

JAMES A. MIDDLETON Y MARJA VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN

## ***La Tabla de Razones***

### ***La idea básica detrás de la tabla de razones es que se pueden generar razones equivalentes.***

Traducción N. Da Valle y A. Bressan. Revisión Ma. F. Gallego  
(para uso interno del GPDM/ 2018)

Los grados intermedios ofrecen desafíos únicos al maestro de matemática, especialmente en esta época de transición entre métodos y currículums tradicionales a métodos y currículums actualizados. El alcance y la calidad conceptual del conocimiento matemático que los estudiantes tienen cuando entran a 5° y 6° grado varían mucho. Muchos estudiantes han recorrido textos aceleradamente, logrando un alto grado de desempeño en el cálculo aritmético, pero a veces con una deficiente conceptualización de la matemática fundamental. Muchos otros entrarán en los grados intermedios con sólo una comprensión rudimentaria de la suma y la resta. Esta disparidad de comprensión y habilidades crea un dilema difícil para los maestros de estos grados. ¿Deberían revisar la aritmética que los estudiantes ya han experimentado, o deberían avanzar a un nivel más alto de una matemática más difícil? Esta decisión no debe necesariamente percibirse como una dicotomía. Existen métodos para explorar conceptualmente temas matemáticos de orden superior, que permiten la comprensión de estudiantes de variados niveles de conocimiento, más allá de la base que tengan.

Este artículo examina el uso de una herramienta simple (la tabla de razones) para desarrollar la comprensión conceptual del número racional por parte de los estudiantes. Primero se examina la justificación para usar una representación tabular de la razón, y luego se ilustra una aplicación con viñetas y ejemplos del trabajo de los estudiantes de tres quintos grados involucrados en una unidad piloto, "Por el Sentido" (van den Heuvel-Panhuizen et al., en la prensa). Esta unidad es parte del currículum piloto: *La Matemática en contexto: Un Currículum Conectado para grados del 5° al 8°* promovido por la Fundación Nacional de Ciencias. El proyecto es una colaboración entre el Centro Nacional de Investigación en Ciencias de la Educación Matemática (NCRMSE) en la Universidad de Wisconsin y el Instituto Freudenthal en la Universidad de Utrecht, Países Bajos. Debe señalarse que la tabla de razones es sólo una de las muchas herramientas disponibles para el maestro de grados intermedios. Siempre que sea posible, deberá utilizarse una variedad de herramientas en la instrucción para posibilitar a los estudiantes diferentes rutas de acceso a la matemática.

Debe enfatizarse que la tabla de razones es solo una de muchas herramientas disponibles para el maestro de los grados intermedios. Siempre que sea posible, se debe usar una variedad de herramientas en la instrucción para permitir a los estudiantes diferentes rutas de acceso a la matemática. Para enseñar razón, los Estándares de Currículo y Evaluación para Matemáticas Escolares (NCFM 1989) enfatizan que los estudiantes desarrollen una comprensión de una variedad de sistemas de notación, incluyendo fracciones, decimales y porcentajes. Más importante aún, el documento de estándares destaca la necesidad de que los estudiantes desarrollen una comprensión conceptual de los números racionales, es decir, el sentido numérico, e investiguen las relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes en una amplia variedad de situaciones. Los estudiantes no solo deben saber cómo encontrar razones sino también entender las equivalencias entre los diferentes sistemas de notación y desarrollar una percepción de cuáles situaciones son apropiadas para dichos sistemas.

Por ejemplo, en situaciones como compartir pizzas entre un grupo de niños (por ej., 12 pizzas entre 20 chicos), las fracciones pueden ser apropiadas. En situaciones como determinar qué proporción de la población posee un reproductor de videos (por ej. 60 por ciento), los porcentajes pueden ser apropiados. Sin embargo, en las recetas, las diferentes cantidades de ingredientes (por

ejemplo: 6 tazas de fruta para 10 tazas de leche) deben mantenerse intactas, entonces la notación de “razón” (6:10) puede ser la más apropiada. Los estudiantes deben entender la calidad comunicativa de cada notación, pero también los conceptos comunes en la matemática subyacente ( $12/20=60\%=6:10$ ).

