EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA COMO UN TRABAJO EN PROGRESO

Marja van den Heuvel-Panhuizen

(En F. L. Lin (Ed.) Common Sense in Mathematics Education, 1-43.
Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference

Resumen

Esta conferencia trata varias cuestiones "en curso" relacionadas con el enfoque holandés de la educación matemática, llamada "Educación Matemática Realista" (EMR). La más importante de estas cuestiones es la manera en que la EMR facilita el progreso de la comprensión de los niños en matemática. Se pone atención tanto en la perspectiva micro como macro-didáctica del desarrollo de los estudiantes. El progreso en logro como el resultado de este aprendizaje es el próximo tema a tratar. Finalmente, los reflectores se dirigen a los desarrollos de la EMR misma. El foco general en la lectura está en la educación matemática en la escuela primaria.

1. *Introducción*

La EMR en resumen

La Educación Matemática Realista, o EMR, es la respuesta holandesa a la necesidad, sentida mundialmente, de reformar la enseñanza de la matemática. Las raíces del movimiento de reforma holandés se remontan a los comienzos de los setenta, cuando fueron conceptualizadas las primeras ideas de la EMR. Fue una reacción, tanto a la "Nueva Matemática" americana, la cual estaba inundando nuestro país en esos días, como al enfoque prevaleciente en la educación matemática, a menudo conocido como "educación matemática mecanicista".

Desde los primeros días de la EMR se ha realizado mucho trabajo de diseño conectado con la investigación en desarrollo (o investigación para el diseño). Si algo hay que aprender de la historia holandesa de la reforma de la educación matemática, es que tal reforma lleva tiempo. Parece una afirmación superflua, pero no lo es. Una y otra vez se oyen pensamientos demasiado optimistas sobre innovaciones educativas. Nuestra experiencia es que las reformas en educación llevan tiempo. El desarrollo de la EMR lleva treinta años y todavía lo consideramos un "trabajo en construcción".

Sin embargo, que lo veamos de esta manera no solo tiene que ver con el hecho de que hasta ahora la lucha contra el enfoque mecanicista de la educación matemática no ha triunfado completamente, especialmente en la práctica áulica; mucho trabajo tiene que hacerse aún al respecto. Más determinante para el continuo desarrollo de la EMR es su carácter propio, inherente a la EMR y su idea fundante de la matemática como una actividad humana, es que nunca puede ser considerada como una teoría fija y terminada de educación matemática.

Cuestiones a tratar sobre la idea de "progreso"

Esta característica de auto-renovación de la EMR fue una razón importante para elegir "trabajo en progreso" (*work in progress*) como título para esta conferencia. Pero hay más razones para esta elección. El título también se refiere a otra característica significativa de la EMR, es decir, su foco en el desarrollo del conocimiento de los niños y de su comprensión de la matemática.

La manera en que la EMR continuamente trabaja en el avance de los niños es la primera cuestión de *progreso* a ser tratada en esta conferencia. Este progreso se distingue en dos niveles de trabajo en el desarrollo matemático. Se pone atención tanto en la perspectiva micro-didáctica como macro-didáctica del desarrollo de los niños. La perspectiva micro-didáctica clarifica cómo dentro del contexto de una o dos lecciones pueden darse cambios en la comprensión y habilidades. En este proceso, tienen un rol clave los modelos que se originan en las situaciones en contexto y que funcionan como puentes para niveles superiores de comprensión. La perspectiva macro-didáctica se relaciona con el progreso en la comprensión durante un período más largo de tiempo. El foco aquí está sobre las trayectorias de enseñanza-aprendizaje, que incluyen los objetivos de logro intermedios a ser alcanzados al final de la escuela primaria y los puntos de referencia a lo largo de la trayectoria, que sirven como un marco longitudinal para enseñar matemática. La coherencia entre varios niveles de comprensión matemática que se evidencia en la descripción de esta trayectoria, juega un rol clave estimulando el desarrollo de los niños.

Otra cuestión de progreso tiene que ver con los logros de los estudiantes en matemática. La pregunta es si la EMR condujo a los estudiantes primarios holandeses al nivel más alto de logros matemáticos. Aunque los resultados del TIMSS y los resultados de otros estudios comparativos lo están sugiriendo, hay también argumentos en contra.

Finalmente, la conferencia se refiere al progreso en el enfoque de la EMR en la educación matemática. Aunque esta mirada tiene casi treinta años, todavía está "en construcción".

2. Más sobre la EMR

Historia y principios fundantes

Como he dicho ya, hace casi treinta años comenzó el desarrollo de la que ahora es conocida como EMR. Freudenthal y sus colegas pusieron las bases para ello en el ex IOWO, predecesor del Instituto Freudenthal. El impulso actual para el movimiento de reforma fue el inicio, en 1968, del proyecto Wiskowas iniciado por Wijdeveld y Gofree. La forma actual de la EMR ha sido determinada principalmente por la visión de Freudenthal (1977) sobre la matemática. Según él, la matemática debe estar conectada a la realidad, permanecer cercana a los niños y ser relevante para la sociedad con el fin de ser un valor humano. En lugar de ver a la matemática como una disciplina que tiene que ser transmitida, Freudenthal subrayó la idea de la matemática como una actividad humana. La educación debería dar a los estudiantes la oportunidad "guiada" de "reinventar" la matemática, haciéndola. Esto significa que en la educación matemática, el foco no debería estar en la matemática como un sistema cerrado sino como una actividad, es decir, en el proceso de matematización (Freudenthal, 1968). Más tarde,Treffers (1978, 1987) formuló la idea de dos tipos de matematización, explícitamente en un contexto educativo, y distinguió matematización "horizontal" y "vertical". En amplios términos, estos dos tipos de matematización pueden ser entendidos así. En la matematización horizontal, los estudiantes proponen herramientas matemáticas que pueden ayudar a organizar y resolver un problema localizado en una situación de la vida diaria. La matematización vertical es el proceso de reorganización dentro del sistema matemático mismo, como por ejemplo, encontrar atajos y descubrir conexiones entre conceptos y estrategias, y luego aplicar estos descubrimientos. En breve, se podría decir – y aquí estoy citando a Freudenthal (1991)- la "matematización horizontal implica pasar del mundo de la vida al mundo de los símbolos, mientras que la matematización vertical supone moverse dentro del mundo de los símbolos". Aunque esta distinción parece no ser ambigua, no significa, como Freudenthal (ibid) dijo, que la diferencia entre estos dos mundos sea clara. Freudenthal (ibid.) también subrayó que estas dos formas de matematización son de igual valor, además hay que tener en cuenta que la matematización se puede dar a diferentes niveles de comprensión.

Malentendido del término "realista"

A pesar de esta afirmación abierta sobre matematización horizontal y vertical, la EMR pasó a llamarse "educación matemática del mundo real". Esto fue así especialmente fuera de los Países Bajos, pero la misma interpretación puede también encontrarse en nuestro propio país. Debe admitirse que el nombre "Educación Matemática Realista" es algo confuso al respecto. La razón, sin embargo, de por qué la reforma holandesa de la educación matemática fue llamada "realista", no solo es la conexión con el mundo real sino que está relacionado con el énfasis que pone la EMR en ofrecer a los estudiantes situaciones problemáticas que puedan imaginar. La traducción holandesa del verbo "imaginar" es "zich REALISEren". Este énfasis en hacer algo real en sus mentes fue lo que dio a la EMR su nombre. En relación con los problemas a ser presentados a los estudiantes, esto significa que el contexto debe ser del mundo real, aunque no siempre es necesario que sea así. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas e incluso el mundo formal de la matemática pueden ser contextos muy adecuados para un problema, siempre y cuando sean reales en la mente del estudiante.

El enfoque realista versus el enfoque mecanicista

De todas maneras, el uso de problemas en contexto es muy significativo en la EMR. Esto contrasta con el enfoque tradicional mecanicista de la educación matemática, donde los programas en su mayoría solo contienen problemas con números puros. Si bien en el enfoque mecanicista se usan problemas en contexto, en general son usados para concluir el proceso de aprendizaje. Los problemas en contexto funcionan solamente como un campo de aplicación. Resolviendo estos problemas, los estudiantes pueden aplicar lo que han aprendido antes en forma pura. En la EMR esto es diferente. Aquí, los problemas en contexto funcionan también como una fuente para el proceso de aprendizaje. En otras palabras, en la EMR los problemas en contexto y las situaciones de la vida real son usados tanto para integrar como para aplicar conceptos matemáticos. Trabajando sobre los problemas en contexto, los estudiantes pueden desarrollar herramientas matemáticas y la comprensión. Primero, desarrollan estrategias muy conectadas al contexto, después ciertos aspectos de la situación pueden hacerse más generales, lo que significa que el contexto puede adquirir más o menos el carácter de un modelo, y como tal, dar apoyo para resolver otros problemas relacionados. Eventualmente, los modelos permiten a los estudiantes acceder a un conocimiento matemático más formal. Para cumplir la función de puentes entre el nivel informal y formal, los modelos tienen que cambiar de "modelo de" a "modelo para".

Hablar sobre este cambio no es posible sin pensar en nuestro colega Leen Streefland, que murió en 1998, quien en 1985 detectó este mecanismo crucial en el desarrollo de la comprensión[1]. Su muerte significó una gran pérdida para el mundo de la educación matemática.

Otra diferencia notable entre la EMR y el enfoque tradicional de la educación matemática es el rechazo a la manera de enseñar, mecánica y centrada en procedimientos, en la cual el contenido a aprender se descompone en pequeñas partes sin sentido y donde se presentan a los estudiantes determinados procedimientos de resolución a ser practicados por medio de ejercicios, a menudo a ser hechos individualmente. La EMR, por el contrario, tiene una conceptualización del aprendizaje más compleja y significativa. Los estudiantes, en lugar de ser receptores de una matemática ya hecha, son considerados activos participantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en el cual desarrollan herramientas matemáticas y comprensiones. Al respecto, la EMR tiene mucho en común con la educación matemática basada en el socio-constructivismo. Otra similitud entre los dos enfoques de la educación matemática es que para la enseñanza de la EMR es crucial que se ofrezcan a los estudiantes oportunidades para compartir sus experiencias con otros.

Con esto concluye una breve descripción de las características de la EMR. Ahora, continuaré con la cuestión del progreso en comprensión y comenzaré con la perspectiva micro-didáctica.

3. Progreso en comprensión – la perspectiva micro-didáctica.

En esta sección, se discuten varios aspectos de la EMR que apoyan y promueven cambios a niveles más altos de comprensión.

3.1. *Esquematización progresiva*

Para el primer ejemplo, tenemos que ir al dominio de los algoritmos y regresar a los primeros años de la EMR. En los inicios de los ochenta, en las aulas holandesas de 4° grado era costumbre que, por ejemplo, la división larga se enseñara comenzando a explicar el procedimiento con números pequeños e incrementando gradualmente el grado de dificultad. Se enseñaba a los estudiantes la división larga de acuerdo al método de "complejidad progresiva" (ver Figura 1).

[1] Streefland (1985). Más tarde, esta idea de cambio en los modelos se convierte en un elemento significativo en el pensamiento de la EMR sobre el progreso en la comprensión matemática de los estudiantes. (ver Streefland, 1991; Treffers,1991; Gravemeijer,1994; van den Heuvel-Panhuizen,1995).

```
2 / 6 \ 3     3 / 72 \ 24     5 / 342 \ 68
    6             6               30
    0            12                42
                 12                40
                  0                 2
```

Figura 1 Enseñanza de la división larga de acuerdo al método de complejidad progresiva.

Contrario a este abordaje, la EMR defendió la "esquematización progresiva" como el precepto conductor para organizar una unidad de enseñanza sobre algoritmos. En este enfoque, los estudiantes tienen que enfrentarse con números grandes inmediatamente, como en el caso del problema de los *Stickers* [2](ver Figura 2).

342 stickers se distribuyen entre cinco niños. ¿Cuántos le corresponden a cada uno?

Figura 2. Problema de los stickers

Este método de "esquematización progresiva" implica que 342÷ 5 no se sitúa en la etapa final del proceso de aprendizaje de la división larga sino al comienzo de la misma. Los estudiantes pueden resolver estos problemas difíciles desde el principio por el contexto en que son presentados. El contexto del "reparto equitativo" permite que tengan acceso a problemas como estos. Al comienzo, los estudiantes pueden aplicar una estrategia natural de reparto. Matemáticamente significa resolver una resta reiterada (ver Figura 3).

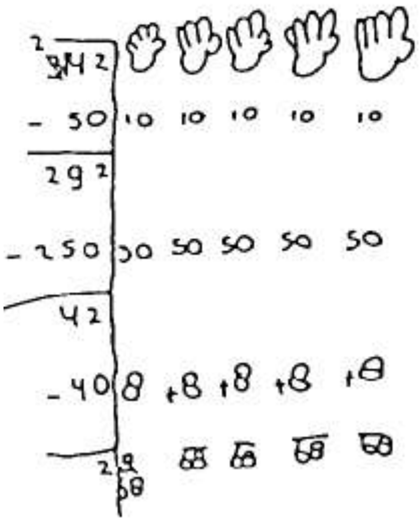


Figura 3. Haciendo la división larga por resta reiterada[3]

Más tarde, esta estrategia de resta reiterada, en la que cada vez se reparte un número pequeño de stickers, puede abreviarse haciendo un reparto más eficientemente, en menos pasos, tomando

[2] Este problema, o variantes de él, pueden encontrarse en Dekker, Ter Heege, and Treffers, 1982; Treffers and Goffree (1985); Treffers (1987). Al mismo tiempo, un problema distinto también fue usado para el aprendizaje de la división larga, en decir, el problema de los *Admiradores de fútbol* (see Gravemeijer, 1982). En este problema, los estudiantes tienen que encontrar cuántos colectivos son necesarios para transportar un gran número de fanáticos a un partido de fútbol. Comparado con el problema de los *Stickers*, el de los *Admiradores* contiene más información de contexto para tener en cuenta para responder la pregunta. Otra mayor diferencia es que el problema de los *Stickers* implica división por distribución (repartir), mientras que el de los *Admiradores* incluye la división por partición (partir). Posteriormente, este último fue considerado como más apropiado en el inicio del proceso de la división larga.

