EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN ALUMNOS DE 7º GRADO CON DIFERENTES EXPERIENCIAS CURRICULARES

(Traducción resumida por María Fernanda Gallego)

AUTORES: David Ben-Chaim, James Fey, William Fitzgerald, Catherine Benedetto y Jane Miller,
1998, *Educational Studies in Mathematics* 36, pp. 247-273.

INTRODUCCIÓN:

Un nuevo currículo y estrategias de enseñanza se han desarrollado recientemente para los temas matemáticos de los grados medios. Esto es especialmente así para el tratamiento de los números racionales, incluyendo fracciones, decimales, porcentajes, razón y proporcionalidad. En el currículo tradicional de los grados medios, cada operación aritmética con cada tipo de número racional es enseñada enfocándose en el desarrollo de la habilidad del alumno en el algoritmo determinado, que luego se practica para adquirir rapidez y exactitud en la ejecución. Solo cuando se ha logrado la habilidad en el cálculo los alumnos son desafiados a aplicarla en problemas prácticos o imaginarios.

Uno de los nuevos proyectos curriculares de los grados medios, el proyecto de Matemática Relacionada (CMP), fue creado para desarrollar un currículo matemático completo con materiales de enseñanza para sexto, séptimo y octavo grados. Este currículo está estructurado para desarrollar el conocimiento y comprensión de matemática de los alumnos y es rico en conexiones, conexiones entre las ideas centrales en matemática y sus aplicaciones. El CMP está organizado alrededor de interesantes problemas de situaciones reales, situaciones fantásticas o situaciones matemáticas interesantes. Los alumnos resuelven estos problemas y haciéndolo observan patrones y relaciones, conjeturan, prueban, discuten, verbalizan y generalizan estos patrones y relaciones. El desarrollo del CMP recibió el aporte de todos los documentos curriculares del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

El CMP aborda las principales áreas de matemática: número, geometría, medida, álgebra, estadística y probabilidad, a través de ocho unidades de estudio para cada grado. En 6º grado, dos de las ocho unidades introducen las ideas de número racional. En 7º grado, tres de las ocho trabajan con las ideas de semejanza, razón y proporciones, y sus aplicaciones: De acuerdo con toda la filosofía del CMP, el enfoque en estas unidades es el de alentar a los alumnos a construir sus propias estrategias para hacer los cálculos con números racionales, resolver proporciones y aplicar estas habilidades a la resolución de problemas. Este currículo apoya la construcción del concepto de número racional a través de la presentación a los alumnos de serie de problemas contextualizados que requieren razonamiento proporcional y cálculo. Los alumnos colaboran en el trabajo con los problemas compartiendo sus diversas miradas y enfoques con sus compañeros y luego con toda la clase a través de reflexiones matemáticas, discusiones y el diario escrito. Los materiales del CMP no puntualizan que los alumnos deban manejar algoritmos estandarizados para la suma, resta, multiplicación o división de fracciones. Tampoco procedimientos estandarizados para resolver problemas que incluyan porcentajes (los 3 casos de %), o cualquier método rutinario para resolver proporciones o probar razones por equivalencia (multiplicación cruzada). Mientras que en el currículo tradicional, los textos proveen problemas y los docentes demuestran las soluciones, y luego los alumnos practican individualmente la resolución de los problemas de acuerdo a la forma dada. El entorno para alumnos que experimentan el CMP es completamente diferente en cuanto a los textos usados, organización de la clase y métodos de enseñanza.

La notable diferencia entre el tradicional y el CMP con respecto al abordaje del número racional, cálculo proporcional y resolución de problemas plantea una pregunta muy natural y fundamental para docentes, familiares y otros interesados en el desempeño de los alumnos en este nivel:

¿Cómo comparar la comprensión, las habilidades de cálculo, las estrategias de resolución de problemas y el éxito del CMP y del currículo tradicional?

En particular, es natural preguntarse si el enfoque del nuevo CMP conduce exitosamente a los alumnos a construir efectivas (correctas y/o eficientes) estrategias para fracción, decimal, porcentaje, razón y cálculo proporcional, y si los alumnos del CMP desarrollan estrategias flexibles y/o efectivas para resolver problemas contextualizados que incluyen números racionales y proporciones. Este informe está dirigido fundamentalmente a ese amplio tema en cuanto al logro del razonamiento proporcional en la reforma y en el currículo tradicional, comparando el trabajo de alumnos de 7º grado del CMP y tradicional sobre una variedad de tareas.

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL:

La proporcionalidad está en el corazón de la matemática de los grados medios. Envuelve relaciones matemáticas de naturaleza multiplicativa. Formalmente, especialmente para un matemático, una proporción es un estado de equivalencia de dos razones, a/b = c/d. De acuerdo a la teoría de Piaget, en la cual el razonamiento proporcional fue señalado como un punto en el nivel de desarrollo de las operaciones formales, la investigación se ha concentrado en el razonamiento proporcional en alumnos adolescentes.

De acuerdo con el Curriculo del NCTM, "la habilidad para razonar proporcionalmente se desarrolla en alumnos de 5º a 8º grado. De allí la importancia de dedicar tiempo y esfuerzo para asegurar su cuidadoso desarrollo". Sin embargo, la investigación ha mostrado probadamente que "relativamente pocos alumnos de grados altos tienen la habilidad para usar el razonamiento proporcional de manera consistente". El tema aún "sigue siendo problemático para muchos alumnos" y "hay evidencia que una gran parte de nuestra sociedad nunca adquirió fluidez en el pensamiento proporcional".