### Ejemplos de Tablas de Razones

La tabla de razones es una herramienta que construye estas conexiones en una manera que permite a los estudiantes desarrollar una comprensión del número racional - y como tal, es una buena alternativa para evitar la multiplicación cruzada (esta idea será mencionada más adelante). La idea básica detrás de la tabla de razones es que se pueden generar razones equivalentes mediante por manipulación sucesiva de los números hasta que se llega a la razón que mejor se ajusta a la situación concreta. A continuación, varios ejemplos.

**Ejemplo 1:** En todas estas situaciones, un niño recibirá  $3/5$  de pizza:

	SITUACIÓN 1	SITUACIÓN 2	SITUACIÓN 3	SITUACIÓN 4
Pizzas	12	3	24	21
Niños	20	5	40	35

**Ejemplo 2:** En todas estas situaciones, la razón entre las personas que poseen un reproductor de videos y la población total es del 60%:

	SITUACIÓN 1	SITUACIÓN 2	SITUACIÓN 3	SITUACIÓN 4
Rep. videos	60	120	30	3
Personas	100	200	50	5

**Ejemplo 3:** En todas estas situaciones, el helado tendrá el mismo sabor porque la razón entre la cantidad de fruta y de leche se mantiene intacta.

	SITUACIÓN 1	SITUACIÓN 2	SITUACIÓN 3	SITUACIÓN 4
Tzas de fruta	6	3	9	12
Tzas de leche	10	5	15	20

Si miramos más detenidamente estos ejemplos, vemos que las razones equivalentes pueden encontrarse ya sea por estrategias multiplicativas (duplicar repetidamente y hallar la mitad son especialmente accesibles para los estudiantes) o por estrategias aditivas (sumando el numerador y denominador sucesivamente). La última puede ser aplicada al caso del helado del ejemplo 3. El número de tazas de fruta necesarias para veinte tazas de leche puede encontrarse sumando las tazas de fruta que son necesarias para cinco y quince tazas de leche.

Los próximos ejemplos ilustran la flexibilidad de la tabla de razones como una herramienta de cálculo. El estudiante puede usar estrategias aditivas o multiplicativas, trabajar en pasos más grandes o más pequeños y crear entradas más grandes o más pequeñas. Las estrategias elegidas dependerán tanto del tipo de pregunta a responder como del tipo de número involucrado.

**Ejemplo 4:** Si cada niño recibe  $3/5$  de pizza, ¿cuántas pizzas serán necesarias para 70 niños?

Estrategia multiplicativa:

PIZZAS	3	6	42
NIÑOS	5	10	70

$\xrightarrow{\times 2}$        $\xrightarrow{\times 7}$   
 $\xleftarrow{\times 2}$        $\xleftarrow{\times 7}$

Estrategia aditiva:

PIZZAS	3	6	12	24	36	42
NIÑOS	5	10	20	40	60	70

$+3$     $+6$     $+12$     $+12$     $+6$   
 $+5$     $+10$     $+20$     $+20$     $+10$

**Ejemplo 5:** 45 de cada 75 personas encuestadas poseen un reproductor de videos. ¿Qué porcentaje representa esta situación?

VIDEO	45	90	30	60
PERSONAS	75	150	50	100

$\times 2$     $+3$     $\times 2$   
 $\times 2$     $+3$     $\times 2$

**La tabla de razones es una manera simple de organizar números**

La ventaja de la tabla de razones es que es una manera simple de organizar números y de mantener un registro adecuado de las operaciones y sus resultados. Esto crea un patrón visible que los estudiantes podrán analizar con facilidad. Más aún, también deja un registro visual que el maestro puede usar para evaluar qué tan bien trabajan sus estudiantes. El próximo ejemplo es el trabajo realizado por una estudiante de 5° grado, llamada Jennifer. La situación de la figura 1 fue una de sus primeras experiencias de porcentajes en la escuela. De todas maneras, su respuesta, traducida del holandés, muestra que ella tiene cierto conocimiento de 25% como  $\frac{1}{4}$  obtenida de experiencias anteriores (ver Streefland y van den Heuvel-Panhuizen [1992]).