[3] La ilustración del trabajo del alumno se tomó de Rengerink (1983).

números más grandes. De esta manera, los estudiantes llegan gradualmente al procedimiento estándar de la división larga[4](ver Figura 4).

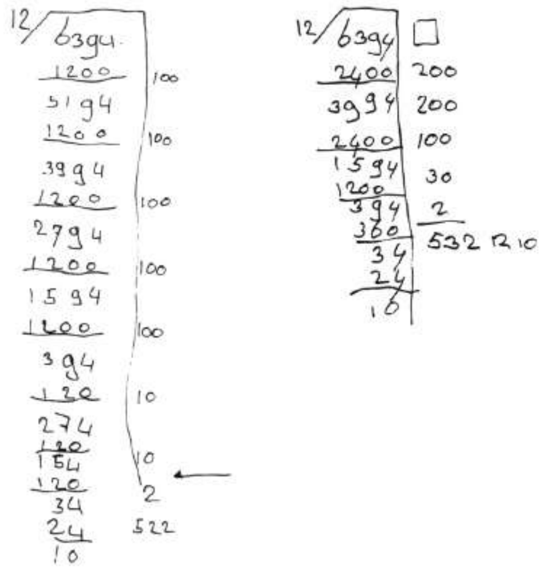


Figura 4: Esquematización progresiva en la división larga

Este enfoque de esquematización progresiva, ilustrado aquí por un ejemplo de división larga, constituyó cuando se formuló, un quiebre real con el pasado. En lugar de incrementar paso a paso la complejidad de los problemas, siguen siendo los mismos y las estrategias se vuelven más y más avanzadas. En otras palabras, el crecimiento de los estudiantes básicamente es una parte de las estrategias aplicadas y, en esencia, no está motivado por la oferta de problemas con complejidad creciente. Hay varias ventajas de este enfoque: los estudiantes pueden resolverlos a su nivel, pueden comenzar a un nivel informal conectado al contexto y, en el aula, los diferentes niveles están todos "al alcance de la mano".

3.2 *Los contextos como vehículos para el crecimiento*

Mientras el problema de los Stickers clarificó cómo un contexto puede dar a los estudiantes pistas para desarrollar estrategias, permitiendo el uso de un procedimiento informal de resta reiterada como una etapa previa a la estrategia estándar de la división larga, el siguiente ejemplo demuestra con más fuerza, el rol del contexto en la construcción del conocimiento matemático. Este ejemplo incluye el contexto de un colectivo urbano[5]. El problema del *Colectivo,* que está basado en este contexto, resultó ser un poderoso entorno de aprendizaje para los primeros grados. Primero de todo, ofrece oportunidades a los estudiantes para desarrollar un lenguaje matemático formal. La enseñanza comienza con una situación de la vida diaria, en la cual los estudiantes tienen que actuar como el chofer de un colectivo. Los pasajeros suben y bajan del colectivo, y en cada parada tienen que determinar el número de pasajeros en él. Después, lo mismo se hace en papel (ver la hoja de trabajo en la Figura 5).

[4] La ilustración del trabajo del estudiante se tomó de Dekker, Ter Heege, and Treffers (1982).
[5] El uso del contexto del colectivo fue una idea de van den Brink.

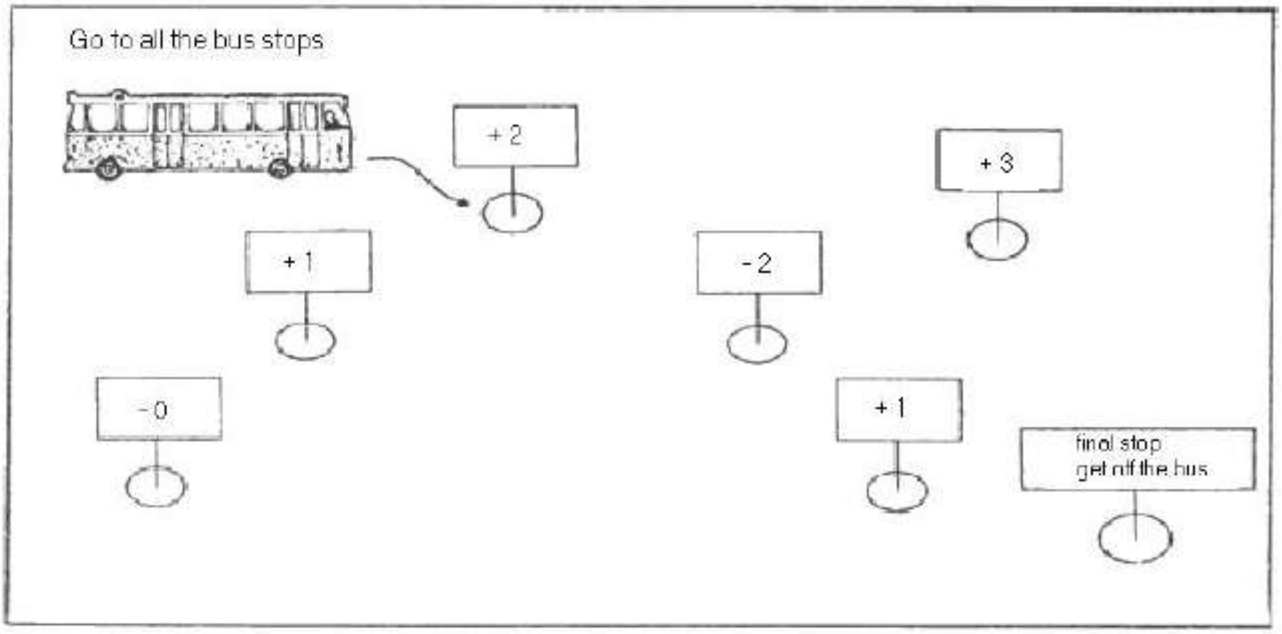
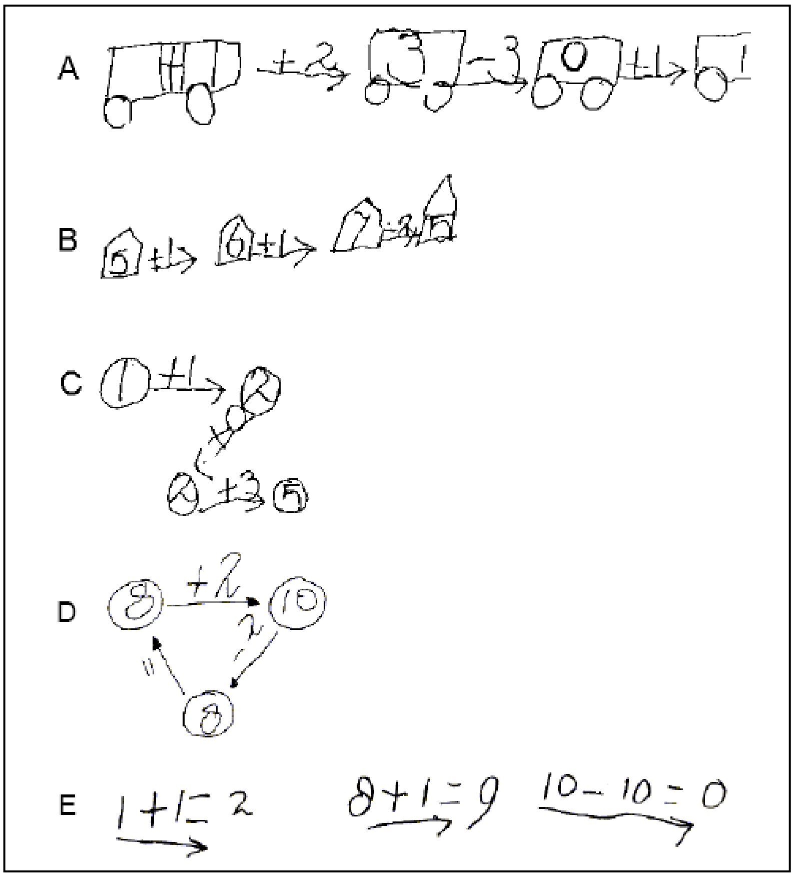


Figura 5. Problema del colectivo[6]

El desarrollo del lenguaje matemático es provocado por la necesidad de no perder de vista lo que ocurrió durante el trayecto del colectivo. Inicialmente, el lenguaje está estrechamente conectado al contexto pero más adelante se usa también para describir otras situaciones. Gradualmente, el contexto del colectivo pierde su característica narrativa y toma el carácter de un modelo. El siguiente trabajo de un estudiante (ver Figura 6) refleja cómo el lenguaje matemático conectado al contexto puede evolucionar progresivamente a un lenguaje matemático formal más general.



[6] La ilustración es una versión adaptada de van den Brink (1989).

Figura 7. Trabajo de un estudiante sobre el problema del colectivo[7]

Lo que comenzó como un registro conectado al contexto de la historia del colectivo (A), más adelante se usa para operaciones numéricas en otros contextos, por ejemplo, no perder de vista los clientes que hay en un negocio (B) y para expresar operaciones con números puros (C y D)[8]. En E es visible la transición a la manera estándar de registrar las expresiones numéricas.

Además de ofrecer a los estudiantes un entorno de aprendizaje para desarrollar un lenguaje matemático formal que tenga sentido para ellos, el contexto del colectivo – y en particular el de la parada del colectivo- también es muy apropiado para provocar razonamiento matemático. Evidencia para esta conveniencia fue iluminada por la investigación en desarrollo sobre números negativos realizada por Streefland (1996). En una clase de 5°/6° grado en Holanda, presentó a los estudiantes – que nunca antes habían tratado con números negativos- el problema que está ilustrado en la Figura 8 y les preguntó primero cuántos pasajeros había en el colectivo después de la parada. Luego les planteó la pregunta desafiante de, con el mismo resultado, qué más podría haber pasado en la parada en términos de pasajeros. La Figura 9 muestra cómo los estudiantes resolvieron esta cuestión.

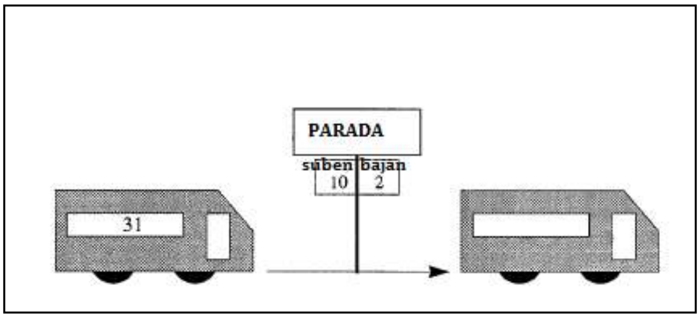


Figura 8. Subiendo y bajando del colectivo

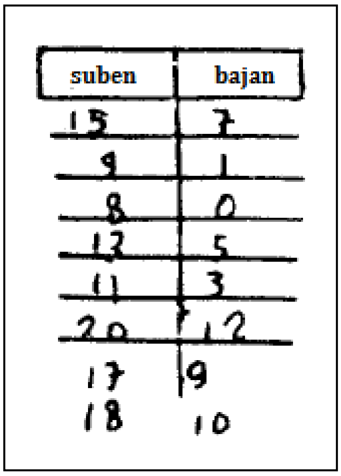


Figura 9. Historias de la parada del colectivo

Más tarde en la lección, los estudiantes podían incluso usar el modelo de la parada del colectivo para generar problemas con un número de inicio y un resultado fijos (ver Figura 10).

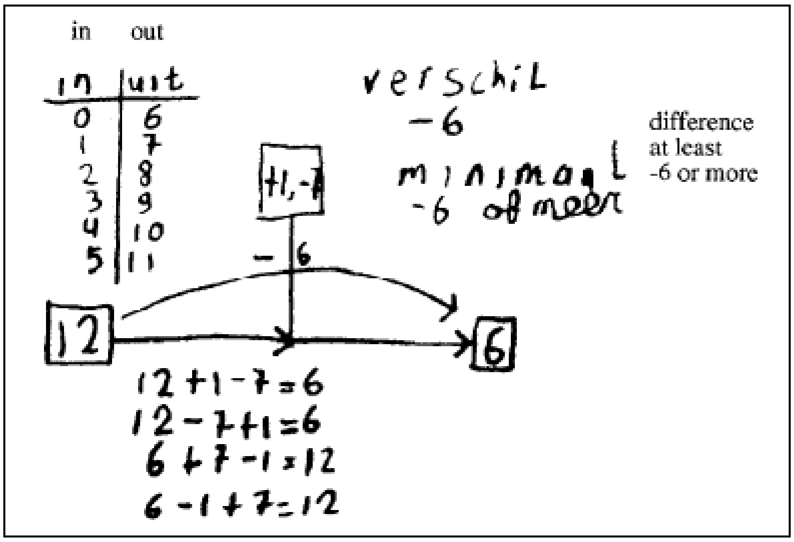


Figura 10. Problemas generados por un estudiante basados en la experiencia con el contexto de la parada del colectivo.

[7] Ilustración tomada de van den Brink (1989)
[8] Aunque en (C) se usan números puros, la forma de la notación traiciona ya que todavía representa una operación con números en contexto.