Según Freudenthal los problemas del razonamiento proporcional pueden describirse en 3 categorías:

1) Comparar dos partes de un entero simple como "la razón de mujeres a varones en una clase es de 15 a 10" o "un segmento es dividido en la razón aúrea".
2) Comparar magnitudes de diferentes cantidades con una conexión interesante: "millas por galón", "personas por km^2", "kg por m^3" o precio unitario. Estas comparaciones no son llamadas generalmente razones, sino tasas o densidades.
3) Comparar magnitudes de dos cantidades relacionadas conceptualmente, pero no pensadas naturalmente como partes de un entero común. "La razón de los lados de dos triángulos es 2 a 1". Estas comparaciones se refieren a escalas e incluyen cuestiones de ampliación y reducción en transformaciones de semejanza.

La literatura propone tres tipos de tareas para el razonamiento proporcional (Cramer y otros, 1993):

- Problemas con valores que faltan donde se dan tres datos y la tarea consiste en encontrar el cuarto.
- Problemas de comparación numérica, donde se dan dos razones/ tasas completas y no se pide una respuesta numérica sino comparar esas razones o tasas.
- Problemas de comparación y predicción cualitativa los cuales requieren de comparaciones no dependientes de valores numéricos específicos.

Freudenthal (1978, 1983) ha señalado que los problemas del valor que falta o los de comparación proporcional pueden resolverse a través de 3 abordajes diferenciados:

a) Usando la razón interna (sin una magnitud) o razón entre términos de un mismo sistema (dos longitudes, dos tiempos).

b) Usando la razón externa (entre dos magnitudes) o razón entre términos de diferentes sistemas (una longitud y un tiempo).
c) Absteniéndose del cálculo hasta que el resultado sea encontrado formalmente o estableciendo una relación que implique toda la información dada y entonces recién calcular.

Van den Brink y Streefland (1979) consideran que la comparación cuantitativa de razón es una actividad importante para ordenar la realidad perceptiva visual. La revisión de la literatura sobre razones y proporcionalidad (Tourniaire y Pulos, 1995) señala que la variabilidad en el desempeño depende de un número de factores relacionados con el contexto y la estructura numérica de los problemas de proporcionalidad. Entre las variables del contexto están la familiaridad del mismo, la presencia de una mezcla y la presencia de cantidades continuas. Entre los factores de la estructura numérica están la presencia de razones enteras, el orden y la complejidad numérica. También informa acerca de estrategias comunes, correctas e incorrectas. Cramer y Post identificaron estrategias correctas de solución usando tasa unitaria, factores de cambio (operadores), fracciones y producto cruzado. Touniare y Pulos (1995) señalaron errores causados por ignorar datos fundamentales y el uso de estrategias de adición o diferencia constantes donde la comparación multiplicativa era más apropiada.

PROPÓSITO DEL ESTUDIO:

El fin básico era describir el carácter y la efectividad del razonamiento proporcional en alumnos con diferentes experiencias curriculares, frente a problemas de razón. El propósito principal fue comparar dos poblaciones de alumnos de 12 años con el nuevo currículo (CMP) y el currículo americano tradicional. Sin embargo, también estábamos interesados en aprender más acerca de cómo aprenden los alumnos de los grados medios de ambas muestras y lo que ellos saben acerca de proporcionalidad.

METODO:

Los datos para este estudio fueron recogidos durante el primer año (94/95) en el cual el CMP fue enseñado de 7º grado durante un curso completo. Aproximadamente 2000 alumnos de 8º grado de 10 estados con siete docentes distintos estudiaron con el programa del CMP durante un año lectivo. La muestra control consistió en alumnos de 7º grado de diferentes estados con seis docentes distintos. Esta muestra fue seleccionada de toda la población control (cerca de 400 alumnos) constituida por el equipo de evaluación del CMP. Un indicativo de la equivalencia de las dos muestras está dado por los resultados de las pruebas estandarizadas de ambas muestras. Estos mostraron que los resultados del grupo control fueron ligeramente más altos que los alumnos del CMP al comienzo del año, y ligeramente más bajos al final del año. En total fueron 187 alumnos de la muestra CMP y 128 de la muestra control. Ambas muestras fueron evaluadas en una variedad de problemas de proporcionalidad presentados de 3 formas y distribuidos al azar en cada clase participante. Los dos primeros problemas referidos a precio unitario (uno de comparación numérica y el otro donde falta un valor). El tercero y cuarto referidos a relaciones proporcionales entre distancia, tiempo y velocidad. Ambos de comparación numérica. La principal diferencia entre ellos es la estructura numérica ya que uno incluye sólo enteros y el otro, fracciones y decimales para tiempo. El quinto se refiere a densidad de población e incluye una tarea de comparación numérica con números enteros relativamente grandes.

Todas las tareas de comparación numérica incluyen razones diferentes (más difícil que aquellos con razones iguales) y se originan en circunstancias familiares como comprar soda en un almacén, andar en bicicleta, densidad de población. Sin embargo, el contexto de los problemas no favoreció a los alumnos de ninguna de las dos muestras. No obstante, dada la manera de enseñar de cada currículo, cuando se les pidió comparar diferentes situaciones y explicar su trabajo, los alumnos del CMP estaban más familiarizados con este tipo de preguntas que los del grupo control. En las respuestas se identificaron 3 categorías: Correctas, incorrectas y no responde y dentro de las dos primeras 3 subcategorías:

- *Respuesta correcta*: a) sólo respuesta correcta, b) respuesta correcta con justificación, c) respuesta correcta con justificación incorrecta. Estas categorías fueron creadas porque en cada problema se les pedía justificar sus respuestas.
- *Respuesta incorrecta*: a) sólo respuesta incorrecta, b) respuesta incorrecta con comprensión parcial, c) pensamiento incorrecto.