*Querida Mamá:*  
*La escuela es fantástica y me está yendo bien.*  
*¡Tengo algunas malas noticias! ¡No puedo creerlo, pero el próximo mes el alquiler de mi casa se incrementará en un 25 por ciento! Eso significa el fin de mi viejo alquiler de \$200. El gerente no me ha dicho cuánto será el alquiler exacto, pero yo creo que tengo que pagar entre 200 y 300 dólares. Para mayor seguridad, por favor envíame 300 dólares-100 dólares extra este mes.*

*Muchos besos, Juanita*

La interpretación de Jennifer del pedido de Juanita de una mayor cantidad de dinero:

Juanita le pide a su mamá 100 dólares.

El alquiler se incrementa en un 25 por ciento de los 200 dólares.

$\frac{1}{4}$  de 100=25

200 es el doble de 100, entonces 25 también deberá ser duplicado, entonces 250.

Handwritten diagram showing a number line from 100 to 200. A vertical line is drawn at 150. An arrow points from 100 to 150, labeled '25'. Another arrow points from 150 to 200, labeled '25'. A larger arrow points from 100 to 200, labeled '2x'.

(Figura 1)

El próximo trabajo de un estudiante de 7° grado, Martín, contrasta en gran manera con el de Jennifer. Aquí el problema era calcular cuántos gramos de fruta podría contener un frasco si es el 60% de fruta y el peso total es de 225 gramos. Martín trató de resolver el problema multiplicando de manera cruzada, pero inmediatamente se trabó.

Handwritten cross-multiplication diagram. It shows  $\frac{60}{225}$  with a division symbol, and  $\frac{?}{100}$  with a multiplication symbol. An arrow points from the 60 to the question mark, and another arrow points from the 225 to the 100.

La multiplicación cruzada en esta situación no tiene sentido a menos que el estudiante ya posea una comprensión más sofisticada del concepto de razón; el lector notará la dificultad de Martín. Para aquellos estudiantes que todavía no están en ese nivel conceptual, la tabla de razones ofrece un método de trabajo más accesible:

gramos de fruta	60	120	15	135
total gramos de mermelada	100	200	25	225

La característica más llamativa de la tabla de razones es que enfoca la atención de los estudiantes en el hecho de que una misma razón puede diferir en cuanto a su notación dependiendo de la situación que el problema plantee. 6:10 se puede considerar como “6 tazas son a 10 tazas” o como la fracción  $\frac{6}{10}$ . De la misma manera, 60:100 puede considerarse como  $\frac{60}{100}$  o 60%. A través de la aplicación en problemas del mundo real, el estudiante puede comenzar a ver la equivalencia subyacente de una fracción ( $\frac{6}{10}$ ), un porcentaje (60%), y una razón (6:10).

En esencia, la tabla de razones es una herramienta flexible de cálculo que actúa como un patrón visual para ayudar a calcular con números racionales y conecta diferentes sistemas de notación de estos números. Además, es una herramienta muy transparente, porque documenta los pasos intermedios del estudiante en la resolución de un problema de razón. Este aspecto la transforma en un recurso poderoso, no sólo para los estudiantes sino para los maestros siempre y cuando se presente como una herramienta abierta y flexible y no como *la* manera de resolver problemas de razones.

### La tabla de razones en clase

Al observar las estrategias de los estudiantes en el uso de la tabla de razones en tres quintos grados, los autores dicen que los estudiantes usan dos estrategias principales para encontrar fracciones equivalentes. Ambas estrategias parecen estar ligadas a los conceptos iniciales de razón y al uso de la tabla de razones como herramienta.

El primer concepto de razón será denominado el *concepto de fracción equivalente*. Los estudiantes que perciben una razón como una fracción tendieron a reducir la razón a los términos menores y a usar una estrategia aditiva, sumando (o restando) el numerador de la razón reducida al numerador original de la razón; y el denominador reducido al denominador original para encontrar fracciones equivalentes. Estos estudiantes describieron las razones como fracciones de manera coherente, usando palabras como “son veinticuatro cuarentavos” y “son tres quintos”.