El colectivo y la parada del colectivo son un ejemplo de cómo experiencias de la “vida diaria” pueden alentar el crecimiento en la comprensión matemática. Comparado con el contexto de los stickers, este contexto evoluciona a un *modelo para* apoyar el pensamiento matemático. Un importante requerimiento para que los modelos funcionen de esta manera es que estén arraigados en situaciones concretas y que sean también lo suficientemente flexibles para ser usados en niveles más altos de actividades matemáticas. Esto quiere decir que los modelos proveerán a los estudiantes de puntos de apoyo durante el proceso de matematización vertical, sin obstaculizar el regreso a la fuente.

3.3. *Los modelos conectados como columna vertebral del progreso*

Como ya se hizo visible en los ejemplos anteriores, el progreso implica que los estudiantes llegan a soluciones más generales a partir de soluciones relacionadas con el contexto. Los contextos que tienen el potencial de modelos, sirven como una ayuda importante para sortear esta brecha entre la matemática informal y la matemática más formal. Primero, los estudiantes desarrollan estrategias estrechamente conectadas al contexto. Después, ciertos aspectos del contexto pueden hacerse más generales, lo que significa que el contexto más o menos adquiere el carácter de un modelo y como tal, puede dar apoyo para resolver otros problemas relacionados. Eventualmente, los modelos dan a los estudiantes acceso a un conocimiento matemático más formal.

Con el fin de hacer el cambio del nivel informal al nivel formal posible, los modelos tienen que modificarse de un “modelo de” una situación particular (por ejemplo, un esquema que representa la situación de los pasajeros que suben y bajan del colectivo en la parada) a un “modelo para” toda clase de otras situaciones equivalentes, (por ejemplo, un esquema que puede ser usado para expresar la concurrencia a un negocio, pero que también para encontrar pares de números que dan el mismo aumento o disminución como resultado)[9].

Este rol importante de los modelos tiene que ver con el principio de niveles de la EMR. Este principio implica que el aprendizaje matemático es considerado como un paso a través de varios niveles de comprensión: desde la habilidad de inventar soluciones informales relacionadas con el contexto, a la creación de varios niveles de abreviaturas y esquematizaciones, a comprender los principios subyacentes e incluso, el discernimiento de relaciones más amplias. Fundamental para llegar al próximo nivel es la capacidad de reflexionar sobre las actividades llevadas a cabo en el nivel anterior[10]. Esta reflexión puede ser provocada por la interacción. Volveré sobre esto más tarde.

La fuerza del principio de niveles es que guía el crecimiento en la comprensión matemática dando al currículum una coherencia longitudinal. Esta perspectiva a largo plazo es una característica de la EMR. Hay un fuerte foco sobre la relación entre lo que ha sido aprendido antes y lo que será aprendido después. Esto también significa que el uso de modelos no debería considerarse como actividades aisladas. Por el contrario, el poder progresivo de los modelos está basado en las conexiones entre ellas. Cuanto más tiempo un modelo, o adaptaciones de él, pueda mantener el ritmo con el desarrollo de la comprensión matemática, tanto más puede apuntar y provocar el progreso del estudiante.

Un poderoso ejemplo de tal modelo “longitudinal” es la línea numérica. La Figura 11 muestra las diversas maneras en que la línea numérica puede aparecer en las diferentes etapas del proceso de aprendizaje.

---

[9] Para obtener más información sobre la idea de “modelo de” y “modelo para” ver Sección 2 de este documento y la Nota 1.

[10] Esta idea de la reflexión acumulada se basó en el trabajo de los van Hiele (ver Freudenthal, 1991).

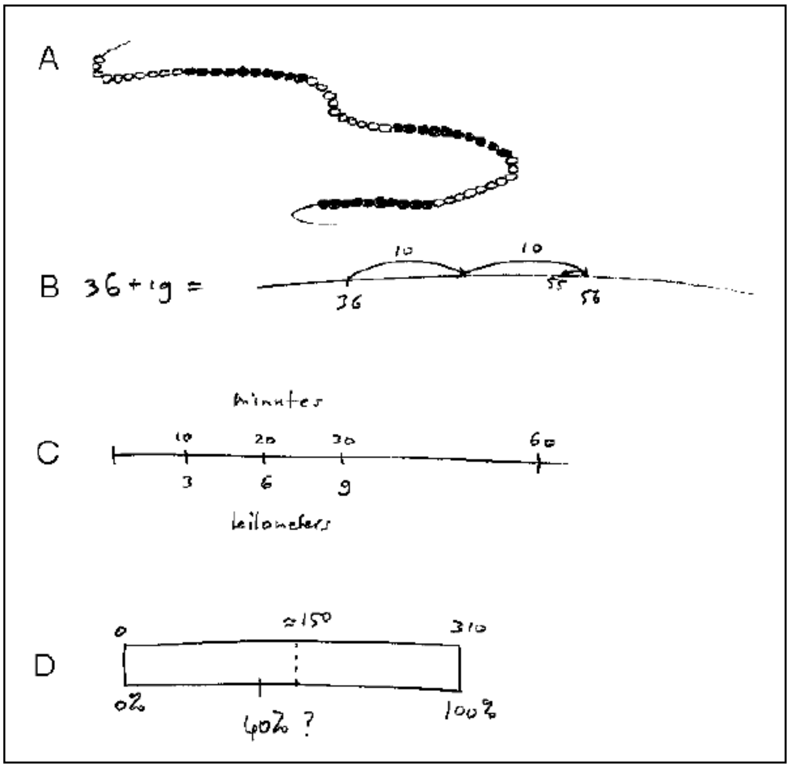


Figura 11. Diversas maneras en que puede aparecer la línea numérica.

La línea numérica empieza en primer grado como (A) un collar de bolitas en el cual los estudiantes pueden practicar todo tipo de actividades de conteo. En los grados más altos, esta cadena de bolitas sucesivamente se convierte (B) en una línea numérica abierta (o vacía) para apoyar sumas y restas, (C) una línea numérica doble para problemas sobre razones, y finalmente (D) una barra de fracciones/porcentajes para apoyar el trabajo con fracciones y porcentajes.

3.4. La enseñanza interactiva con toda la clase como una palanca

Aparte de los modelos que impulsan el progreso, los métodos de enseñanza son también una palanca importante para que los estudiantes hagan avances en la comprensión matemática.

Dentro de la EMR, el aprendizaje de la matemática es considerado una actividad social. Basado en esta idea, el *principio de interacción* es una de las principales características de la EMR. La educación debería ofrecer a los estudiantes oportunidades para compartir unos con otros sus estrategias e invenciones. Al escuchar lo que otros han descubierto y discutiendo estos hallazgos, los estudiantes pueden mejorar sus estrategias. Además, la interacción puede provocar reflexión, la cual es necesaria para alcanzar un nivel más alto de comprensión.

El significado del principio de interacción implica que la enseñanza con toda la clase juega un rol importante en el enfoque de la EMR. Sin embargo, esto no significa que toda la clase funcione colectivamente y que cada estudiante siga el mismo camino y alcance el mismo nivel de desarrollo en el mismo momento. Por el contrario, dentro de la EMR los niños son considerados como individuos, cada uno sigue su propio recorrido de aprendizaje. Esta visión sobre el aprendizaje, a menudo se traduce en la división de las clases en grupos pequeños de estudiantes que siguen sus propias trayectorias. Sin embargo, en la EMR existe una fuerte preferencia de mantener la clase junta como una unidad de organización[11], y de adaptar la educación a los diferentes niveles de habilidad de los estudiantes. Lo cual puede hacerse presentándoles problemas que puedan resolverse a diferentes niveles de comprensión.

[11] Dentro de la modalidad de mantener al grupo junto, pueden aplicarse una variedad de métodos de enseñanza: desde la enseñanza con toda la clase al trabajo grupal y trabajo individual.

El siguiente ejemplo incluye una lección[12] en la cual se concretiza el principio de interacción de la EMR. El mismo da una impresión de cómo el encuadre de toda la clase puede contribuir al progreso de los estudiantes en las estrategias matemáticas aplicadas. El punto de partida es la exploración de un problema en contexto, el que - y es muy esencial - puede ser resuelto a diferentes niveles de comprensión. Discutiendo y compartiendo en clase sus estrategias de solución los estudiantes, quienes resolvieron primero el problema con una estrategia bien amplia, pueden alcanzar un nivel más alto de comprensión y así lograr nuevos conceptos matemáticos.

La escena es en una clase de tercer grado. Los estudiantes tienen entre ocho y nueve años. El docente comienza con la presentación del problema, llamado *Reunión de padres* (ver Figura 12).

"…*Esta noche se realizará una reunión de padres…*
…Según las notas que recibí, asistirán 81 personas…
…La reunión se llevará a cabo en el salón de conferencias…
…Los padres se sentarán en mesas grandes…
En cada mesa pueden sentarse 6 personas…"
Luego, el docente hace un dibujo de una mesa en el pizarrón.

Después de hacerlo, el docente termina con la siguiente pregunta: "¿Cuántas mesas necesitamos para 81 personas?".

Los estudiantes comienzan a trabajar y el docente camina por la clase, ayudándolos siempre que sea necesario. Después de diez minutos, les pide que muestren su trabajo y expliquen sus soluciones.

Badr dibujó tantas mesas como necesitaba para que todos los padres estuvieran sentados (ver Figura 13).

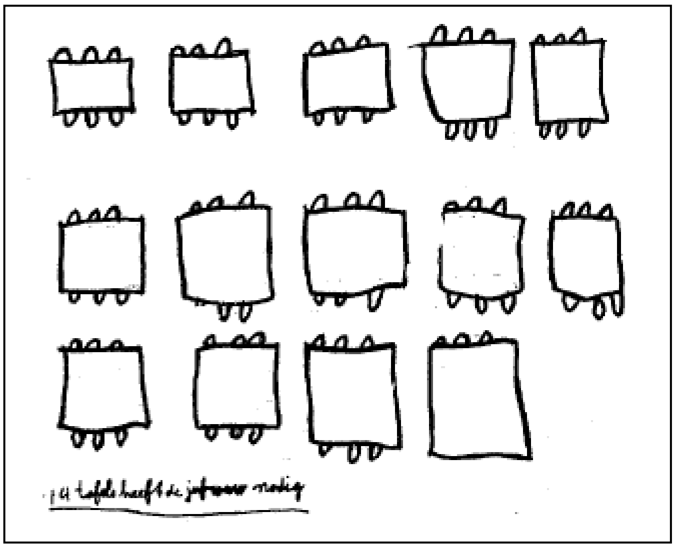


Figura 13. Trabajo de Badr

Roy comenzó de la misma manera, pero después de dibujar dos mesas completas, dibujó dos rectángulos y puso el número 6 en ellos. Mientras estaba dibujando más de esos rectángulos, de repente se dio cuenta que si tiene cinco mesas, se pueden sentar 30 personas. Continuó dibujando

[12] Esta actividad de clase proviene de van Glaen y Feijs (1991); la viñeta también fue usada por De Lange en su conferencia plenaria en el ICME 1996 en Sevilla, España.

rectángulos y después de otros cinco anotó 60. Luego dibujó otros dos, anotó 72, y otro más y escribió 78. Terminó con un rectángulo con el número 3 en él (ver Figura 14).

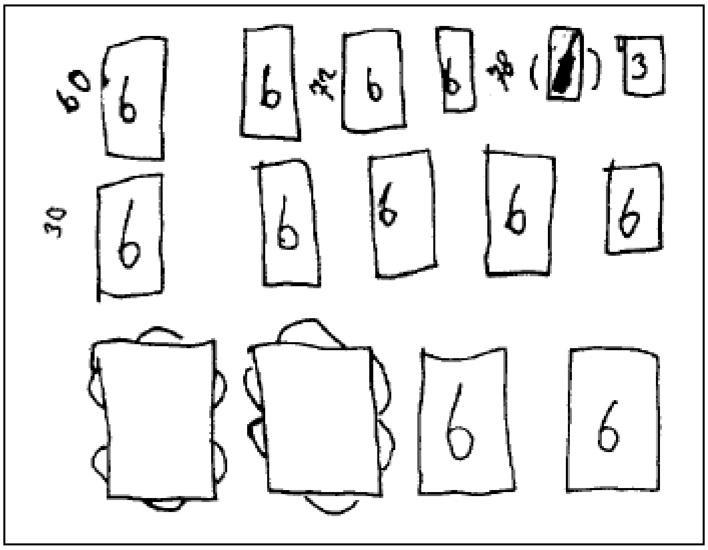


Figura 14. Trabajo de Roy

Un tercer estudiante, Abdelaziz, estuvo un poco más avanzado en matematizar la situación problemática. Aunque comenzó dibujando una copia de la mesa que estaba en el pizarrón, inmediatamente se trasladó a una solución más formal usando su conocimiento de los múltiplos de seis. Anotó: 6 x 6 = 36, duplicó este número y llegó a 72, luego agregó a 72 (dos mesas) y llegó a la respuesta de 84 (ver Figura 15).