La categoría más problemática fue "respuesta incorrecta con comprensión parcial". En esta categoría fueron ubicadas respuestas de alumnos cuando su pensamiento era correcto pero con errores de cálculo o cuando usaba las relaciones correctas pero con errores en las unidades o cuando completaba la mayor parte del problema correctamente con un error menor cerca del final.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN:

Los cinco problemas de razón se dieron dentro del contexto de una historia acerca de un paseo al zoológico.

"Un paseo al zoológico. Mac, Elisa, Alex y Cosima planearon un paseo en bicicleta al zoológico a fin de año. Los alumnos se reunieron en el estacionamiento de la escuela y se fueron juntos al zoo en bicicleta. Después de mirar los animales durante unas horas, se reunieron para comer y tomar algo antes de regresar a la escuela.

1) Max y Elisa compraron provisiones para comer y reportaron los siguientes gastos: Gatorade \$2.00 por 16 onzas, jugo \$1.60 por 12 onzas. Compraron jugo Cransraspberry. ¿Hicieron la elección más económica? Mostrá los cálculos referidos a la respuesta.
2) Cosima y Alex fueron a comprar barras de granola y manzanas pero perdieron el ticket. Recordaron que las barras de granola cuestan \$2.60 por 8 barras simples y 6 manzanas cuestan \$1.95.
   a) ¿Cuánto gastaron por 20 barras de granola? Explicá tu razonamiento.
   b) ¿Cuánto gastaron por 20 manzanas? ¿Cómo lo sabés?
3) Cosima y Alex decidieron competir para ver quién manejaba más rápido hasta sus casas. Cozi anduvo 5 millas en 20 minutos. Alex, 7 millas en 25 minutos. ¿Quién fue el más rápido? ¿Cómo lo sabés?
4) El sábado pasado, Max y Elisa recorrieron en bicicleta el camino que rodea el lago. Recorrieron 30 millas y les llevó 1.5 h de tiempo. Después de almorzar, regresaron por el camino corto. Recorrieron 20 millas en ¾ h. ¿En qué parte del paseo anduvieron más rápido? ¿Cómo lo sabés?
5) En el callejón cercano a la escuela, Max y Alex vieron varios gatos vagabundos. Cuando regresaron a casa hicieron algunas llamadas telefónicas y averiguaron que hay cerca de 1000 gatos vagabundos en la ciudad de Smithville y cerca de 1500 en la ciudad vecina de Jonesville. El área de Smithville es de 60 m^2 y la de Jonesville de 100 m^2. ¿Dónde es más probable ver un gato vagabundo? Explicá tu razonamiento.

La mayoría de los alumnos de ambas muestras resolvieron los problemas con trabajo de apoyo. En promedio entre el 80% y 90% de ambas muestras justificaron sus respuestas. Pero la calidad de la escritura fue importante. Los alumnos del CMP demostraron mucha más habilidad en escribir que los alumnos del grupo control. Obviamente este resultado puede atribuirse al hecho de que a los alumnos del CMP se les solicita más frecuentemente escribir y hablar acerca de sus ideas.

PROBLEMAS 1 Y 2:

Los dos primeros problemas requieren el mismo razonamiento referido a cantidad y costo. Sin embargo el primero requiere una comparación numérica mientras que el segundo consiste encontrar un valor que falta. En ambas muestras el desempeño en el valor que falta fue mejor que en la comparación numérica. El siguiente cuadro muestra los % de respuesta correcta con justificación.

	CMP	**Grupo CONTROL**
Dato faltante	72%	44%
Comparación numérica	57%	32%

Este resultado confirma las conclusiones de Tourniaire y Pulos acerca de que "comparar razones es un método avanzado y la habilidad para elegir la comparación más fácil aritméticamente se adquiere mucho después del dominar las técnicas proporcionales".

El desempeño de los alumnos en estos dos problemas no puede juzgarse estrictamente como resultado de la enseñanza escolar de la razón y la proporción. Generalmente los alumnos están familiarizados con esta clase de situaciones comparativas y tareas a través de la experiencia diaria y en la vida escolar. Esto es particularmente así para razones geométricas y proporciones. De hecho las investigaciones basadas en el trabajo de Piaget (Fuson, 1978) señalan que la realidad perceptiva visual de un chico es fuente de origen para la razón y la proporción. Asimismo algunos autores (Treffers, Streefland y otros, 1985) también sostienen que muchas estrategias y procesos de los alumnos se desarrollan independientemente de la enseñanza. Los chicos emplean naturalmente cierta intuición matemática o sistema de conocimiento informal. Sin embargo estos conceptos han sido enseñados en ambos currículos pero con diferente enfoque.

Se puede inferir razonablemente que el desempeño superior en los alumnos del CMP se debió, en parte, al entorno y al enfoque de la resolución de problemas con que se presenta el mismo.

<u>ESTUDIO DE UN MINI CASO:</u>

Los datos del porcentaje correcto, con o sin justificación, dan una primera imagen aproximada del desempeño de los alumnos en los problemas dados.

Para entender con más detalle el conocimiento del pensamiento proporcional adquirido por los alumnos con cada currículo, el autor reexaminó todos los papeles de los alumnos para identificar la variedad de abordajes empleados. En base al análisis del problema, las pruebas de los alumnos y las entrevistas individuales, se identificaron 9 estrategias diferentes para resolver el problema de comparación numérica.

<u>Estrategia 1</u>: "Comparar la razón de dos variables usando razón interna o un método funcional". En términos más familiares es la estrategia de la tasa unitaria, que se refiere al precio por unidad o unidad por precio. Esta estrategia fue frecuentemente empleada en ambas muestras y resultó a menudo correcta. Sin embargo es importante señalar que fue usada por el 65% de los alumnos del CMP y 24% del grupo control. Dado que a los alumnos del CMP no se les enseña ningún método específico para resolver problemas de razón, pareciera que la tasa unitaria surge naturalmente en alumnos que desarrollan estrategias propias.

