividad de razonar con relaciones matemáticas eventualmente toma el carácter de actuar en un entorno algebraico- donde podemos tomar la metáfora de Greeno (1991) de un ámbito o entorno. En términos de la teoría de diseño de RME, podemos situar esta actividad en el nivel de razonamiento matemático formal, mientras al mismo tiempo se denota “razonamiento matemático formal” como una forma de razonamiento que construye sobre elementos que están posicionados en una realidad matemática recientemente formada. Por eso, en este momento de la historia del álgebra, vemos el surgimiento gradual de una nueva realidad matemática. Más aún, comprobamos que las dos fuentes de significado para simbolizaciones enfatizadas por Descartes y por Leibnitz son igualmente importantes en este proceso; ellas son, digamos, dos caras de la misma moneda. Contra este punto de vista, cuestionamos la caracterización común de cambios en el nivel de actividad como abstracciones en el sentido que las conexiones con los ámbitos en los cuales las simbolizaciones se originaron son cortados o seccionados. En cambio, vemos mayor valor en descripciones que surgen en términos de reconstrucción (Sfard, 1991). Descriptas de esta forma, la matematización no es un proceso destructivo de cortar lazos a fenómenos subyacentes, sino un proceso constructivo de creación de una nueva realidad en la cual los significados de fenómenos subyacentes evolucionan a medida que son matematizados. Consideraciones de este tipo encajan con el punto de vista de las matemáticas inherente a la teoría de diseño RME como está resumido en el concepto de Freudenthal de las matemáticas como una actividad humana.

Noten que un proceso constructivo similar de crear una nueva realidad puede ser observado en el desarrollo del número. Aquí, los niños comienzan con nombres que primero juegan un rol nominativo en la actividad de contar. Por ejemplo, cuando a un alumno se le pide que descubra cuántos caramelos hay dibujados, el niño puede resolver la tarea contando los caramelos. Con el tiempo, este proceso se vuelve tan reforzado que se transforma en un referente para una cantidad. A medida que los alumnos se involucran en otras actividades que tienen que ver con la estructuración de cantidades, desarrollan relaciones numéricas y, al mismo tiempo, desarrollan aún más la noción de una cantidad como una entidad objetiva en sí misma. En este proceso, las referencias específicas a los objetos que constituyen la cantidad gradualmente desaparecen de la descripción de los alumnos. Una razón para esto es que, cuando razonan con el contador, los objetos a los que se refieren se vuelven evidentes a los niños. Otra razón es que un segundo cambio se está dando en el cual la visualización de números del alumno hace una transición de grupos de objetos (ej. ocho cuentas, ocho pasajeros del micro) a números como entidades matemáticas. Tomándolo crudamente, este cambio puede ser tomado como una transición de visualizar a los números como adjetivos (“ocho cuentas o perlas”) a visualizar números como sustantivos (“ocho”). Para los alumnos, un número visualizado como una entidad matemática todavía tiene significado cuantitativo, pero este significado no depende más de su conexión con una cantidad identificable. En la experiencia del alumno, los números vistos como entidades matemáticas derivan su significado de su ubicación en una red de relaciones numéricas. Tal red puede incluir relaciones tales como $8 = 5 + 3$; $8 = 4 + 4$; u $8 = 10 – 2$. Para nuestros propósitos, el aspecto crítico de esta red es que la comprensión de los alumnos de estas relaciones trascienda el contexto de cuentas, pasajeros, u otros objetos contables. Eso es, cuando los alumnos forman nociones de entidades matemáticas, ellos visualizan estas relaciones como soportes para cualquier ocho objetos.

En nuestra opinión, este cambio de los números como referentes, a los números como entidades matemáticas – en el orden de la secuencia – está reflexivamente relacionado al cambio del *modelo de/ al modelo para* mencionado anteriormente. Por un lado, la actividad de los alumnos de estructurar cantidades a medida que usan el contador respalda la formación de relaciones numéricas. Por otro lado, mediante el desarrollo de este respaldo de relaciones numéricas, la actividad de los alumnos con el contador puede tomar su rol como un *modelo para* el razonamiento matemático.