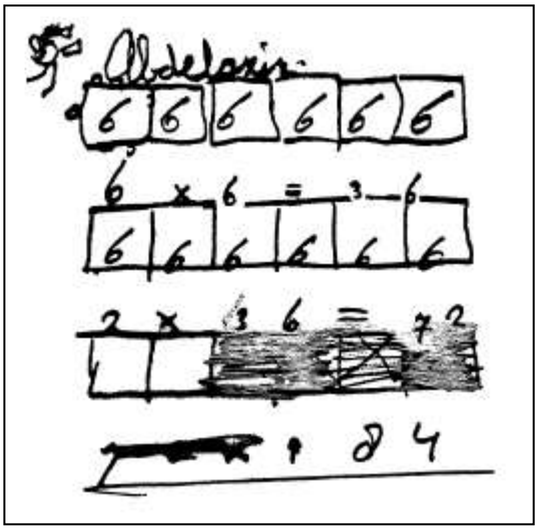


Figura 15. Trabajo de Abdelaziz

Cuando miramos estas tres soluciones diferentes, podemos ver que se dieron distintos niveles de matematización, incluso en el trabajo de Badr ya que la visualización y la esquematización son poderosas herramientas para matematizar. En los otros dos ejemplos de trabajo de los estudiantes, la matemática es más visible, pero todavía no al nivel que se apunta. Este problema fue destinado principalmente para iniciar el aprendizaje de la división larga. Para lograr este objetivo, el problema debe complementarse con otros problemas.

Por lo tanto, después de finalizada la discusión de la clase sobre las diferentes estrategias, el docente presentó un problema nuevo: el problema de las Jarras de café (ver Figura 16).

"*…Se ofrecerá una taza de café a los 81 padres…*
…Con una jarra de café se pueden llenar 7 tazas…
…¿Cuántas jarras serán necesarias?"

Figura 16. Problema de las Jarras de café

Desde un punto de vista matemático este problema es igual al anterior. En lugar de dividir por seis, ahora los estudiantes tienen que dividir por siete. Sin embargo, para los estudiantes es (todavía) un problema completamente diferente. Además, es más difícil hacer una presentación visual de este nuevo problema. Las mesas son más fáciles de dibujar que las cafeteras, si bien Badr trató de dibujarlas (Figura 17).

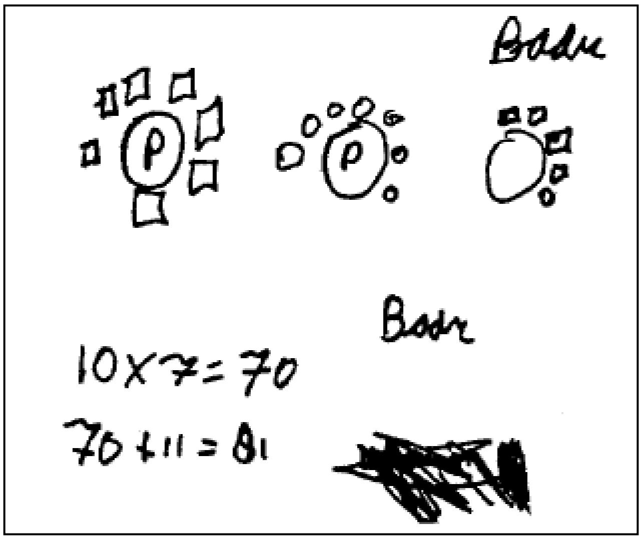


Figura 17, Trabajo de Badr del problema de las *Jarras de café*.

Después de dibujar dos cafeteras recordó la discusión sobre cómo, multiplicando, se puede encontrar la respuesta más rápidamente. Continuó con 10 x 7 = 70 seguido por 70 + 11 = 81, y decidió que son necesarias 12 cafeteras.

La constitución de herramientas matemáticas (la representación de la situación problemática, la esquematización, la suma reiterada, la aplicación del conocimiento de los hechos numéricos, la forma de hacer el seguimiento de los resultados y la comunicación de las estrategias) y el cambio de nivel de Badr fueron provocados por los problemas dados a los estudiantes, y más precisamente por el "grupo de problemas". Así, los contextos en este grupo de problemas – que pueden ser considerados como una micro trayectoria de enseñanza-aprendizaje – incitaron este crecimiento.

4. Progreso en comprensión – la perspectiva macro-didáctica

La viñeta anterior muestra un ejemplo de progreso en comprensión en una lección. En la siguiente sección se trasladará el progreso en comprensión a través de un período de tiempo más largo. La EMR tiene una gran preocupación con la perspectiva longitudinal del proceso de enseñanza-aprendizaje. Desde nuestra visión, una teoría de educación matemática no puede estar completa si está restringida a la perspectiva micro de un ambiente de enseñanza; también debe cubrir la perspectiva macro longitudinal. Esta perspectiva va junto con una fuerte focalización sobre el contenido de la materia y los objetivos a ser alcanzados. Para la EMR el *qué* enseñar es tan importante como el *cómo* hacerlo. Debido a su fuerte conexión con la matemática y al lugar central que el contenido del currículum tiene en su pensamiento sobre la educación matemática, la EMR puede considerarse como un enfoque didáctico orientado a la educación matemática[13].

Responder a estas cuestiones macro-didácticos acerca del qué, preguntas de "análisis didáctico fenomenológico"- como Freudenthal (1983) las llamó- tiene un valor crucial. Estos análisis revelan qué clase de matemática vale la pena aprender y qué fenómeno real puede ofrecer posibilidades para desarrollar el conocimiento matemático que se pretende y la comprensión. Lo importante es que se trata de descubrir cómo los estudiantes pueden entrar en contacto con estos fenómenos y cómo aparecen a los estudiantes. Esto significa que deben identificarse problemas y situaciones problemáticas que den a los estudiantes oportunidades para comprender conceptos matemáticos y estrategias. Para tener el poder de estimular y guiar el aprendizaje de los estudiantes, los problemas deberían estar integrados en una trayectoria de enseñanza-aprendizaje a largo plazo. Por lo tanto, la perspectiva longitudinal de los problemas nunca debe descuidarse.

4.1. Las trayectorias de enseñanza-aprendizaje como un marco para decisiones didácticas

De acuerdo con este énfasis en la perspectiva longitudinal, el proyecto TAL ha trabajado en el desarrollo de trayectorias de enseñanza-aprendizaje para la matemática de la escuela primaria desde 1997. En 2001, fue publicada una versión en inglés del primer producto de este proyecto, una trayectoria de enseñanza-aprendizaje para el cálculo con números naturales (van den Heuvel-Panhuizen (ed), 2001).

¿Qué se entiende por las trayectorias de enseñanza-aprendizaje en el TAL? Para decirlo brevemente, una trayectoria de enseñanza-aprendizaje describe el proceso de aprendizaje que siguen los estudiantes. Sin embargo, de esto no debe deducirse que *solo* contiene la perspectiva del aprendizaje. En nuestra opinión, el término trayectoria de enseñanza-aprendizaje[14] tiene tres significados interconectados:

- una trayectoria de *aprendizaje* que da una visión general del proceso de aprendizaje de los estudiantes
- una trayectoria de *enseñanza* que consta de indicaciones didácticas que describen cómo la enseñanza puede conectarse con y estimular el proceso de aprendizaje
- un esquema *disciplinar* que indica cuáles elementos fundamentales del currículum deberían enseñarse.

Una trayectoria de enseñanza-aprendizaje pone en línea el proceso de aprendizaje, pero al mismo tiempo no debe ser vista como estrictamente lineal, un sistema singular progresivo en el que cada paso es seguido necesaria e inexorablemente por el siguiente. Una trayectoria de enseñanza-aprendizaje debe considerarse con cierta amplitud y no como una vía única. Es muy importante que tal trayectoria de enseñanza-aprendizaje tenga en cuenta:

- los procesos de aprendizaje de los estudiantes
- las discontinuidades en los procesos de aprendizaje; a veces los estudiantes progresan a pasos agigantados y en otras pueden aparecer recaídas
- el hecho que múltiples habilidades pueden aprenderse simultáneamente y que diferentes conceptos pueden desarrollarse al mismo tiempo, ambos dentro y fuera del tema
- las diferencias que pueden aparecer en el proceso de aprendizaje en la escuela, como resultado de diferentes situaciones de aprendizaje fuera de la escuela

[13] Al respecto, la EMR difiere de los enfoques de la educación matemática que están orientados más psicológicamente, como el enfoque constructivista de la educación matemática. Considerando que en el nivel micro-didáctico la EMR tiene mucho en común con la forma de pensar constructivista, en el nivel macro-didáctico del currículum se hacen aparentes algunas de las diferencias principales entre ambos enfoques. De hecho, los enfoques constructivistas no tienen un nivel macro-didáctico, en el que se tomen decisiones sobre los objetivos para la educación y las trayectorias de enseñanza-aprendizaje que necesitan cubrirse para alcanzar estos objetivos. En contraste con la EMR, los enfoques constructivistas son más una teoría de aprendizaje que una teoría de educación.

[14] En holandés, una trayectoria de enseñanza-aprendizaje se llama "leerlijn". El verbo holandés "leren" tiene un doble significado: se usa para "aprender" y para "enseñar".

- los diferentes niveles de dominio de los niños de determinadas habilidades.

El propósito principal de una trayectoria de enseñanza-aprendizaje es dar a los docentes una visión de cómo se puede desarrollar la comprensión matemática de los niños desde Jardín 1 y 2 a 6° grado, y de cómo la educación puede contribuir a este desarrollo. Se pretende proveer a los docentes de un "mapa educativo mental" que pueda ayudarlos a tomar decisiones didácticas, por ejemplo, haciendo ajustes a los libros de texto que usan a diario como guía. La trayectoria de enseñanza-aprendizaje sirve como una guía en un meta-nivel. Es muy importante tener una visión del proceso que siguen los estudiantes para trabajar sobre el progreso en su comprensión. Para tomar decisiones adecuadas sobre ayudas y consejos, un docente debe tener una idea clara de los objetivos, la manera que puede conducir a estos objetivos y los puntos de referencia por los que pasarán los estudiantes de una u otra forma a lo largo del camino, cuando seleccionan nuevos problemas. Sin este esquema en mente es difícil para el docente valorar las estrategias de los estudiantes y prever dónde y cuándo uno puede anticipar sus comprensiones y habilidades (ver también Freudenthal, 1985). Sin esta perspectiva longitudinal, no es posible guiar el aprendizaje de los estudiantes.

Las trayectorias de enseñanza-aprendizaje de TAL están destinadas a dar esta perspectiva longitudinal. En comparación con las descripciones de objetivos que tradicionalmente guiaron la educación y apoyaron la toma de decisiones educativas, las trayectorias de enseñanza-aprendizaje de TAL son un nuevo fenómeno educativo.

Primero de todo, la trayectoria es más que una colección ensamblada de los objetivos de logro de todos los diferentes grados. En lugar de una lista de habilidades aisladas, la trayectoria pone de manifiesto cómo se construyen en conexión unas con otras. Esto demuestra lo que viene antes y qué viene después. En otras palabras, la característica más importante de la trayectoria de enseñanza-aprendizaje es su *perspectiva longitudinal*.

Una segunda característica es su *doble perspectiva de objetivos de logro y marco de enseñanza*. La trayectoria de enseñanza-aprendizaje no sólo describe los puntos de referencia en el aprendizaje del estudiante que pueden reconocerse en el camino, sino también las actividades fundamentales en la enseñanza que conducen a los mismos.

La tercera característica es su inherente coherencia, basada en la distinción de niveles. La descripción deja claro que lo que se aprendió en una etapa, se comprende y realiza en la siguiente a un nivel más alto. Un patrón recurrente de transiciones entrelazadas a un nivel superior constituye el elemento de conexión en la trayectoria. Esta característica de considerar niveles en los procesos de aprendizaje, otro elemento constitutivo del enfoque holandés de la educación matemática, brinda coherencia longitudinal a la trayectoria de enseñanza-aprendizaje. Otra implicancia fundamental de este principio de niveles es que los estudiantes pueden entender algo a diferentes niveles. En otras palabras, pueden trabajar sobre el mismo problema sin estar en el mismo nivel de comprensión. La distinción de niveles en comprensión, que puede tener diferentes apariencias para sud-dominios distintos dentro del eje de número natural, es muy fructífero para trabajar sobre el progreso en la comprensión de los niños porque ofrece puntos de apoyo para estimular este progreso.

El cuarto atributo de las trayectorias de enseñanza-aprendizaje de TAL es el nuevo formato descriptivo que se ha elegido. La descripción no es una simple lista de habilidades y comprensiones a ser alcanzadas, ni una formulación estricta de parámetros de comportamiento que pueden verificarse directamente. En su lugar, se da una descripción esquemática y narrativa, completada con muchos ejemplos, del desarrollo continuado que se da en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

4.2. La trayectoria de TAL para el cálculo con números naturales

En la trayectoria de TAL para el cálculo con números naturales, el cálculo es interpretado en un sentido amplio, incluyendo conocimiento numérico, sentido del número, aritmética mental, estimación y algoritmos. De hecho, la descripción de la trayectoria quiere dar una visión general de cómo todos estos elementos numéricos están relacionados unos con otros. A continuación, voy a acercarme a esta trayectoria de cálculo con números naturales. Para comenzar se discuten algunas características generales de la trayectoria. Luego, se presentarán algunas instantáneas de la trayectoria para los grados inferiores con el foco sobre la *coherencia entre los diferentes niveles de conteo y cálculo.*

Algunas características generales de la trayectoria para el cálculo con números naturales

Como se vieron en la Figura 18, la trayectoria de TAL para el cálculo con números naturales contiene dos partes: una para los grados inferiores y otra para los grados superiores. Aunque el proceso de enseñanza-aprendizaje en ambas partes forma un proceso continuo, no se puede olvidar que cada una tiene sus propias características. Los estudiantes van gradualmente de formas no diferenciadas de conteo y cálculo, a cálculos en formatos más especializados que están dedicados a tipos particulares de problemas en un determinado dominio numérico. En otras palabras, en los grados inferiores, todas las actividades con números generalmente pueden etiquetarse como "aritméticas", mientras en los grados superiores pueden distinguirse formas diferentes de cálculo, tales como aritmética mental, estimación, aritmética en columnas, algoritmos y cálculo usando una calculadora.