Un ejemplo del trabajo de un alumno del CMP, cuya respuesta fue clasificada como "correcta con trabajo de apoyo correcto".

2.00 : 16 = 12.5 Gatorade – 12.5 c (centavos) precio unitario
1.60 : 12 = 13.3 jugo – 13.3 c precio unitario
No. Ellos no hicieron la mejor elección.

Otro ejemplo de un alumno del CMP que usó correctamente la operación matemática y el cálculo pero interpretó mal los resultados. Su respuesta fue clasificada como "incorrecta con comprensión parcial". Una explicación posible para su conclusión equivocada fue dada por un docente de grados medios quien hipotetizó que "usualmente para algunos alumnos el resultado mayor es el mejor".

2.00 : 16 = 0.125
1.60 : 12 = 0.133
Sí, hicieron la mejor elección.

Otro ejemplo de uso correcto de la unidad por precio:

16 : $2 = 8   12 : $1.60 = 7.5
No, porque por tu dinero te dan más Gatorade que jugo.

Otro ejemplo de un alumno del grupo control usando la unidad por precio. No es sorprendente que para este alumno haya sido difícil llegar a la conclusión correcta a partir de estos cálculos:

16 : $2 = 1/ 13 c
12 : $1.60 = 1/ $1.40
No, no hicieron la mejor elección.

<u>Estrategia 2</u>: "Comparar razones de la misma variable usando razones internas o método escalar".
Este es un ejemplo de respuesta incorrecta de un alumno del grupo control usando esta estrategia:

16 : $12 = 1R 4
200 : 1.60 = 1R 40
Sí, hicieron la elección correcta.

Su respuesta fue clasificada como "incorrecta con comprensión parcial". Usó la operación correcta, pero la forma de usar el resto fue un obstáculo para llegar a la conclusión correcta. Otra forma de ver esta estrategia inherente a esta respuesta es comparar las siguientes fracciones:

$$\frac{16 \text{ onzas}}{12 \text{ onzas}} = 1.333... = 4/3 \qquad \frac{\$2.00}{\$1.60} = 1.250 = 5/4$$

O comparar:

$$\frac{12 \text{ onzas}}{16 \text{ onzas}} = 0.75... = 3/4 \qquad \frac{\$1.60}{\$2.00} = 0.80 = 4/5$$

Mientras uno podría extraer una conclusión correcta a partir de cálculos apropiados de esta clase, dicha inferencia nos parece muchísimo más difícil que la estrategia 1, usando tasa unitaria. Si bien pocos alumnos trataron de usar la razón interna o estrategia escalar, ilustra la diversidad de procesos de pensamiento que los alumnos desarrollan y aplican a situaciones de proporcionalidad.

Estrategia 3: "Comparar el costo de la misma cantidad encontrando factor común o múltiplo común tal como precio por unidad".
Un alumno del CMP usó este tipo de estrategia así:

$$\frac{\$1.60}{3} = 0.533...$$

$\underline{+\ 0.53}$
2.13

Gatorade - $2.00 por 16 onzas.
Jugo - $2.13 por 16 onzas.
No, no hicieron la mejor elección.

Otro:
No,... por 48 onzas de Gatorade $6 y de jugo $6.40.

Nuevamente, lo que es más notable es la diversidad de maneras que los alumnos encontraron para razonar sobre estas relaciones.

Estrategia 4: "Comparar cantidades para un mismo costo encontrando un factor común o costo múltiplo común tal como *unidad por precio*". Por ejemplo, un alumno usó una estrategia de construcción y encontró que podía comprar 60 onzas de jugo por $8 y 64 onzas de Gatorade por $8. Por supuesto, se podría comparar para 40 centavos:

$2.00 : 5 = 40 c, entonces 16/5 = 3.2 onzas de Gatorade
$1.60 : 4 = 4 = 40 c, entonces 12/4 = 3 onzas de jugo

O encontrar la cantidad para $1:

$\frac{16}{2}$ = 8 onzas por $ Gatorade $\qquad\qquad$ $\frac{12}{1.60}$ = 7.5 onzas por $ jugo

Estrategia 5: "Estrategia de construcción". Un ejemplo del trabajo de un alumno que usó esta estrategia:

Gatorade		Jugo	
$	onzas	$	onzas
2.00	16	1.60	12
	32	3.20	24
6.00	48		36
		6.40	48

No, porque 48 onzas el Gatorade cuesta $6.00 y el jugo $6.40.

A pesar de que otros estudios han encontrado esta estrategia comúnmente en alumnos adolescentes, nosotros la encontramos en el trabajo de pocos. Esto podría deberse a que las razones no enteras involucradas en este problema no alienta el uso de esta estrategia, confirmándose así otro descubrimiento general que la estructura numérica de un problema influye en la elección de la estrategia de resolución. Otra explicación posible podría ser que la estrategia de construcción y aplicación de la tabla de razones no aparecen naturalmente en alumnos que desarrollan estrategias propias. Si este fuera el caso, se hace necesaria la enseñanza directa en cómo presentar y usar la tabla de razones. Streefland (1985)considera a la tabla de razones como una herramienta de esquematización durante un largo proceso de aprendizaje, y aparte de eso, como contribución para separarse del contexto y descubrir, hacer conciente y aplicar todas las propiedades que caracterizan a la razón y su uso en problemas numéricos.