El segundo concepto de razón se llamará el *concepto de razón/relación*. Los estudiantes que percibieron la razón como una relación entre dos números específicos – aquí una relación parte-todo - no necesariamente reducen la razón a los términos menores. Estos estudiantes generaron razones equivalentes multiplicando el numerador y denominador de una razón por un factor común. Ellos comprendieron que cuando multiplicaban por un factor común, la relación entre los dos números permanecía constante- que  $24/40$  es la misma razón que  $48/80$ , una transformación por un factor 2, por ejemplo. De todas maneras, tenían gran dificultad en encontrar instancias intermedias en las cuales el factor de multiplicación no fuera un número entero- que  $24/40$  es la misma razón que  $27/45$ , una transformación por un factor 1,125, por ejemplo.

### Viñeta

La siguiente viñeta fue tomada de las notas de campo del primer autor durante sus observaciones del uso de la tabla de razones en una clase de quinto grado. Puede considerarse típica o característica de las estrategias de los estudiantes que usan en problemas de porcentaje en una variedad de situaciones del mundo real. Aún más, las respuestas de los estudiantes ponen de relieve las diferencias entre estrategias aditivas y multiplicativas y las diferencias entre el concepto de fracción y el de razón.

**Problema:** Usa la tabla de razones para encontrar estacionamientos de diferentes tamaños con la misma fracción de espacios ocupados y libres.

espacios ocupados	35	42	49	56
total de espacios	50	60	70	80

Vanessa es una estudiante de 5° grado. Como se mostró en su trabajo anterior, ella puede hacer buenos gráficos- barras de porcentaje- representando los porcentajes de referencia: 10, 25, 50, 75 y 100 por ciento. No obstante, tiene una gran dificultad para multiplicar y dividir, entonces las tablas de razones inicialmente la intimidan. El observador sugiere buscar patrones entre los números. La primera anotación inicial en su tabla fue 35:50.

*Observador:* ¿Qué número fácil conoces que quepa en 50?

*Vanessa:* ¿Cinco?

*Observador:* ¡Claro! Ahora no mires al 50. ¿Qué número fácil que conozcas cabe en 35?

*Vanessa:* Cinco.

*Observador:* ¡Claro! Ahora ¿cuántas veces cabe 5 en 50?

*Vanessa:* Diez.

*Observador:* Bien, y ¿cuántas veces cabe 5 en 35?

*Vanessa:* Siete

*Observador:* ¡Bien!

El mismo patrón de preguntas y respuestas se repitió para  $42/60$ ,  $49/70$ , y  $56/80$ . Cada vez el observador hizo hincapié en que el 7 y el 10 son *multiplicados* por el factor

**Los  
estudiantes  
pueden saber  
realizar las  
operaciones,  
pero sin saber  
por qué.**

común (5). Pero cuando llega a extender la tabla de razones, la estudiante indica una estrategia diferente

*Observador:* Ahora, si yo escribiera aquí (escribe 90 en la línea de abajo de la tabla), ¿cuál sería el número de arriba?

*Vanessa:* Sesenta y tres.

*Observador:* Bien. Ahora si yo escribiera aquí (escribe 100 en la línea final de la tabla), ¿cuál sería el número de arriba?

*Vanessa:* Setenta.

*Observador:* Exacto. Ahora, ¿cómo sacaste eso?

*Vanessa:* Sumé 7 al número de arriba, y 10 al número de abajo.

Esta respuesta es desconcertante, puesto que el observador había asumido que Vanessa entendía el problema en términos de una noción multiplicativa de razones más compleja de la relación parte-todo. En cambio, Vanessa interpretó el problema como un patrón donde el número de lugares libres cambia por 7 y el número total de espacios cambia por 10 para cada estacionamiento sucesivo, una noción aditiva. Para comprobar su comprensión, el observador le pregunta nuevamente:

*Observador:* Y si tuviéramos un total de 40 espacios (en el estacionamiento), ¿cuál sería el número de lugares libres?

*Vanessa:* Veintiocho. (Esta respuesta es mucho más rápida que sus respuestas anteriores)

*Observador:* De acuerdo. ¿Y si fueran treinta?

*Vanessa:* Veintiuno.

*Observador:* Ahora voy a dejarte hacer las últimas, sola. (Vanessa escribe en  $14/20$  y  $7/10$  muy rápidamente). ¡Muy bien! (Pulgares arriba) ¿Cómo lo has hecho?

*Vanessa:* Yo resto 7 del de arriba y 10 del de abajo.