Otra característica de la trayectoria es el papel central de la aritmética mental. Ésta se ve como una elaboración del trabajo aritmético que está arraigado en los grados inferiores y constituye la columna vertebral en los grados superiores.

Otra característica de esta trayectoria es la atención explícita sobre los números y las relaciones numéricas. La idea es que si los estudiantes se familiarizan con el contexto de los números, su posición en términos de magnitud y su estructura interna, se establece una base fundamental para el desarrollo de sus habilidades de cálculo. Cuanto más saben los estudiantes sobre los números, más fáciles se les hacen los problemas. O dicho con otras palabras, si uno invierte en los números, logra las operaciones, por decirlo así, en forma gratuita.

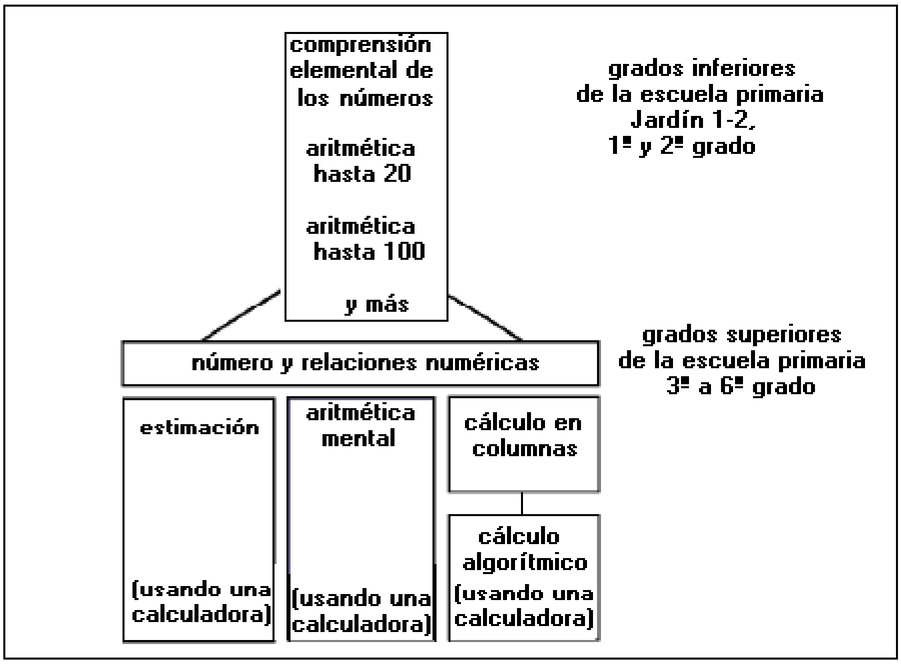


Figura 18. La trayectoria de enseñanza-aprendizaje de TAL para el cálculo con números naturales en primaria.

Una novedad en esta trayectoria es que contiene también, una didáctica para el aprendizaje de la estimación. Si bien la estimación es considerada un objetivo importante de la educación matemática, en la mayoría de los libros de texto falta cómo enseñar a estimar. En su mayoría, los libros sólo contienen algunos problemas sobre estimación, pero hacer algunos problemas de estimación de tanto en tanto no es suficiente para desarrollar una real comprensión de cómo funciona y para comprender lo que es posible y no cuando estimamos.

Otra novedad es la distinción entre algoritmos y una manera más abreviada de cálculo en la cual se trabaja con los números como totalidades en lugar de los dígitos, llamada "cálculo en columna".

Finalmente, aprender a calcular con números naturales, por supuesto, debe incluir ser capaz de usar una calculadora. La trayectoria describe cómo desarrollar esta habilidad, pero al mismo tiempo refleja que hay que ser muy prudentes. El objetivo principal es que los estudiantes puedan finalmente tomar decisiones sensatas sobre usar o no la calculadora. Por lo tanto, en el esquema el uso de la calculadora está entre paréntesis.

4.3. Coherencia entre los diferentes niveles de conteo y cálculo

La coherencia entre los diversos niveles de comprensión matemática que se hace aparente en la descripción de la trayectoria juega un papel central en estimular el crecimiento de los estudiantes. Clarifica cómo el aprendizaje en una etapa está relacionado con el aprendizaje en otras, y cómo puede la comprensión evolucionar gradualmente.

Para dar una idea de esta coherencia, primero me voy a focalizar en la actividad de enseñanza en 1° grado. En este grado se propone la *clase del Restaurant* para ofrecer a los estudiantes un entorno de aprendizaje en el cual puedan desarrollar estrategias para resolver problemas de suma hasta el 20 en los que tengan que conectar con el 10.

La clase que se describe en el libro de TAL fue dada en una clase mixta con niños de Jardín 2 y 1° grado, de 5 y 6 años. La docente, Ans Veltman, es uno de los miembros del equipo de TAL. Ella también diseñó la clase, aunque no estaría de acuerdo con esto – Ans siente que su alumna Maureen fue la promotora de esta clase. Maureen abrió un restaurant en una esquina del salón de clases y todos fueron invitados a comer. El menú muestra a los niños lo que pueden pedir y lo que cuesta. Los precios están en pesos enteros (ver Figura 19).

El propósito de la docente con esta clase es, como dijo antes, trabajar sobre un problema de suma con dificultad haciendo un puente con el diez. Sin embargo, la forma en que lo hace, refleja mucha libertad para los estudiantes. La docente anunció que podían elegirse dos ítems del menú y les pidió que digan qué ítems elegirían y cuánto costaría. En otras palabras, parecía como si no hubiera orientación del docente, pero no era así. Si elegían un panqueque y un helado, que cuestan 7 pesos y 6 pesos respectivamente, sabía de antemano qué problema trabajaría la clase; es decir, el problema de sumar más allá de 10, que es lo que quería abordar con ellos.

Figura 19. El menú para el restaurant de Maureen

Y hay más. Hay un monedero con algo de dinero para pagar lo que se pide. La docente había dispuesto que el monedero debía contener monedas de 5 y 1 peso. Esto de nuevo demuestra una sutil orientación de la docente. Luego, los estudiantes comienzan a pedir. Niels elige un panqueque y un helado. Jules lo anota en una pequeña pizarra. Los otras niños gritan: “Yeah…yo también.” Están de acuerdo con la elección de Niels. Luego la docente pregunta cuánto costaría en total esta elección. La Figura 20 muestra un resumen de lo que hicieron los niños.

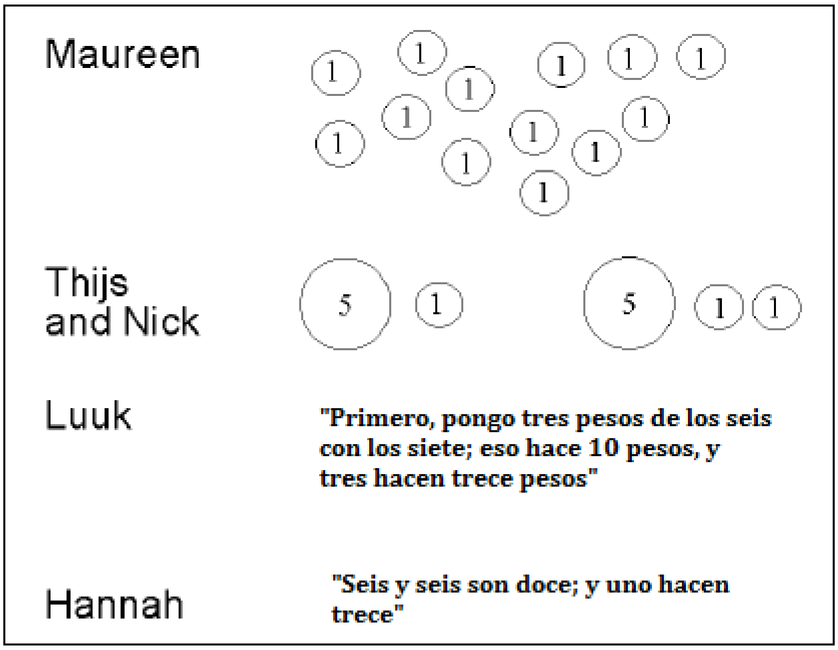


Figura 20. Estrategias de los estudiantes para resolver 7+6

Maureen contó 13 monedas de un peso. Seis monedas para el helado y siete para el panqueque. Thijs y Nick cambiaron cinco monedas de un peso por una de cinco y pagaron el helado con “5” y “1”, y el panqueque con “5”, “1” y “1”. Después vieron que dos cincos hacen diez y tres monedas de uno hacen 13 en total. Más tarde Nick ubicó las monedas en una fila: “5”, “5”, “1”, “1”, “1”. Luuk salió con la siguiente estrategia: “Primero pongo tres pesos de los seis con los siete pesos, lo que hace diez pesos, y tres son trece.” Hannah no usó las monedas. Ella calculó: “6 y 6 son 12, y 1 son 13 pesos.” Otro estudiante hizo: “7 y 7 son 14, menos 1 son 13.”

Esta clase del Restaurant deja claro que niños con diferente habilidad y nivel de comprensión pueden trabajar en clase sobre el mismo problema. Para hacerlo, es necesario que se les presenten problemas que puedan resolverse en diferentes niveles. La ventaja para los estudiantes es que compartir y discutir sus estrategias unos con otros puede funcionar como una palanca para mejorar su comprensión. La ventaja para los docentes es que tales problemas pueden darles una sección transversal de la comprensión de su clase en un momento determinado. Esa sección transversal incluye los diferentes niveles en que los estudiantes pueden resolver el problema:
- *cálculo por conteo* (calcular 7+6 poniendo a un lado siete y seis monedas de un peso, y contar el total una por una.
- *cálculo por estructuración* (calcular 7+6 poniendo dos monedas de cinco y tres de un peso).
- *cálculo formal* (y flexible) (calcular 7+6 sin usar monedas, haciendo uso de su conocimiento sobre 6+6).

El poder de esta sección transversal es que también ofrece a los docentes una visión longitudinal de la trayectoria que los estudiantes necesitan recorrer (ver Figura 21). La sección transversal de las estrategias en cualquier momento indica lo próximo a alcanzar en el futuro inmediato. Como tal, esta sección transversal de las estrategias contiene palancas para el docente para seguir la enseñanza.

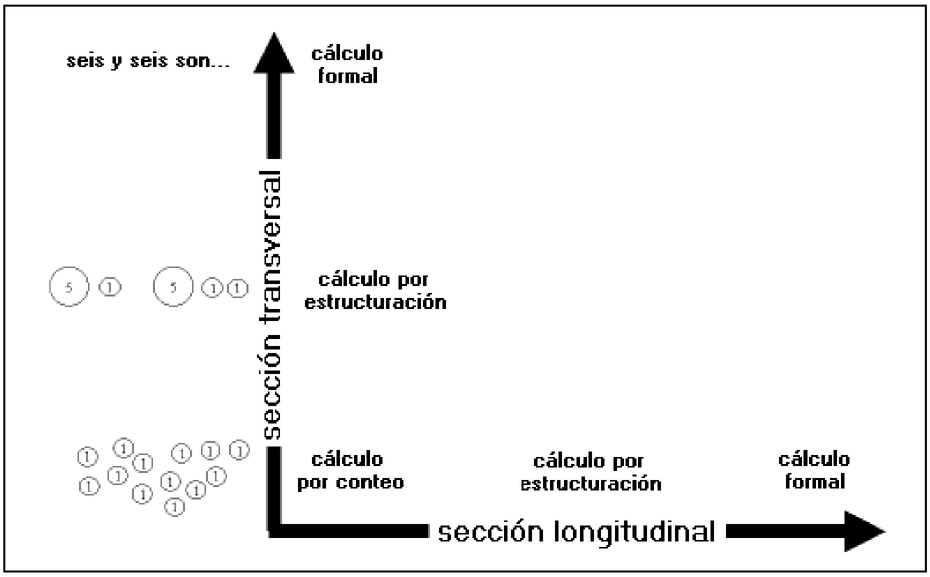


Figura 21. La sección transversal muestra "el futuro"

La próxima pregunta, y es realmente de lo que trata la trayectoria de enseñanza-aprendizaje, principalmente mostrar la coherencia de todo el proceso, es ¿qué tiene que ver este cálculo en 1° grado con el conteo resultativo en Jardín y el cálculo a cien en 2° grado?.