Estrategia 6: "Considerar razones de diferencias entre las mismas variable". El trabajo de dos alumnos ilustra esta tentativa aritmética pero con un planteo equivocado de situaciones comparativas de razones.

2.00	16		16	2.00	
- 1.60	- 12		- 12	- 1.60	
0.40	4	No	4	40 c	Sí

Muchos otros alumnos de ambas muestras usaron más o menos la misma estrategia, pero no pudieron encontrar una explicación aceptable. Esta estrategia sugiere sumar más que multiplicar, y no demasiada comprensión de comparaciones significativas. Investigación previa encontró este error en esta estrategia tratando con problemas que involucran razones no enteras.

Nosotros encontramos el pensamiento aditivo (o sustractivo) en respuestas a otras tareas de comparación de razones. Por ejemplo, cuando se sabe el número de varones y mujeres en dos clases distintas y se pide comparar la distribución genérica de las clases, a menudo comparan simplemente la diferencia entre el número de varones y mujeres en las dos clases. Este tipo de evidencia del pensamiento aditivo cuando es más apropiado el multiplicativo, señala la importancia de desarrollar el pensamiento proporcional en los grados medios sobre la base de un trabajo en los grados elementales que enfatice la adición y la sustracción.

Estrategia 7: "Responder a los números pero no al contexto del problema". Estos ejemplos del trabajo de alumnos del grupo control ilustran, por un lado, un planteo sin sentido de los problemas aritméticos y por el otro, la capacidad de abandonar el contexto, lo que podría indicar un estadio adecuado de matematización (Freudenthal, 1983).

Sí	2.00 x 12 = 24 Gatorade
1.60 x 12 = 19.2	1.60 x 16 = 25.60 jugo
2.00 x 16 = 32	

Asumimos que estudiaron el método del producto cruzado con números desnudos, como es el caso en el currículo tradicional. Si bien es posible usar este método para problemas de comparación, el nivel de pensamiento necesario para interpretar correctamente los resultados es de un nivel superior.

Estrategia 8: "Referirse a una sola variable al ignorar parte de los datos dados en el problema". Obviamente esta es una estrategia errónea pero su simplicidad es extremadamente atractiva para los alumnos. Está ilustrada con los siguientes ejemplos:

- "*Sí, porque cada bebida que comprás es 40 centavos más barata, entonces estás ahorrando mucho dinero".*
- *"No, porque Gatorade es más barato porque tiene más onzas".*

De hecho este planteo erróneo señala la importancia fundamental de desarrollar la comprensión en el razonamiento proporcional: la necesidad de pensar una comparación entre dos números como una simple entidad (una razón o fracción) y operar simultáneamente con dos o más de tales comparaciones.

__Estrategia 9:__ "Respuestas afectivas a datos y preguntas numéricas". Identificamos dos clases de respuestas indicando que los alumnos no estaban centrando su atención en la pregunta comparativa "cantidad y precio". Por ejemplo:

- "Sí, porque no costó realmente mucho dinero".
- "Sí, fue bueno porque ahorraron 40 centavos",
- "No, Gatorade es más rico".
- "No, porque qué pasa si a algunos de los chicos no les gusta el jugo".

A veces en la vida real, las situaciones surgen donde las razones matemáticas para una solución no están en el presente de ciertas personas. Se podría argumentar que dichos alumnos eligieron una respuesta subjetiva citando otras razones no matemáticas en sus respuestas. Tales respuestas podían considerarse correctas si estaban apoyadas en razonamientos correctos. Por ejemplo cuando dijeron: "Sí", ellos hicieron la elección económicamente correcta ahorrando 40 centavos". Si hubieran agregado que a pesar de que Gatorade es más barato, sólo necesitaban 12 latas y las 4 extra se desperdiciarían, podríamos considerar esta respuesta correcta. Al menos estas respuestas sugieren la complejidad de la percepción de los alumnos que seguramente estará presente en alguna clase donde se estudien cuestiones de proporcionalidad.

Nuestro análisis detallado de las respuestas de los alumnos acerca del pensamiento comparativo Gatorade/jugo se corresponde con que los alumnos recurren a una gran variedad de estrategias, correctas e incorrectas, frente a estas tareas. Aún cuando aplicaron estrategias correctas, a menudo fallaron en alcanzar una solución correcta.

En nuestro estudio al comparar el efecto de la reforma y del currículo tradicional en los grados medios, fue especialmente interesante preguntar de qué manera la variedad y la eficacia de los planteos frente a los problemas de proporcionalidad están relacionados con los enfoques educativos fijados en los materiales del currículo y los planteos de enseñanza en las clases del CMP y del grupo control. Por ejemplo, uno podría ver la rica variedad de estrategias de resolución empleadas por los alumnos del CMP como resultado de la variedad de problemas presentados por el CMP. O quizás, ver esta variedad de estrategias, varias ineficaces y erróneas, y concluir que si a los alumnos se les enseñara directamente un algoritmo óptimo para las comparaciones de razones, su desempeño podría mejorar. Sin embargo nuestros datos sugieren una conjetura distinta. Los alumnos del CMP, quienes desarrollaron el pensamiento proporcional a través de problemas basados en investigaciones que alentaban la construcción personal de planteos flexibles frente a tales tareas, más que practicar un simple método algorítmico, lograron mejores resultados aplicando estrategias significativas y eficaces en las tareas dadas.