Esta viñeta ilustra dos cosas importantes para tener en mente cuando se enseña el concepto de números racionales. Primero, observar y continuar un patrón no necesariamente equivale a que el estudiante comprenda la matemática subyacente al patrón. Vanessa pudo continuar en el contexto más amplio de la planificación urbana, usando los patrones que había descubierto; pero sería ingenuo suponer que entendió por qué sumar 7 al numerador y 10 al denominador conduce a razones equivalentes. Segundo, nuestro concepto adulto de razón a menudo afecta la forma en que interpretamos las respuestas de un estudiante. El observador asumió que Vanessa estaba utilizando una estrategia multiplicativa cuando, en realidad, no multiplicó para nada. Sólo al final el observador le preguntó cómo había llegado a esa solución. Si esta pregunta no hubiera aparecido en la conversación, el observador habría asumido que Vanessa tenía una estrategia más sofisticada que la que en realidad poseía. Viéndolo de manera retrospectiva, la pregunta debería haber sido hecha antes y más a menudo para permitir a Vanessa validar sus propios descubrimientos.

Además, un solo problema es evidencia insuficiente para concluir que un estudiante posee una cierta concepción o idea equivocada de razón. A medida que los estudiantes ganan experiencia manipulando números racionales, comienzan a usar diferentes estrategias de manera flexible de acuerdo a la naturaleza del problema y los números involucrados.

Lo importante a tener en cuenta es que la tabla de razones proporciona una documentación- un registro de cómo los estudiantes resuelven problemas de razones- y esta documentación es una pequeña ventana para su comprensión de lo que es una razón. Al crear razones equivalentes, los estudiantes usan una estrategia que se ajusta a la manera en que inicialmente perciben la razón. Aquellos que la perciben como una relación de parte-todo, tienden a usar la estrategia aditiva porque ven la fracción

**El cálculo puede ser una herramienta para descubrir conceptos importantes.**

subyacente como un operador. Aquellos que la perciben inicialmente como una razón, tienden a usar la estrategia multiplicativa porque conserva intacta la relación numérica original. Esta diferenciación ofrece oportunidades poderosas para la evaluación. Observando las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas con números racionales que involucran la tabla de razones e indagando las explicaciones de estas estrategias, el maestro puede hacer juicios precisos con respecto a la comprensión de razón por parte de sus estudiantes, y este conocimiento puede usarse para desarrollar una noción conectada que incluya fracciones, porcentajes y decimales, así como también estrategias aditivas y multiplicativas.

### Uso de la Tabla de Razones como una Herramienta de Cálculo

En la enseñanza de los conceptos de razón, la tabla de razones también se puede usar como una herramienta de cálculo. Por ejemplo, los estudiantes pueden comenzar con una fracción familiar y construir los numeradores y denominadores correspondientes a través de las estrategias multiplicativas o aditivas descritas anteriormente. Por ejemplo, veamos el trabajo de Juan:

**Problema:** Supongamos que la razón de hinchas en el estadio de los Dodgers es de 2 hinchas de los Giants a 23 hinchas de los Dodgers. Usa la tabla de razones para averiguar cuántos hinchas de los Giants habrá en 100 espectadores.

Giants	2 +2=	4+2=	6+2=	8
Dodgers	23+23=	46+23=	69+23=	92
Total	25+25=	50+25=	75+25=	100

Mediante la adición repetida y otras operaciones simples, los estudiantes pueden construir sucesivamente los términos de la razón hasta llegar a uno que corresponda a 100. A medida que los estudiantes que observamos se volvieron más hábiles, comenzaron a usar una combinación de estrategias aditivas y multiplicativas. La parte difícil de este problema no es cómo construir los términos de la razón a 100, sino cómo comenzar. Como la razón se da como una relación parte-parte necesita convertirse en una razón parte-todo. Pero aquí otra vez, una simple extensión de la tabla sumando las partes hasta obtener el entero, crea un puente excelente desde la situación original a la razón parte-todo.