Resumiendo, podemos resaltar que vemos un claro paralelismo entre la historia del álgebra y el proceso de desarrollo matemático de este primer grado, tanto cuando fue conceptualizado al formular la trayectoria de aprendizaje hipotetizado como cuando fue analizado al delinear la trayectoria real de aprendizaje. A riesgo de usar un término muy abusado, ese de *autenticidad*, sostenemos que la teoría del diseño en la RME ofrece una auténtica descripción tanto del proceso de matematización como de los medios de posibilitar que los alumnos participen en él. Al usar el término *auténtico* de esta forma, no estamos enfocando características observables de tareas instruccionales (planificadas) tales que estén de acuerdo con las experiencias extraescolares de los alumnos. Tampoco estamos enfocando características específicas de lo que es tradicionalmente llamado contexto matemático. Por ejemplo, nuestra focalización en el desarrollo histórico del álgebra no implica que el manipular expresiones algebraicas es la única forma auténtica de actividad algebraica o de que debería ser la meta prioritaria en la escuela. En cambio, usamos el término *auténtico* para referirnos al proceso por el cual son creadas las realidades matemáticas. Las secuencias instruccionales desarrolladas en línea con el RME son auténticas en el sentido de que involucran un proceso planificado de matematización por el cual los alumnos actúan en un entorno matemático.

ARGUMENTACIONES FINALES

En la primera parte de este capítulo, comparamos dos acercamientos alternativos para el diseño o planificación instruccional, el exploratorio y el expresivo. Contra este respaldo, discutimos luego un tercer abordaje en detalle, la de la RME, tomando la secuencia de Estructuración de Números como un ejemplo paradigmático. Estos tres abordajes comparten varios puntos en común que sirven para diferenciarlos de los abordajes tradicionales para planificar. Cada abordaje toma lo que es *experiencialmente* real a los alumnos como un punto de partida para el proceso de aprendizaje. Más aún, los tres tienen metas similares en mente, principalmente que los alumnos lleguen a actuar en un entorno matemático con poder. Además, los que proponen estos tres abordajes enfatizan el rol crítico de la simbolización en el desarrollo matemático y desafían la dicotomía tradicional entre conceptos internos y simbolizaciones externas. En cambio, en cada abordaje, la simbolización se ve como el aspecto central del razonamiento matemático.

Las diferencias entre los tres abordajes concierne a la forma en la cual cada uno trata de respaldar el desarrollo matemático de sus alumnos capitalizando sobre sus actividades constructivas. Vimos que en el abordaje expresivo, el intento es de incitar a los alumnos a desarrollar sus propias maneras de simbolizar con guía limitada del maestro. Sin embargo, un tema que permanece para ser resuelto por los que sustentan este abordaje es el de enfrentarse con la tensión que origina las simbolizaciones de los alumnos y llegar a la meta planificada de capacitar a los alumnos para razonar con las simbolizaciones culturalmente aceptadas de formas poderosas. Los que proponen el abordaje exploratorio enfrentan esta tensión introduciendo formas convencionales de simbolización e intentan ligarlas a las experiencias diarias de los alumnos o a sus acciones. Como vemos, este vínculo se establece típicamente usando sistemas computarizados que posibilitan a los alumnos comprobar sus crecientes interpretaciones de las simbolizaciones convencionales. Un tema clave que diferencia la teoría de diseño RME de las dos anteriores es el énfasis que coloca en la formulación de un aprendizaje conjeturado, trayectorias como parte del proceso de diseño. Por ejemplo, notamos que el análisis de instrucción consistente con el abordaje expresivo puede informar el desarrollo de tales trayectorias. Sin embargo, los que proponen este abordaje no diseñan típicamente una trayectoria hipotética a partir de las formas iniciales, informales de los alumnos de simbolizar y razonar a maneras más sofisticadas de razonamiento que involucra el uso de simbolizaciones convencionales. Análogamente, sostenedores del abordaje exploratorio discuten el valor de vínculos entre la actividad personal significativa de los alumnos y las formas convencionales de simbolización, pero no proponen típicamente una trayectoria de aprendizaje por la cual los alumnos podrían llegar a razonar con esas simbolizaciones de forma poderosa. Como consecuencia, al maestro se le ofrece poca guía en cuanto a que tipo de actividades usar o las clases de preguntar a formular.