El planteo más eficaz al problema comparativo del precio Gatorade/jugo es probablemente el de la razón unitaria, y en nuestro estudio los alumnos del CMP emplearon esta estrategia mucho más a menudo que los alumnos del grupo control. Tourniaire y Pulos sostienen que el comparar razones al más alto nivel pareciera estar precedido por la elección del método más económico entre el funcional y el escalar. Karplus argumenta que la habilidad de usar la razón más fácil entre una razón escalar y una funcional es más avanzada que la habilidad de usar estrategias de multiplicación. Además, Post, Behr y Lesh consideran que el método de la razón unitaria posee mayor interés intuitivo. Así la enseñanza que alienta la construcción del pensamiento proporcional debiera también ayudarlos a encontrar la estrategia de eficacia óptima.

PROBLEMA 2:

En este problema las estrategias más comunes fueron pensar el precio de los paquetes, precios unitarios y combinaciones de estos métodos. Sin embargo hubo muchos alumnos que manipularon números de maneras que no reflejaron la estructura de la información dada o de la pregunta.

Encontramos que 82% de los alumnos del CMP usaron una estrategia basada en el precio del paquete, precio unitario, o una combinación de ambos; éstas fueron usadas por sólo el 62% de los alumnos del grupo control. Todos los alumnos aplicaron la misma estrategia para ambas partes del problema, y muy pocos lograron éxito en una parte y no en la otra.

Estrategia: por precio del paquete

a) 20 barras : 8 barras = 2.5 x $2.60 = $6.50 por 20 barras, porque 8 barras entra 20 2.5 veces. Entonces 2.5 barras más costarán 2.5 veces más. Yo multipliqué 2.5 x $2.60 (el costo) y fue igual a $6.50 para 20.	a) 20 barras de granola costarían $6.50. 8 barras cuestan 2.60 16 barras cuestan $5.20 4 barras cuestan $1.30 20 barras cuestan $6.50
b) 20 manzanas : 6 manzanas = 3.33 x $1.95 = $6.50 para 20 manzanas, porque cuando dividís 20 : 6 encontrás que 6 entra en 20 3.333 (31/3) veces. Lo que significa que el precio será 3.33 veces más. Entonces multiplicás 3.33 x $1.95 que es igual a $6.50.	b) 20 manzanas costarían $6.50. 6 manzanas cuestan $1.95 12 manzanas cuestan $3.90 18manzanas cuestan $5.85 2 manzanas cuestan 65 c 20 manzanas cuestan 6.50

Cramer y Post denominaron a este procedimiento “el factor de cambio”, Hart lo llamó estrategia “de construcción”. En este caso, el pensamiento de los alumnos es esencialmente aditivo cuando construyen la cantidad más grande a partir de la más pequeña con incrementos iguales. Si esto es un razonamiento multiplicativo, es ciertamente una forma temprana del mismo porque no podemos decir que los alumnos tuvieran una completa conceptualización del marco multiplicativo. Además aunque las razones no eran enteras, aún así ½ y 1/3 son las fracciones más familiares para tratar.

Estrategia: por precio unitario

a) $6.50, porque me figuré lo que costaba una barra de granola si 8 costaban $2.60. Entonces consideré lo que costaba una (32.5 c) y lo multipliqué por 20 barras de granola y obtuve $6.50. $2.60 : 8 barras = 0.325 x 20 = $6.50	a) Gastaron $6.50 2.60 : 8 x 20 = $6.50 0.325 precio unitario $6.50 precio total
b) $6.50 Yo lo sé porque me figuré lo que costaría una manzana y lo multipliqué por 20 y obtuve $6.50. $1.95 : 6 manzanas = 0.325 x 20 = $6.50	b) $6.50 1.95 : 6 x 20 = $6.50 0.325 precio unitario $6.50 precio total

Estrategia: una combinación de paquete y precio unitario

Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
a) 8: \$2.60 = aproximadamente 32 c una barra 8: 12 = 20 12 barras extras 8 : 8 = 16 \$2.60 + \$2.60 = \$5.20 4 barras extras 0.32 x 4 = \$1.28 5.20 + 1.28 = \$6.48 \$6.48 por 20 barras	a) 2.60 / 8 + 2.60 / 8 = 16 barras 5.20 2.60 : 8 = 32 c / barra + 0.12 = 4 barras 5.32 Respuesta: 5.32
b) \$1.95 : 6 aproximadamente 32 c por manzana, \$6.48 por 20 manzanas porque una manzana cuesta lo mismo que una barra y tenía 20 barras y 20 manzanas, entonces sería lo mismo	b) 1.95 / 6 1.95 : 6 = 0.3 1.95 / 6 = 12 barras 3.90 : 6 5.85 + 0.6 5.91

Estrategia: atender exactamente a los números: respuestas incorrectas con pensamiento incorrecto

a) 52. Yo multipliqué 2.60 por 20 y obtuve 52, 2.60 x 20 = 52	b) 39. Yo multipliqué 1.95 por 20 y obtuve 39. 1.95 x 20 = 39

<u>PROBLEMAS 3 Y 4:</u>

Ambos problemas requerían el mismo conocimiento de razón relacionado con distancia y tiempo (dados tiempo y distancia, comparar velocidades). No obstante en ambas muestras el desempeño de los alumnos en el primer problema fue considerablemente mejor que en el segundo.

	C M P	CONTROL
Problema 3	65%	34%
Problema 4	32%	7%

El segundo problema resultó más difícil porque contiene un número decimal y una fracción para el tiempo. Como lo muestra el siguiente análisis, los errores no pueden explicarse simplemente por la dificultad de los cálculos aritméticos.

Una cuidadosa revisión de los trabajos de los alumnos muestra que la mayoría de las respuestas incorrectas de ambas muestras provienen de una confusión entre distancia por unidad de tiempo y tiempo por unidad de distancia. En el primer problema muchos alumnos dividieron el número más grande (20 minutos) por el más chico (7 millas) obteniendo minutos por milla, y asumiendo que habían calculado millas por hora. Estos casos fueron señalados como “respuesta incorrecta con comprensión parcial”. Los siguientes son ejemplos de respuestas correctas e incorrectas del problema 3:

<u>Respuesta correcta</u>

Cozi

20 min : 5 millas = 4 min por milla

Alex

20 min : 7 millas = 3.57 por milla

Alex anduvo más rápido. Porque anduvo 0.43 min por milla más rápido.