En cuanto a la habilidad de conteo resultativo[15] que los niños logran en Jardín, pueden diferenciarse diferentes niveles (ver Figura 21). En el comienzo del proceso de aprendizaje de los niños – cuando el concepto de número no está establecido muy a fondo – pueden tener dificultades en responder a la pregunta "¿cuántos?". Para superar este problema, se puede pedir una pregunta relacionada al contexto, como:

- ¿cuántos años tiene? (refiriéndose a las velitas de una torta de cumpleaños)
- ¿cuánto de lejos puedes saltar? (refiriéndose a los puntos de un dado)
- ¿cuánto de alta es la torre? (refiriéndose a los bloques con los cuales se construyó una torre)

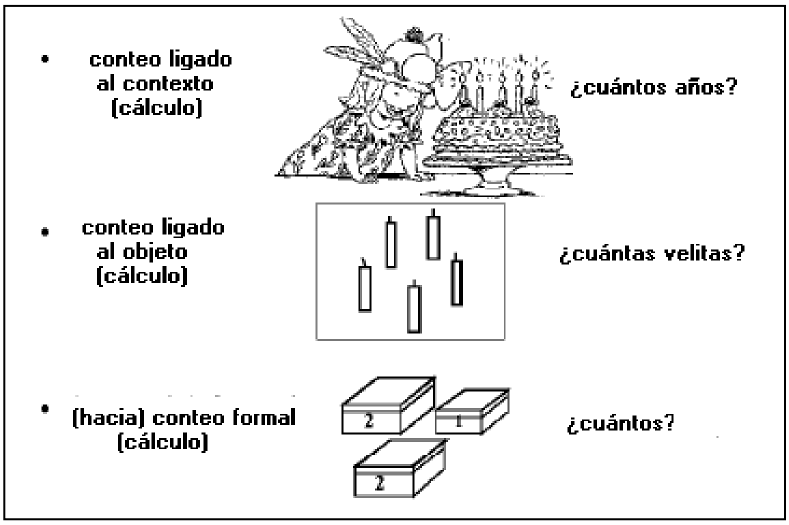


Figura 21. Diferentes niveles de conteo (y cálculo) en Jardín

En las preguntas relacionadas al contexto, este da significado al concepto de número. Este conteo relacionado al contexto precede al nivel de conteo conectado al objeto, en el cual los niños

[15] Se entiende por conteo resultativo la habilidad de determinar el número de objetos en un grupo. Se podría decir también, que el conteo resultativo significa encontrar el cardinal. Para indicar que el conteo resultativo en el nivel de Jardín ya es una etapa preliminar del cálculo en la trayectoria de enseñanza-aprendizaje, la habilidad de contar se llama "contar y calcular".

pueden manejar las preguntas directas de “¿cuántos?” en relación a una colección de objetos concretos, sin referencia alguna a un contexto significativo. Más tarde, la presencia de objetos concretos ya no es necesaria para responder a las preguntas de “¿cuántos?”. A través de la simbolización, los niños han alcanzado un nivel de comprensión en el que son capaces de lo que podría llamarse conteo formal, lo que significa que pueden reflexionar sobre relaciones numéricas y pueden hacer uso de este conocimiento.

Con respecto al cálculo hasta cien en 2° grado, se distinguieron en la trayectoria de enseñanza-aprendizaje las siguientes estrategias principales:
- la *estrategia secuencial* en la cual el primer número se mantiene como un todo y la respuesta final se logra haciendo sucesivos saltos
- la *estrategia de descomposición* en la cual se hace uso de la estructura decimal y los números se descomponen en decenas y unidades, y se tratan separadamente
- la *estrategia variada* en la cual se hace uso del conocimiento de las relaciones numéricas y propiedades de las operaciones

Ejemplos de estas diferentes estrategias para resolver 48+29 se muestran en la Figura 22.

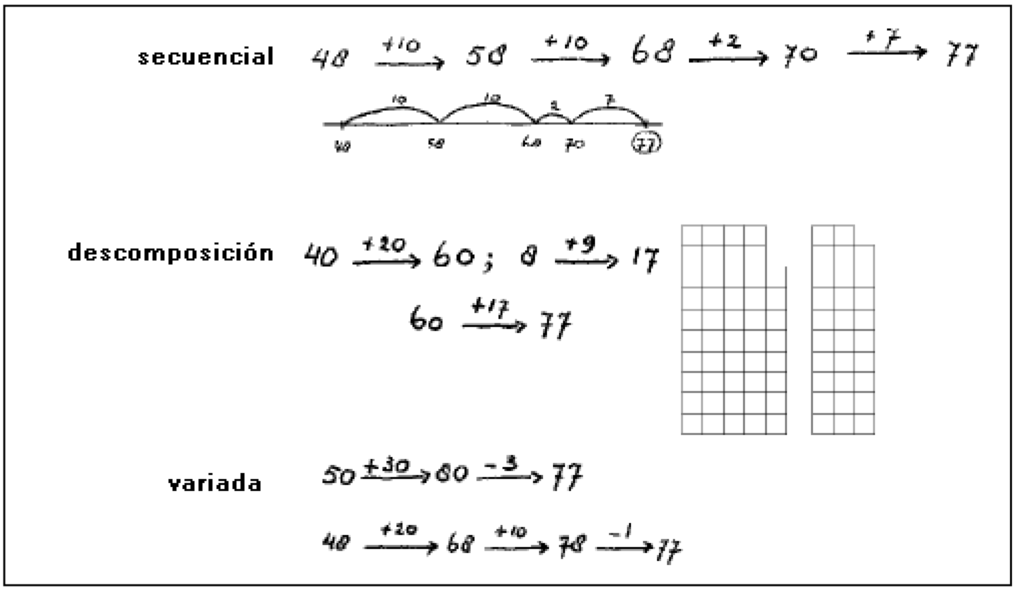


Figura 22. Diferentes estrategias para resolver 48+29

El esquema en la Figura 23 muestra cómo las diferentes estrategias de cálculo se conectan unas con otras, y todas se basan en el conteo.

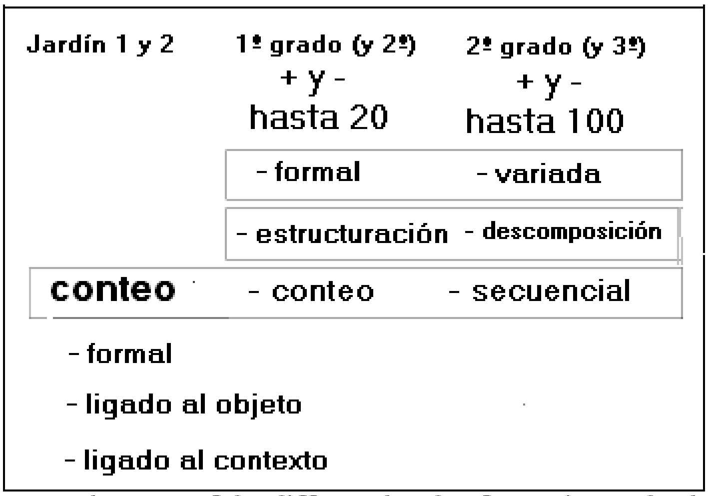


Figura 23. Coherencia de los diferentes niveles de conteo y cálculo

Y, por supuesto, la viabilidad de estas estrategias no se detiene al final de los grados inferiores. Las estrategias mantienen su importancia cuando los estudiantes, por ejemplo, tienen que resolver problemas con números grandes y otras operaciones que no sean suma y resta. En la Figura 24 pueden reconocerse las mismas estrategias básicas en el trabajo de los estudiantes de 4° grado, cuando tenían que explicar cómo resolvieron el problema sobre las cajas de café.

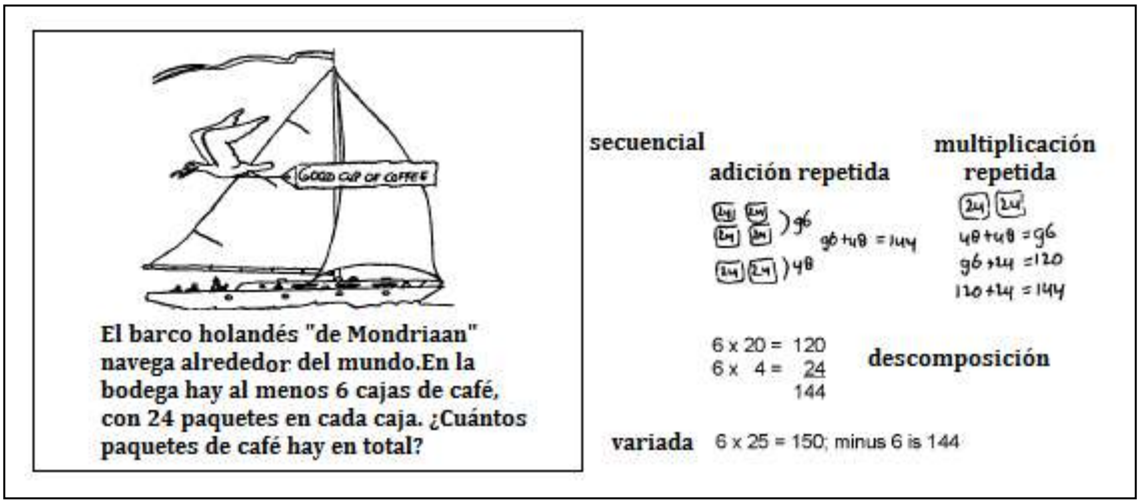


Figura 24. Estrategias que los estudiantes de 4° grado usaron para encontrar el número de paquetes de café.

Los ejemplos anteriores de las estrategias muestran una clara coherencia longitudinal del conteo y del cálculo. Explica cómo aprender a calcular en un grado está conectado con el proceso de aprendizaje en otro grado. Comprender estos niveles en las estrategias proporciona a los docentes un poderoso fundamento para acceder a la comprensión de los niños y para trabajar en sus cambios.
Si la EMR puede ofrecer realmente a los estudiantes un suelo fértil para progresar en logros matemáticos será tratado en la próxima sección.

5. ¿La EMR como provocadora de progreso en los logros matemáticos?

De acuerdo con los resultados del TIMSS, los estudiantes holandeses se desempeñaron muy bien en matemática. Restringiéndonos al estudio de la escuela primaria, los estudiantes de 4° grado de Holanda pueden verse liderando el campo de los países occidentales, incluyendo los países de este europeo (ver Figura 25). Con respecto a los resultados de 3° grado, los estudiantes checos tomaron este lugar, dejando a los holandeses justo detrás de ellos.

Hay que reconocer que en el orden de clasificación, como se muestra en la Figura 25, no se tiene en cuenta que los Países Bajos no cumplían los requisitos de porcentaje de participación en la muestra. Pero supongamos que durante un momento más largo o más corto esta deficiencia no afectó la fiabilidad de los resultados. ¿Estos resultados podrían interpretarse entonces como el rendimiento de 30 años de la EMR?

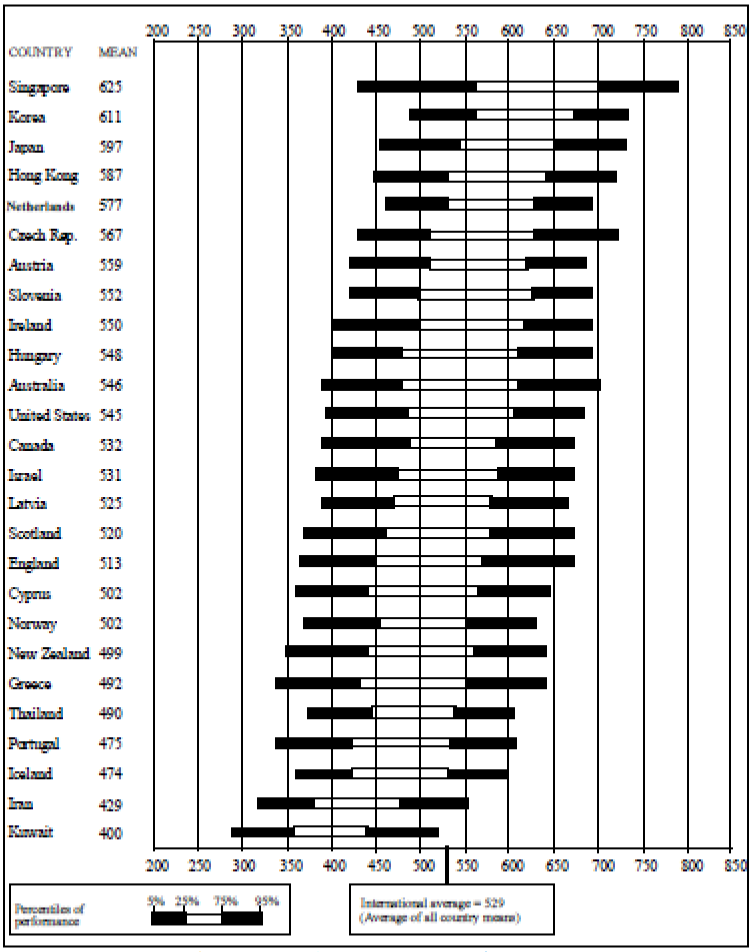
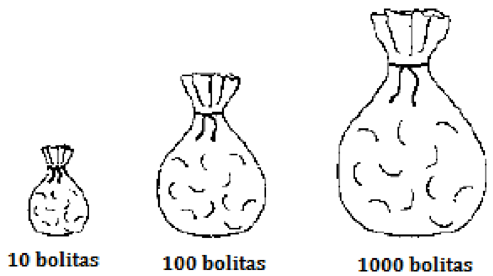


Figura 25. TIMSS Resultados de los logros matemáticos de 4° grado
(adaptado de Mullis et al, 1997, p.24)

Me temo que no. La EMR está luchando por conseguir un rendimiento diferente. El problema con los resultados del TIMSS es que la prueba no se ajusta a nuestro enfoque de enseñanza de la matemática ni al contenido de nuestro currículum. Algunos temas en la prueba, como decimales, no se abordan hasta 5° grado en nuestro currículum. Otros temas, como geometría formal, probabilidad y hacer afirmaciones y sentencias verdaderas, simplemente faltan en nuestro currículum. En todo caso, si algo podría interpretarse como resultado de la EMR sería la habilidad de los estudiantes holandeses de usar su sentido común para resolver problemas. A menudo, los puntajes altos se encontraron en temas que no se enseñan en la escuela. Tomemos, por ejemplo, el siguiente ítem de probabilidad sobre la chance de sacar una bolita roja de una bolsa (ver Figura 26).

Hay solamente una bolita roja en estas bolsas.



Sin mirar dentro de las bolsas, vas a sacar una bolita de una de ellas. ¿Cuál bolsa te daría la mayor chance de sacar una bolita roja?