Al presentar el ejemplo de la secuencia de Estructuración de Números, ilustramos como el heurístico de la RME de reinvención, fenomenología didáctica y modelos emergentes sirve para guiar el desarrollo de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje que pueden ser investigadas y revisadas mientras se experimenta en el aula. Este ejemplo también ilustra que el abordaje del RME para diseñar es consistente con aspectos de los otros dos abordajes. En línea con el abordaje expresivo, la intención de la secuencia de Estructuración de Números era respaldar el surgimiento gradual de formas de razonamiento y de simbolización más sofisticadas. Sin embargo, también vimos que la maestra introdujo maneras particulares de simbolización en ciertas etapas de la secuencia instruccional. Esto es una reminiscencia del abordaje exploratorio en el cual se esperaba que los alumnos desarrollaran personalmente formas significativas de razonamiento con estas simbolizaciones. Con respecto a esto, diseñadores que siguen el abordaje RME tienen que vérselas con la tensión inevitable entre el ideal expresivo de construir sobre las contribuciones de los alumnos y decidir en avanzar con simbolizaciones que los alumnos deberían usar. El aspecto de la teoría de RME que hace esta tensión manejable es que las formas seleccionadas de simbolización son diseñadas para encajar con las formas de razonamiento que los alumnos han desarrollado en puntos particulares de la secuencia instruccional. Por ejemplo, describimos cómo, con el respaldo de la secuencia anterior de Modelos y particiones, la actividad de los alumnos con el contador fue diseñada para encajar con formas de razonamiento documentadas en la literatura de investigación. Más tarde, describimos cómo la maestra usó simbolizaciones no estándar para anotar las soluciones de los alumnos. El análisis indica que estas formas de simbolización encajaban con la actividad de los alumnos y que las mismas jugaban un rol crucial respaldando el desarrollo de los alumnos. Aún más, al reflexionar nuevamente sobre el experimento de enseñanza, hemos llegado a cuestionar el rol relativamente limitado de las contribuciones de los alumnos y, por lo tanto, cuestionar la forma directa en la cual fueron presentadas las simbolizaciones. Como consecuencia, una de las revisiones que le estamos haciendo a la secuencia de Estructuración de Números, es desarrollar actividades instruccionales en las que la necesidad de desarrollar maneras de simbolizar podría en sí misma ser un tópico de discusión. Esto respaldaría entonces el desarrollo en los alumnos del conocimiento meta-representacional (di Sessa et al. 1991). Más aún, los alumnos podrían entonces visualizar formas convencionales de simbolización como medios de resolver un problema.

Un segundo ítem fundamental que diferencia la RME de los abordajes expresivos y exploratorios es la manera en la que toma en cuenta al desarrollo colectivo matemático de la comunidad áulica y al aprendizaje matemático individual de los alumnos que participan en él. Por ejemplo, ilustramos que las trayectorias de aprendizaje hipotéticas encierran conjeturas sobre las posibles rutas de aprendizaje de la comunidad áulica e incluyen expectativas sobre las normas sociales y sociomatemáticas. Más aún discutimos cómo el desarrollo matemático colectivo puede ser analizado en términos de evolución de las prácticas matemáticas áulicas. Haciendo esto, también indicamos las formas diversas en las cuales los alumnos individualmente participaron en las prácticas matemáticas que identificamos. En nuestra opinión, esta focalización dual en prácticas y normas comunales y en las comprensiones matemáticas de los alumnos situados socialmente es un esfuerzo mayor de la teoría de diseño

en la RME. En particular, la RME se alinea con desarrollos teóricos recientes en la educación matemática que enfatizan la naturaleza social y cultural de la actividad matemática.
Finalmente, es importante acentuar que la RME no es una teoría prescriptiva cuya aplicación asegure que una visión particular de la educación matemática se conseguirá. La RME es, en cambio, una teoría que ha surgido de y continúa, basándose en la actividad práctica de diseñar o planificar. Su contribución yace en la guía que ofrece a medida que desarrollamos conjeturas de posibles maneras de respaldar el desarrollo matemático de los alumnos e investigar esas conjeturas mientras se experimenta en el aula. El ejemplo de la secuencia de Estructuración de Números documenta un caso en el cual esa guía resultó ser de gran valor.

BIBLIOGRAFÍA

Bakhtin, M.M. (1986). *Speech genres and other late essays.* Austin: University of Texas Press.

Balacheff, N. (1990). Towards a problematique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21,* 258–272.

Ball, D. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal, 93,* 373–397.

Bednarz, N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L., & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *Alberta Journal of Educational Research, 39,* 41–58.

Brown, J.S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32–42.

Cobb, P. (1996, December). *Instructional design and reform: A plea for developmental research in context.* Paper presented at the Meeting on the Role of Contexts and Models in Mathematical Learning, Leiden, The Netherlands.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 258–277.

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D.Kirschner & J.A.Whitson (Eds.), *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives* (pp. 151–233). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist, 31,* 175–190.

diSessa, A.A., Hammer, D., Sherin, B., & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior, 10,* 117–160.

Doerr, H.M. (1995, April). *An integrated approach to mathematical modeling: A classroom study.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Dörfler, W. (1993). Computer use and views of the mind. In C.Keitel & K.Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 159–186). New York: Springer-Verlag.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* London: Falmer Press.