El tuvo que recorrer un camino largo pero le llevó menos tiempo por milla.

<u>Respuesta incorrecta con comprensión parcial</u>
Cozi fue la más rápida.
Yo dividí 20 por 5 y obtuve 4 millas por minuto para Cozi.
Después dividí 25 por 7   3.5 millas por minuto.

Cozi 20 : 5 = 4 mph.
Alex 25 : 7 = 3.5 mph
Cozi anduvo más rápido.

<u>Responde exactamente a los números</u>
Cozi anduvo más rápido. $\frac{25}{5} = 5$, $\frac{20}{7} = 2.9$
Cozi recorrió más en 25 minutos que Alex en 20.

<u>Respuesta correcta con trabajo de apoyo incorrecto</u>
“Alex. Porque él llegó más lejos porque fue derecho.”

Uno podría especular que en el tratamiento tradicional, el número grande de millas dividido número pequeño de horas permite a algunos alumnos llegar a una respuesta correcta sin comprender lo que se está haciendo. Nuestros hallazgos sugieren que es necesario advertir a los docentes del uso de variedad de unidades de tiempo y distancia en problemas donde los alumnos desarrollen una clara comprensión de la relación estructural fundamental, no un patrón de memoria “número grande dividido número pequeño”. Por supuesto esta tentación de dividir el número más grande por el más pequeño está inducida por muchas otras experiencias en la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación y división. Claramente los alumnos del CMP se desempeñaron considerablemente mejor que los alumnos del grupo control. Los alumnos del CMP usaron la razón unitaria en ambos problemas, más a menudo que los del grupo control (54% a 27%). Esta estrategia se conoce por ser la más exitosa para este tipo de problemas. Inferimos que el desempeño superior de los alumnos del CMP es resultado del enfoque de la resolución de problemas presentado por el currículo CMP, donde los alumnos construyen en forma personal la comprensión de estructuras matemáticas claves más que practicar algoritmos formales. Parece importante dar tiempo a los alumnos para enfrentarse con estos desafíos fundamentales y compartir su pensamiento con otros alumnos y su docente en pequeño grupo y con toda la clase.

La importancia de pedir fundamentaciones puede verse en la categoría “respuesta correcta con trabajo de apoyo incorrecto”, especialmente en el grupo control. Por ejemplo, en el problema 4 más del 40% de los alumnos de este grupo contestaron correctamente que Max y Elisa anduvieron más rápidamente en el camino de regreso, pero sus razonamientos fueron generalmente incorrectos. Entonces, en un típico examen de matemática donde no se pida justificación de la respuesta, estos alumnos serían calificados correctamente pero sus concepciones erróneas no serían conocidas ni corregidas. Los siguientes ejemplos de alumnos del grupo control ilustran el problema:

- En el camino de regreso porque les llevó 45 minutos.

- 60 : 4 = 15 x 3 = 45 min.
  Después de almorzar cuando recorrieron un camino corto, porque ¾ de una hora es igual a 45 min.

Por otro lado recibimos muchas lindas soluciones para el problema 4 de los alumnos del CMP: Por ejemplo, los siguientes son los diferentes planteos de seis alumnos:

30 : 1.5 = 20 millas por hora para el paseo inicial. 20 : 0.75 = 26.6 millas por hora. Entonces lograron la mejor razón al final, 26.6 millas por hora frente a 20 millas por hora.	En la segunda parte porque les llevó sólo 2.25 para recorrer una milla mientras que el otro camino les llevó 3.00 por milla.	Regresando porque 30 : 1.5 ó 90 min= 0.3 de velocidad mientras que 20 : 45 min ó ¾ hora = 0.4 de velocidad.
En el camino de regreso porque les llevó sólo ¾ de hora recorrer 20 millas. En el otro camino les llevó una hora recorrer 20 millas. Allá 30 millas 1.5 horas 20 millas por hora	1.5 h : 2 = ¾ de hora 30 : 2 = 15 millas. Ellos tuvieron la mejor razón en el camino a casa porque recorrieron 15 millas en ¾ de hora mientras que en el otro camino recorrieron 20 millas en ¾ de hora.	30 : 90 = 0.33 (1.5 = 90 min) 20 : 45 = 0.44 Ellos anduvieron más rápido en el camino de regreso. 44 mph – camino de regreso 33 mph - allá

Es interesante notar que en el último ejemplo el alumno supo que el resultado 0.33 era millas por minuto y aún más, que era un decimal periódico. Sin embargo, más tarde lo convirtió en millas por hora multiplicando por 100 (antes que por 60) ignorando el decimal periódico.

Obviamente el contexto y la estructura numérica de la razón en los problemas 3 y 4 incluyendo el contenido continuo, la complejidad numérica y el tipo de factores reportados en la literatura, son variables causantes de la diferencia en el desempeño de los alumnos. Sin embargo parece poco probable que la familiaridad juegue un mayor rol en el rendimiento en estos problemas. Si así fuera, esto significa que los alumnos del CMP están más familiarizados con este contexto debido a los problemas del CMP currículo.

PROBLEMA 5:

En este problema, con densidad de gatos vagabundos en dos ciudades, se requiere una comparación numérica, y son usados números enteros aunque grandes. En comparación con el problema 3, el rendimiento para ambas muestras decreció drásticamente. El factor familiaridad podría ser una posible causa. Los alumnos de 7º grado están más familiarizados con autos, distancias y velocidad que con problemas de población, área y densidad. Una causa secundaria podría ser el tamaño relativamente grande de los números usados. Ambos factores mencionados anteriormente por diversos autores.