A. **La bolsa con 10 bolitas**

B. **La bolsa con 100 bolitas**

C. **La bolsa con 1000 bolitas**

D. **Todas las bolsas darían la misma chance**

Figura 26. Item del TIMSS sobre probabilidad (de Mullis et al, 1997, p.94)

En este ítem los holandeses de tercer grado tuvieron el porcentaje más alto de resultados correctos (56) después de Japón (64), y los de cuarto grado tuvieron el más alto porcentaje de todos los países (74); la puntuación de los estudiantes de 4° grado en Japón fue 70, en Hong Kong 69, en Singapur 61 y en Corea 39. Por otra parte, la puntuación del 4° grado holandés incluso igualó la puntuación promedio internacional de los séptimos grados.

No obstante, estas puntuaciones no pueden verse como el resultados directo de nuestro currículum. Si hay alguna influencia podría ser el énfasis del currículum holandés sobre el sentido común y las estrategias para resolver problemas.

Otra razón de que los resultados del TIMSS no pueden considerarse como un indicador de nuestro supuesto progreso en logros matemáticos es que en esta prueba faltan varios temas que son importantes en nuestro currículum – o los temas no están en la prueba de la manera en que deben estar. Esto es especialmente cierto en el caso de aritmética mental, estimación y sentido del número.

Problemas, como por ejemplo, los que se muestran en las Figuras 27 y 28 no son parte de la evaluación TIMSS.

4000 estudiantes en 48 aulas.

Woodrock tiene nueve escuelas en total. Dos de ellas tienen un anexo separado en un lugar cercano.
Cuatro de las escuelas son secundarias.
Las otras son primarias, que incluyen un departamento de Jardín.
En total, casi 4000 niños concurren a las nueve escuelas.

¿Qué piensas del titular en el recorte del periódico?
¿Puede ser cierto, 4000 estudiantes en 48 aulas?
Explica por qué sí o por qué no.

Figura 27. Problema de los 4000 estudiantes (adaptado de Buys, 1998)

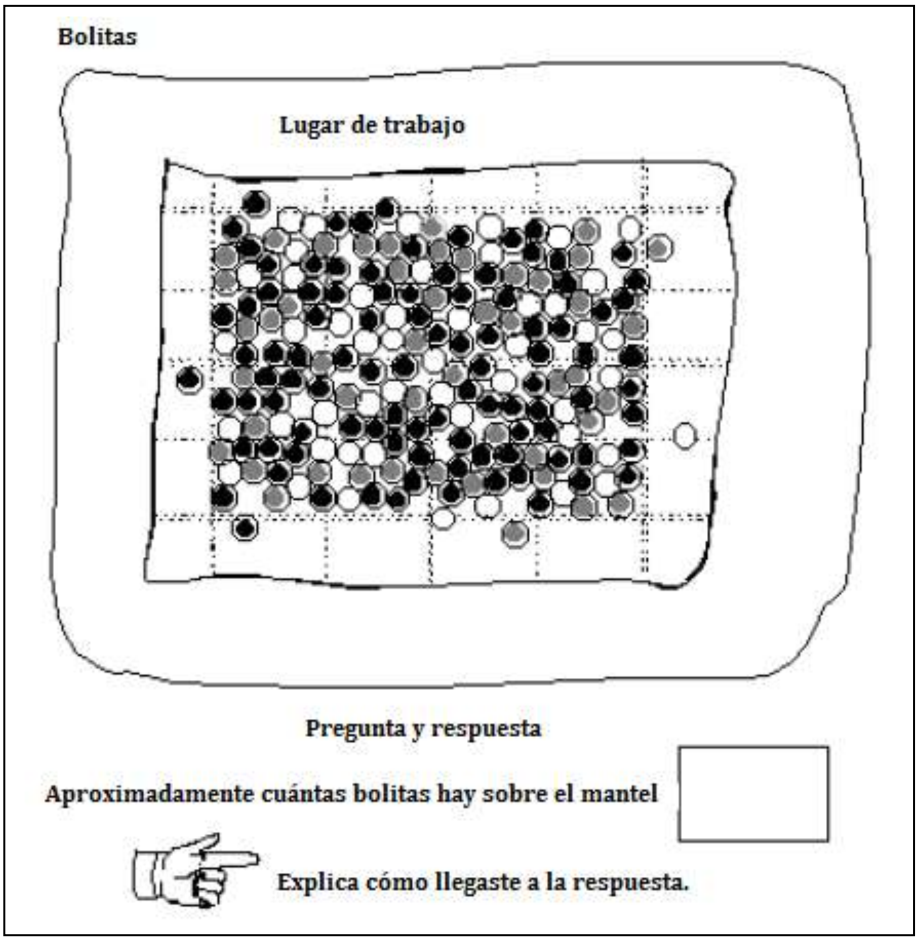
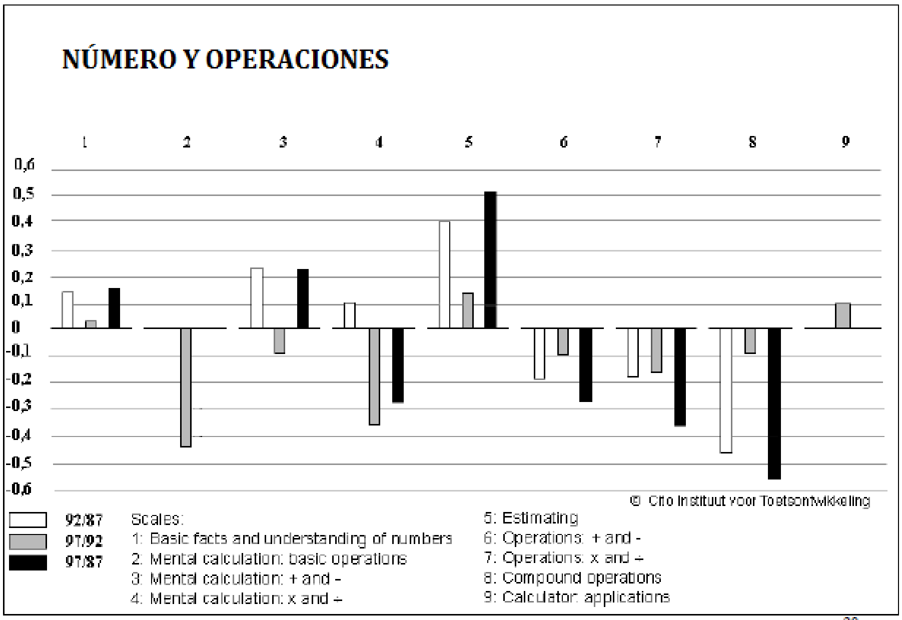


Figura 28. Problema de las bolitas [16].

En general, lo que falta especialmente en la evaluación TIMSS es “aplicación de la matemática” en el sentido de la EMR de “matematización”. Sin embargo, esta habilidad sólo puede ser evaluada si se proveen a los estudiantes problemas adecuados para matematizar. En otras palabras, no se deben presentar problemas en los que todo esté preparado y lo único que el estudiante tiene que hacer es encontrar- o más bien pescar- la única solución correcta. En cambio, los problemas dados a los estudiantes deberían ofrecerles un contexto rico que pueda ser organizado, analizado y elaborado por medio de herramientas matemáticas. Estas herramientas pueden ser estandarizadas o informales. Como se dijo anteriormente, la matematización puede darse a diferentes niveles. Estos niveles están conectados a los distintos niveles de comprensión a través de los cuales pueden pasar los estudiantes: desde la habilidad de inventar soluciones informales relacionadas con el contexto, hasta la comprensión de los principios fundamentales y el discernimiento de relaciones más amplias. Por lo tanto, lo importante para la elección de los problemas es que se puedan resolver en diferentes niveles.
Los problemas en las Figuras 27 y 28 dejan claro que tareas de evaluación como éstas, que pueden evaluar la habilidad de matematización, no satisfacen los requerimientos de las evaluaciones estandarizadas. Estos problemas no sólo pueden resolverse con diferentes estrategias, peor aún es que pueden diferir las respuestas. En otras palabras, la EMR tiene consecuencias para la evaluación (De Lange, 1987; van den Heuvel-Panhuizen, 1996) y pide repensar el modelo psicométrico para la misma[17].

Si nos restringimos a los estudios holandeses sobre el efecto de la educación matemática en la escuela primaria, entonces el panorama tampoco es muy claro. Comparaciones de los puntajes matemáticos en las evaluaciones PPON[18] de estudiantes de sexto grado en 1987, 1992 y 1997 no muestran un progreso muy convincente (Janssen et al, 1999). Por el contrario, parece como si el rendimiento de la educación matemática holandesa se estuviera deteriorando (ver Figura 29)[19].



---

[16] Diseñé este ítem para la evaluación AMI Pilot. AMI es un estudio comparativo sobre logros matemáticos y significa “Applying Mathematics International””. En este estudio “Applying Mathematics” está tomado como un criterio para comparar los logros matemáticos de estudiantes de cuarto grado en diferentes países. Todos los países participantes acordaron que la aplicación de la matemática es un objetivo importante de la educación matemática. El informe de investigación no ha sido publicado aún.
[17] Más sobre este tema en mi lectura sobre evaluación.
[18] PPON significa Evaluación Periódica de Logros Educativos. Es un estudio como el NAEP realizado por el CYTO, Instituto Nacional para la Evaluación Educativa.
[19] Calificaciones según el tamaño de los efectos: -0.8 (gran efecto negativo); -0.5 (efecto negativo moderado); -0.2 (efecto negativo pequeño); 0.0 (sin efecto); 0.2 (efecto positivo pequeño); 0.5 (efecto positivo moderado); 0.8 (gran efecto positivo)

Figura 29. Comparación de los puntajes matemáticos PPON en escalas numéricas[20]

En los Países Bajos hubo mucha discusión sobre estos resultados. La gente se preguntaba si los análisis se hicieron en forma correcta[21] y si los problemas eran adecuados para revelar el conocimiento matemático y la comprensión del estudiante.

Un resultado más positivo llegó recientemente de una comparación internacional entre Inglaterra y los Países Bajos realizada por Anghileri y Beishuizen (en prensa). En esta investigación, en la cual fueron evaluados estudiantes ingleses y holandeses de cuarto grado en enero y junio, se reveló un progreso notorio de los estudiantes holandeses en la forma que resuelven problemas de división[22]. En enero los estudiantes holandeses fueron exitosos en el 47% de los problemas y los ingleses en el 38%. En junio los resultados fueron 68% y 44% respectivamente. Cuando se compararon los estudiantes en forma individual para las dos resultados de las evaluaciones, los cambios en los puntajes de los estudiantes holandeses (n=259) fueron mucho mejores que los de los estudiantes ingleses (n=276) (ver Figura 30).

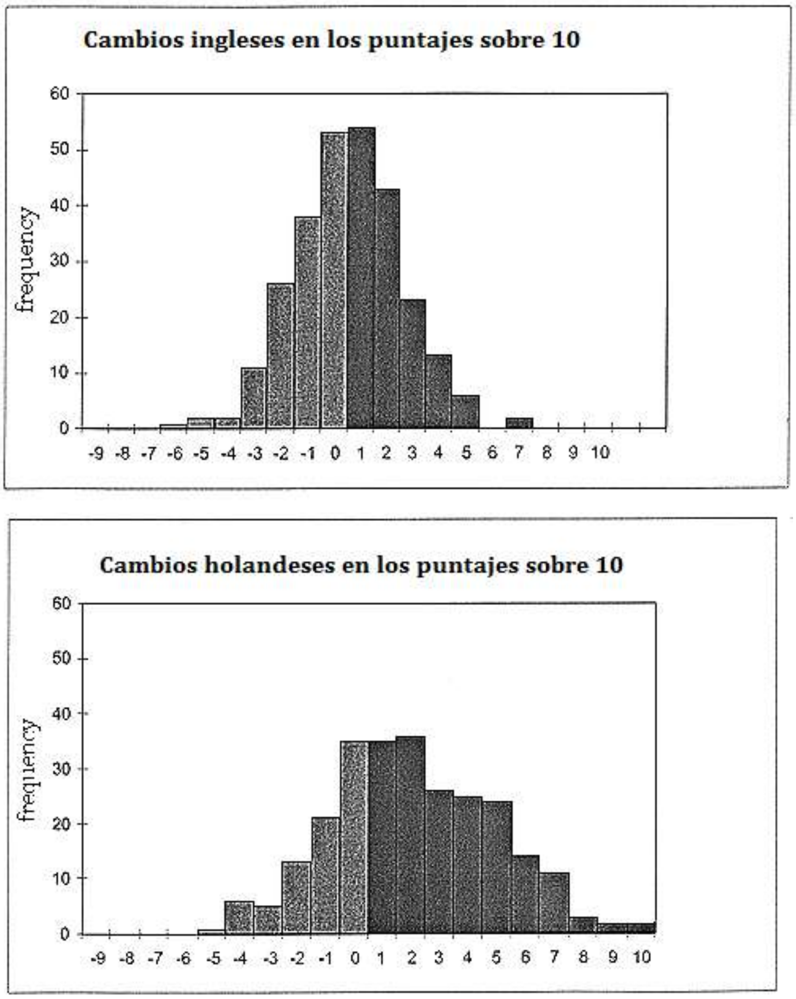


Figura 30. Cambios en los puntajes de los estudiantes ingleses y holandeses de cuarto grado.

[20] Imagen tomada de Jansen et al.(1999)

[21] Muy cuestionable es, por ejemplo, que en los análisis los textos usados en la escuela fueran considerados como una variable de control, mientras que el cambio y mejora de los libros de texto es un resultado importante de la implementación de la EMR.

[22] La evaluación contenía problemas de división (cinco problemas en contexto y cinco problemas numéricos). Los problemas que eran "desnudos" en enero, fueron presentados en contexto en junio, y viceversa. Los números y los contextos seguían siendo los mismos.