Fletcher, R.J. (1988). The power of five: The step before the power of ten. *Arithmetic Teacher, 34,* 5–10.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3,* 413–435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Gravemeijer, K. (1990). Context problems and realistic mathematics instruction. In K.P.E. Gravemeijer, M.van den Heuvel, & L.Streefland (Eds.), *Contexts, free productions, tests and geometry in mathematics education* (pp. 10–32). Utrecht, The Netherlands: OW&OC.

Gravemeijer, K. (1994a). Educational development and educational research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25,* 443–471.

Gravemeijer, K.P.E. (1994b). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht, The Netherlands: CD-β Press.

Gravemeijer, K. (1996, December). *Instructional design for reform in mathematics education.* Paper presented at the Meeting on the Role of Contexts and Models in Mathematical Learning, Leiden, The Netherlands.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental research as a research method. In J.Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity (ICMI Study Publication)* (Book 2, pp. 277–295). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22,* 170–218.

Harper, E. (1987). Ghost of Diophantes. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 75–90.

Hatano, G. (1982). Learning to add and subtract: a Japanese perspective. In J.P.Carpenter, J.M.Moser, & T.A.Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 211–224). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J.J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In R.Biehler, R.W.Scholz, R.Sträßer, & B.Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 379–397). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

McClain, K. (1995). *An analysis of the teacher's proactive role in supporting students' mathematical development.* Unpublished doctoral dissertation, Vanderbilt University, Nashville, TN.

McClain, K., & Cobb, P. (1998). The role of imagery and discourse in supporting students' mathematical development. In M.Lampert & M.Blunk (Eds.), *Mathematical talk and school learning: Where, what, and how* (pp. 56–81). New York: Cambridge University Press.

Meira, L. (1995). The microevolution of mathematical representations in children's activity. *Cognition and Instruction, 13,* 269–313.

Nemirovsky, R. (1994). On ways of symbolizing: The case of Laura and velocity sign. *Journal of Mathematical Behavior, 13,* 389–422.

Newman, D., Griffin, P., & Cole, M. (1989). *The construction zone: Working for cognitive change in school.* New York: Cambridge University Press.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* New York: Basic Books.

Pea, R.D. (1993). Practices of distributed intelligence and designs for education. In G. Solomon (Ed.), *Distributed cognitions* (pp. 47–87). New York: Cambridge University Press.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26,* 61–86.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover, Germany: Schroedel.

Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H.Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189–216). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1–36.

Sfard, A. (1994, September). *The development of the concept of concept development: From God's eye view to what can be seen with the mind's eye.* Paper presented at the Symposium on Trends and Perspectives in Mathematics Education, Klagenfurt, Austria.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114–145.

Steffe, L.P., Cobb, P., & von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer-Verlag.

Streefland, L. (1990). *Fractions in realistic mathematics education, a paradigm of developmental research.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Teasley, S., & Roschelle, J. (1993). Constructing a joint problem space: The computer as a tool for sharing knowledge. In S.Lajoie & S.Derry (Eds.), *Computers as cognitive tools* (pp. 229–260). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project.* Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Treffers, A. (1991). *Het rekenrek 1&2* [The arithmetic rack]. Willem Bartjens, *8*(3), 151–153; *8*(4), 199–200.

van den Berg, W., & van Eerde, D. (1985). *Kwantiwijzer* [Number diagnostics]. Rotterdam, The Netherlands: SVO/Erasmus University,

van den Brink, F.J. (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen* [Realistic mathematics education for young children]. Utrecht, The Netherlands: OW&OC.

Varela, F.J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embedded mind: Cognitive science and human experience.* Cambridge, MA: MIT Press.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P.Cobb & H.Bauersfeld (Eds.), *Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163–201). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason.* London: Routledge.

Wenger, R.H. (1987). Cognitive science and algebra learning. In A.H.Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 218–251). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

White, B. (1993). Thinker tools: Causal models, conceptual change, and science education. *Cognition and Instruction, 10*(1), 1–100.

Whitenack, J.W. (1995). *Modeling, mathematizing, and mathematical learning as it is situated in the classroom microculture.* Unpublished doctoral dissertation, Vanderbilt University, Nashville, TN.

Whitson, J.A. (1997). Cognition as a semiosic process: From situated mediation to critical reflective transcendence. In D.Kirschner & J.A.Whitson (Eds.), *Situated cognition theory: Social, semiotic, and neurological perspectives* (pp. 97–149). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wirtz, R. (1980). *New beginnings, a guide to the think, talk, read math center for beginners.* Monterey, CA: Curriculum Development Associates.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomath norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458–477.