CONCLUSIONES

El propósito de este estudio fue comparar el razonamiento proporcional de alumnos de 7º grado con dos tipos bastante diferentes de experiencias curriculares (CMP reforma curricular y currículo tradicional). En particular, este informe se ha focalizado en la comparación numérica y en problemas de proporcionalidad donde falta un valor, con diferentes contextos y estructuras numéricas. Ambos grupos fueron evaluados a través de un examen escrito sobre problemas de razón. A continuación el 25% de cada muestra fue entrevistada para explorar su pensamiento en la prueba escrita y realizar algunas preguntas sobre proporcionalidad que incluían sólo datos numéricos sin contexto. Los autores de este informe reconocen la limitación al tratar sólo con los resultados de los problemas de razón, sin considerar el amplio repertorio de la proporcionalidad que incluye escala y otras pruebas sobre razón. Los resultados demuestran que los alumnos de la reforma, además de estar su desempeño por arriba de los alumnos del grupo control, fueron capaces de dar explicaciones escritas y orales de buena calidad acerca de su trabajo. Cuando se les pedía explicar o cómo lo sabés, agregaban apoyo escrito a sus respuestas.

Por supuesto, se puede ver los resultados y concluir que ambos, alumnos de la reforma y del currículo tradicional, tienen un largo camino por recorrer hasta lograr dominar las estrategias y habilidades básicas del razonamiento proporcional. De acuerdo con los resultados, un considerable porcentaje de alumnos de ambos grupos dio respuestas incorrectas, cerca de un 15% de todas las respuestas fueron clasificadas como “respuesta correcta con justificación incorrecta”, y el mismo porcentaje como “respuesta incorrecta con comprensión parcial”. Estas respuestas deberían alentarnos a interpretar con cuidado los resultados: algunos alumnos tienen un conocimiento basado en un razonamiento incorrecto mientras que otros tienen ideas buenas pero no tienen habilidad para completar su razonamiento.

A pesar de que los alumnos del CMP no mostraron procedimientos convencionales para resolver proporciones o probar razones por equivalencia, se desempeñaron exitosamente frente a los alumnos del grupo control y demostraron también habilidad para desarrollar una variedad de estrategias, incluyendo algunas de óptima eficacia, para tratar con razones y cálculos proporcionales. Nuestra hipótesis acerca de este desempeño superior podría atribuirse al enfoque de la resolución de problemas inherente al discurso del CMP currículo. En este currículo se alienta a los alumnos a construir su propia comprensión y sus propios procedimientos para el cálculo con números racionales, resolución de proporciones, y a aplicar estas destrezas en la resolución de problemas. Aún así habría más factores que podrían haber influido en el desempeño de los alumnos del CMP. El CMP currículo incluye ocho unidades por grado, 6º y 7º, que cubren un amplio campo de temas junto a los que tratan con números racionales, proporciones y sus aplicaciones. Uno de los principales rasgos del CMP currículo es la conexión entre las unidades, factor importante para la adquisición del conocimiento en el dominio de los números racionales. Otro factor es el nivel de preparación y los antecedentes de los docentes del CMP versus los docentes tradicionales.

Dado que esta fue la primera vez que los docentes del CMP enseñaron con los nuevos materiales, los resultados son alentadores y promisorios.

IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

A través de este estudio identificamos muchas resistencias y dificultades con que tropezaron los alumnos de ambas muestras al tratar con los conceptos de proporcionalidad y sus aplicaciones. Acordando con estudios anteriores sobre la comprensión de los adolescentes de la proporcionalidad, los hallazgos de este estudio señalan el poder y el uso predominante de la razón unitaria en tales problemas. También encontramos evidencias que confirman las conjeturas sobre los efectos de la estructura numérica y la familiaridad del contexto en la dificultad de la tarea. Pareciera que ambos, complejidad de los números y contexto, debieran ser más considerados en los materiales del currículo y en la enseñanza.

Cuando entrevistamos a docentes de 7º grado (del CMP y del tradicional), todos manifestaron interés sobre la enseñanza de este complejo tema de proporcionalidad. Varios autores han concluido que no existe un patrón lineal de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad. No obstante, hace tiempo, Freudenthal había recomendado enérgicamente que el proceso de aprendizaje de razón y proporcionalidad debería conducirse de forma tal que las fuentes de insights (conocimientos intuitivos) no obstaculicen el proceso de algoritmización y automatización. Esto puede lograrse retornando una y otra vez durante el proceso de algoritmización y automatización, y aún después a los conocimientos intuitivos. Por eso Streefland respondiendo al largo proceso de aprendizaje de razón y proporción, esbozó ingredientes de una teoría explicativa de enseñanza y aprendizaje a través de específicas actividades ejemplificadoras, modelos y esquemas visuales originales. Por lo tanto parece esencial trabajar sobre la enseñanza de la proporcionalidad durante varios años de los grados medios. Nuestros hallazgos apoyan estas ideas.

En todos los casos se alienta la variedad de estrategias y formas de resolución que los alumnos encuentran para resolver los problemas. Los alumnos de 7º grado, a los que se les ha dado tiempo para explorar y discutir situaciones aritméticas/problemas de proporcionalidad, son capaces de desarrollar su propio repertorio de herramientas significativas para producir soluciones y explicaciones originales. La enseñanza debiera sacar ventaja de la construcción de este repertorio y continuar extendiéndolo dentro del dominio de la proporcionalidad.