Al usar el dinero como contexto, la confusión causada por los decimales puede eliminarse, ya que todos los números se pueden transformar en números enteros usando los centavos como unidades. Para mostrar conexiones entre los decimales y porcentajes, el maestro puede querer también conservar la notación decimal después de resolver el problema con los números enteros. Como ejemplo, veremos la tabla de Beth:

**Problema:** Si continuaras dando propina como lo hiciste en la cuenta de \$4.00, ¿qué propina dejarías en una cuenta de \$2.00, de \$1.00, de \$5.00 y de \$7.00?

TOTAL CUENTA	\$4.00	\$2.00	\$1.00	\$5.00	\$7.00
PROPINA	\$1.00	\$.50	.25	\$1.25	1.75
	25%				

¿Cuándo deberían el estudiante moverse de la tabla de razones a notaciones matemáticas más convencionales? Los autores han observado que cuando los estudiantes han progresado hasta la

comprensión de que dos razones son equivalentes cuando tienen un factor común, tienden a desechar la tabla de razones a favor de notaciones más breves y eficientes. Ellos tienden a favorecer la búsqueda del factor directamente y usarlo para encontrar cualquier dato faltante.

El maestro puede favorecer este pasaje a usar notaciones más eficientes a través de preguntas que permitan a los estudiantes conjeturar acerca de factores comunes que no son números enteros. Por ejemplo, el maestro puede preguntar a la clase, "Si doce de cada quince personas encuestadas indican que mastican goma de mascar sin azúcar, ¿cuántas personas dirían que mastican goma de mascar sin azúcar si preguntaran a treinta personas al azar?" Esta solución implica ampliar por un número entero (2). Luego de alguna discusión sobre el factor de escala, el maestro puede preguntar, "Ahora, ¿cuántas personas dirían que mastican goma de mascar sin azúcar si se preguntara a treinta y cinco personas?". Este nuevo problema involucra reducir la fracción a los términos menores,  $\frac{4}{5}$ , o ampliar por un factor de  $2\frac{1}{3}$ . Si los estudiantes comienzan a ver que el factor es el mismo para numerador y denominador, comenzarán a buscar directamente el factor en problemas posteriores que involucren razones.

### **Uso de la Tabla de Razones como una ayuda para evaluar**

Como la tabla de razones muestra todos los pasos intermedios para calcular varios casos de números racionales, da al maestro una ventana única de cómo sus estudiantes procesan los problemas con dichos números. Como se ilustró en la viñeta con Vanessa, estudiando los patrones de las operaciones que los aplican a estudiantes los números racionales para construir razones equivalentes mayores o menores, el maestro puede juzgar el alcance de su conocimiento para tomar decisiones sobre su instrucción. Un estudiante que prefiere sumar y restar es probable que tenga un concepto de razón diferente de aquél que prefiere la multiplicación y la división (Streefland 1985). Una intervención adecuada podría ser poner en parejas a los estudiantes que usan diferentes propiedades de la razón para que puedan enseñarse entre sí. Al hacerlo, el maestro puede asegurar que ambos logren una base más conectada del conocimiento de los números racionales.

Cada uno de los problemas utilizados en este artículo ilustra el uso de la tabla de razones como una herramienta conceptual para hacer conexiones entre razón, fracciones y porcentaje. En el proyecto de currículum de "Matemática en Contexto", las tablas de razones se usan conjuntamente con otros métodos, como por ejemplo dibujar esquemas de parte-todo y agrupar elementos, para asegurar que todos los estudiantes puedan experimentar éxito con estos conceptos. Estudiantes que tradicionalmente tenían problemas con el cálculo, comenzaron a percibir la estructura fundamental de la matemática y lograron una mayor destreza en el cálculo, al mismo tiempo que lograron una comprensión del número racional. Estudiantes que tradicionalmente eran muy buenos en el cálculo comenzaron a "ver" las relaciones y a usar estrategias de dibujo más a menudo para que el problema tenga sentido, tanto antes del cálculo para darles una idea de hacia dónde iban y después del cálculo, para verificar la razonabilidad de sus resultados. La tabla de razones por sí misma no fue suficiente para llegar a todos los estudiantes, pero cuando se la utilizó con otros métodos, presentó un enfoque sistemático que hizo evidentes las estructuras fundamentales. Además, facilitó la práctica del cálculo sin convertirse en una revisión de él. El cálculo encontró su lugar natural como una herramienta para descubrir conceptos matemáticos más interesantes e importantes.

El apéndice incluye un conjunto de problemas para que los maestros prueben en sus clases. Los lectores son libres de adaptarlos para que se adecuen a los intereses de sus propios estudiantes.

### **Bibliografía**

- Consejo Nacional de Maestros de Matemática. *Standards de Curriculum y Evaluación para la Matemática en la Escuela*. Reston, Va: El Consejo, 1989.
- Streefland, Leen. "La Búsqueda de las Raíces de la Razón: Algunos Pensamientos para el Proceso de Aprendizaje en un Tiempo Prolongado." *Estudios Educativos en Matemática* 16 (1985): 75-94.

- Streefland, Leen, y Marja van den Heuvel- Panhuizen. "Evocando el Pensamiento Informal de los Estudiantes acerca de los Porcentajes" *Procedimientos de la Décimosexta Conferencia de la Psicología de los Estudios Matemáticos, Capítulo Norteamericano*, vol.3, 51-57. Durham, N.H.: Universidad de New Hampshire, 1992.

- van den Heuvel-Panhuizen, Marja, Leen Streefland, Margaret R. Meyer, James A. Middleton, y James Brown. "Por el Sentido." En *Matemática en Contexto: Un Currículo Conectado para Grados 5-8*, editado por Thomas A. Romberg. Chicago: Corporativa Educacional de la Enciclopedia Británica, en la prensa.

*Los autores queremos agradecer sinceramente a los maestros y estudiantes que gentilmente nos permitieron unirnos a ellos en sus actividades matemáticas. Nosotros también queremos agradecer a los revisores anónimos por sus críticas muy útiles del primer borrador de este manuscrito. Este proyecto fue sostenido, en parte, por la Fundación Nacional de Ciencias. Las opiniones expresadas son las de los autores y no necesariamente las de la Fundación.*

### Apéndice: Algunos Problemas Tipo

1- El grado de Donna tiene 20 estudiantes. Ellos tienen que compartir 12 pizzas. El grado de Jaime tiene 35 estudiantes.

- ¿Cuántas pizzas tiene que ordenar la maestra de Jaime para que sus estudiantes coman la misma cantidad de pizza que los del grado de Donna?
- ¿Qué cantidad recibirá cada niño en ambas clases?

PIZZAS	12	
ESTUDIANTES	20	

2- Para una tarea escolar, un estudiante cortó este titular de un diario:

#### Encuesta Nacional

**450 de cada 750 personas tienen un reproductor de videos.**

**En otras palabras,..... por ciento tiene un reproductor de videos.**

- ¿Qué porcentaje de esta muestra crees que posee un reproductor de videos? Utiliza la tabla de razones para encontrar tu respuesta.

VCRs	450	
PERSONAS	750	

- Se pueden encontrar respuestas a estas preguntas de diferentes maneras. Comenta en clase la manera en que *tú* lo hiciste.

3- Todos están de acuerdo en que la mamá de Curtis hace el mejor helado casero. "Ella siempre emplea nueve trazas de fruta por cada quince tazas de leche," explica Curtis. "Pero, por supuesto siempre puede hacer más o menos helado."

- Trata de encontrar otras combinaciones de fruta y leche que tengan el mismo sabor que el helado que hace la mamá de Curtis.

Usa la tabla de razones para encontrar y comentar tu método en clase.

TAZAS DE FRUTA	9	
TAZAS DE LECHE	15	

- a) ¿Cuál sería una manera más general de describir la cantidad de fruta y leche en esta receta?
- b) Comenten las similitudes y diferencias en sus maneras de resolver los problemas del 1 al 3.  
¿Notaron algunos elementos comunes?

JAMES MIDDLETON enseña en la Universidad del Estado de Arizona, Tempe, AZ 85287. Sus intereses profesionales se centran en currículum e innovación, motivación de los estudiantes y desarrollo del personal.

MARJA VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN fue por diez años una maestra en los grados primarios y en la educación especial. Desde 1987 ha trabajado en el Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht, Tiberdreef, 3561 Utrecht, en Los Países Bajos. Ella es una de las personas que ha desarrollado los materiales para el proyecto Matemática en Contexto y está especialmente interesada en evaluación.

Traducción interna del GPMA