En enero ambos grupos aplicaron estrategias informales, pero en la muestra inglesa no se evidenció una clara progresión desde las estrategias informales al procedimiento estandarizado. Aunque los estudiantes ingleses mostraron enfoques informales acertados, a menudo sus registros estaban desorganizados. Los estudiantes holandeses, sin embargo, mostraron una organización más clara en sus métodos de registro que podrían estar asociados con el procedimiento enseñado basado en la resta repetida. El estudio reveló que "el efecto holandés [...] conduce a un procedimiento de 'tomar por trozos', usando múltiplos apropiados del divisor, que los alumnos confían usar y que usaron eficazmente. Dado que este procedimiento puede usarse a diferentes niveles de eficiencia [(ver Figura 31)] se conserva un elemento de elección a fin de que los alumnos continúen teniendo cierta libertad de pensamiento dentro del enfoque estructurado. Esto parece dar como resultado una suave transición de estrategias a procedimientos que evita la aplicación mecánica de reglas enseñadas". (Anghileri y Beishuizen, en prensa).

Una vez más, estos resultados evidencian que para que el progreso sea detectable tiene demandas sobre la evaluación.

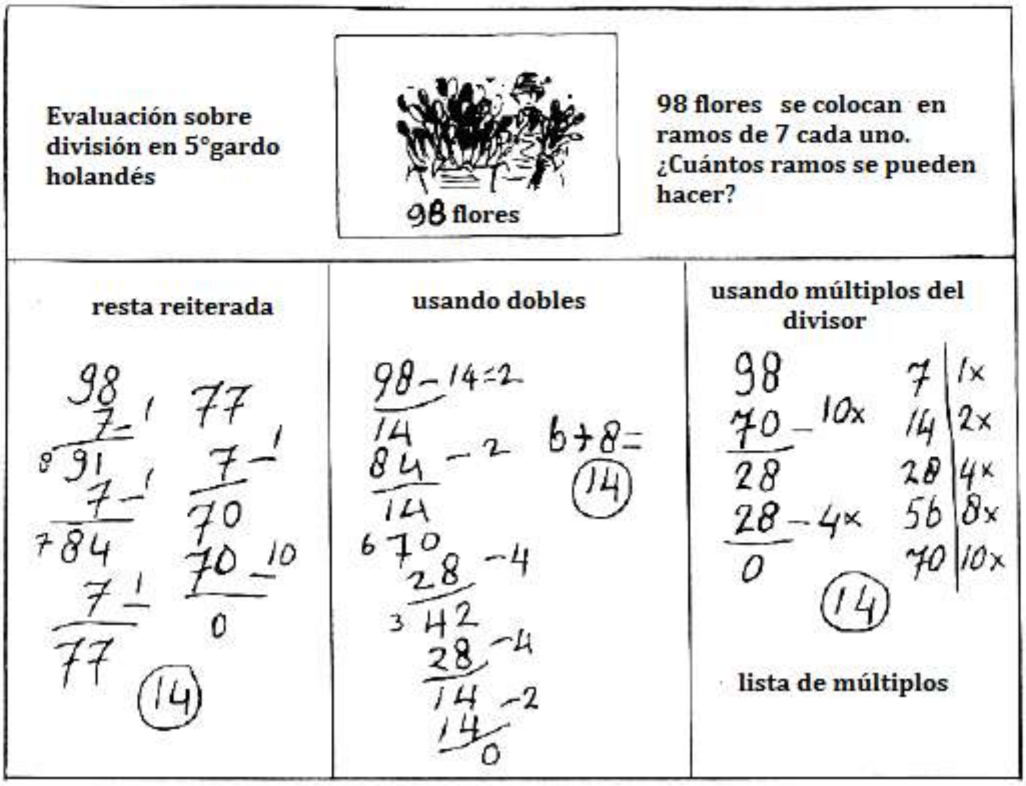


Figura 31. Procedimientos similares usados a diferentes niveles de eficiencia por estudiantes individuales.

Para concluir esta conferencia voy a decir algunas palabras sobre el desarrollo dentro de la EMR como una teoría de educación matemática, comentando algunas tendencias en ella.

El progreso en la teoría de educación matemática EMR

En las secciones anteriores di una impresión de lo que quiere decir EMR. Por supuesto, no es factible dar una imagen completa de la EMR en una sola conferencia. La EMR es demasiado compleja para eso. Por otra parte – y podría ser una sorpresa – otra "dificultad" es que la EMR no es un enfoque unificado de la educación matemática. Esto significa que las diversas charlas dadas en esta conferencia van a incluir diferentes acentos e interpretaciones de la EMR. A primera vista esto podría ser confuso y no factible. Después de repensar este fenómeno se hace evidente qué importantes eran estas diferencias – y lo siguen siendo – para el desarrollo de la EMR. De hecho, los diferentes acentos son el ímpetu para el continuo progreso de la teoría EMR.

En lugar de ser una clara teoría de educación matemática, la EMR consiste en algunas ideas básicas compartidas sobre el qué y cómo de la enseñanza matemática. Estas ideas se han desarrollado a lo largo de los pasados treinta años, y la acumulación y revisión repetida de estas ideas han dado lugar a lo que hoy se llama "Educación Matemática Realista". Durante el desarrollo de la EMR, se ha hecho hincapié en diferentes aspectos del marco teórico conectado con ella, lo que ha guiado la labor de investigación y desarrollo en el campo de la educación matemática. Junto con esta diversidad, el marco teórico mismo fue también objeto de un constante proceso de renovación. Inherente a la EMR, con su idea básica de matemática como una actividad humana, es que nunca puede considerarse como una teoría fija o acabada de educación matemática. En otras palabras, no sólo el trabajo con los estudiantes se ve como "trabajo en progreso" sino también la misma teoría EMR (ver también van den Heuvel-Panhuizen, 1998).

En la etapa inicial de la EMR, el marco principal por medio del cual el enfoque de la EMR fue explicado, constaba de cinco características de la currícula de la EMR: (1) el lugar predominante de los problemas en contexto; (2) la gran atención puesta en el desarrollo de modelos; (3) las contribuciones de los estudiantes por medio de sus propias producciones y construcciones; (4) el carácter interactivo del proceso de aprendizaje y (5) la interconexión entre los ejes de aprendizaje (ver Treffers y Goffre, 1985).

Más adelante, estas características de la currícula de la EMR y las unidades de enseñanza evolucionaron hasta convertirse en un conjunto de principios que formaron un marco para una teoría de enseñanza. Las características fueron interpretadas como los cinco principios que guiaron el proceso de "matematización progresiva" (Treffers, 1987).

Un desarrollo adicional fue la distinción entre los aspectos del aprendizaje (A) y de la enseñanza (E) de los principios: (A-1) el concepto de aprendizaje como construcción y (E-1) comenzando con una base concreta de orientación; (A-2) el carácter de nivel del aprendizaje y (E-2) la provisión de modelos; (A-3) el aspecto reflexivo del aprendizaje y (E-3) la asignación de tareas especiales, en particular tareas de producción propia; (A-4) el aprendizaje como actividad social y (E-4) la enseñanza interactiva; (A-5) el carácter estructural o esquemático del aprendizaje y (E-5) la interconexión de los ejes de enseñanza (ver Treffers, 1991).

Como lo señaló Treffers (1991), las relaciones entre los aspectos del aprendizaje y la enseñanza de los principios de la EMR no deben verse como conectados uno a uno. De hecho, cada aspecto del aprendizaje puede conectarse con cada aspecto de la enseñanza, resultando un patrón muy complejo de principios de enseñanza-aprendizaje. Aunque este modelo complejo estará más acorde con el complejo proceso de enseñanza-aprendizaje, en realidad prefiero atenerme a los cinco principios que fueron formulados originalmente, de los cuales algunos están más conectados con la enseñanza y otros con el aprendizaje (ver figura 32). Además me gustaría agregar el principio de guía[23]. Una descripción más detallada de esta lista de seis principios fundacionales de la EMR puede encontrarse en van den Heuvel-Panhuizen (2001a y 2001b).

El esquema en la Figura 32 también refleja que en la actualidad hay más y más conciencia de una distinción entre una teoría global y una teoría local para diferentes dominios del contenido.

TEORÍA GENERAL EMR

QUÉ	CÓMO
Actividad humana significativa Matematización horizontal y vertical Habilidades de bajo nivel y habilidades de alto nivel	**Enseñanza**: - contexto o principio de realidad - principio de interconexión - principio de guía **Aprendizaje:** - principio de actividad - principio de nivel - principio de interacción

[23] En este sentido, el enfoque de la EMR difiere del enfoque constructivista. Ver Nota 13.

TEORÍAS LOCALES EMR

QUÉ	CÓMO
Cálculo con números naturales	Comprensión de los números como base Esquematización progresiva Estrategias conectadas Práctica productiva
ETC	ETC

Figura 32. Marco teórico del enfoque de la EMR

En comparación con el enfoque de la EMR en los setenta y los ochenta, hoy en día el mismo está más diferenciado y equilibrado.

Permítanme comenzar con el crecimiento en equilibrio. Un punto fundamental de la evolución tiene que ver con la interpretación del concepto de matematización. Tal como dije al principio, Freudenthal ya sentó las bases para este punto vital de la EMR en los sesenta, pero fue la distinción de Treffers en matematización "horizontal" y "vertical" lo que dio a este concepto el papel clave que hoy tiene en la EMR. Aunque estas dos formas de matematización se formularon a mediados de la década de los setenta, llevó mucho más tiempo lograr el equilibrio entre ellas. Reflexionando sobre la historia de la EMR, Treffers (1992) llamó al período comprendido entre 1972 y 1982 el "período horizontal". En ese tiempo no había una visión clara de la función del contexto y de las situaciones modelo para el aspecto vertical. No hubo interacción equilibrada entre las dos formas de matematización. Sin embargo, en ese tiempo ya había algo de conciencia (ver Treffers, 1978; De Lange, 1979, 1987) de que en esta interacción podía encontrarse el corazón de la EMR. De acuerdo con Treffers (1992) esta visión equilibrada tuvo relevancia durante los ochenta. Por consiguiente, llamó a los años comprendidos entre 1982 y 1992 el "período vertical" y mencionó la división larga como el ejemplo más paradigmático de éste. Aunque la "esquematización progresiva" es un claro ejemplo de este aspecto vertical de matematización (el proceso de reorganización dentro del sistema matemático mismo, por ejemplo, encontrando atajos o abreviaturas), en los comienzos de los noventa realmente no hubo un avance completo de este aspecto. Moverse dentro del mundo de los símbolos haciendo problemas con números desnudos y hacer investigaciones sobre las propiedades de los números, no fueron realmente aceptadas como pertenecientes a la EMR, sino asociados todavía en ese momento al enfoque "mecanicista" de la educación matemática. Sin embargo, esta ideas están cambiando ahora (ver Van den Heuvel-Panhuizen (ed) 2001). En realidad, ahora al menos al nivel de la teoría, se alcanzó el equilibrio deseado[24].

Otro balance que se alcanzó es entre comprensión y habilidades. Esto también incluye una opinión revisada sobre la ejercitación. En lugar de limitarse a rechazar los métodos tradicionales de repetición y práctica, se han desarrollado nuevas ideas sobre habilidades básicas y cómo los estudiantes pueden incrementar estas habilidades (van den Hauvel-Panhuizen y Treffers, 1998; Menne, 2001).

[24] Es interesante que ya al final de los ochenta Freudenthal llegó a la conclusión de que en los primeros días de la EMR (desde 1971 hasta 1981) se gastó demasiada energía en el diseño de los temas (por medio de cuáles dominios de la realidad podían ser dados a conocer al que aprende por la matematización horizontal), y muy poca en los contextos-modelos (que pueden ofrecer oportunidades para la matematización vertical) (ver Treffers, 1993).

Otro punto de crecimiento es que hay más conciencia de los diferentes requerimientos que tienen los grupos particulares de estudiantes, como niños inmigrantes (van den Boer, 1995), niños con dificultades de aprendizaje (e.g Boswinkel y Moerlands, 2001), niños superdotados (e.g Gofree, 2000a; 2001b), niñas y niños (e.g van den Heuvel-Panhuizen, 1998; van den Heuvel-Panhuizen y Vermeer, 1999) y estudiantes en la formación profesional (e.g van der Kooij, 2001).

Para la EMR es innegable que un niño de su tiempo no puede ser aislado de la preocupación presente en todo el mundo por la mejora de la educación matemática. Esto implica que la EMR tiene mucho en común con otros movimientos de reforma en matemática. Sin embargo, por otro lado también puede haber algunas diferencias. Una vez más, vale la pena reflexionar sobre estas diferencias. Pueden darnos pistas para una mejora adicional del qué – y – cómo de la educación matemática.

Referencias

- Anghileri, J and M. Beishuizen (in press). *From informal strategies to structuredprocedures: Mind the gap!*
- Boswinkel, N. and F. Moerlands (2001). Speciaal Rekenen – een onderzoek- en ontwikkelingsproject rond de invoering van realistisch rekenwiskundeonderwijs in het sbo. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken-wiskundeonderwijs, 19*, 3, 3-13.

Buys, K. (1998). Schattend rekenen moet je leren [Estimation you have to learn].*Willem Bartjens, 17*, 5, 16-22.
- De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW & OC, Utrecht University.
- De Lange, J. (1979). Contextuele problemen [Contextual problems]. *Euclides, 55*, 50-60.
- Dekker, A, H. ter Heege, and A. Treffers (1982). *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas* [Algorithmic multiplication and division according to Wiskobas]. Utrecht: OW&OC, Utrecht University.
- Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*, 3-8.
- Freudenthal, H. (1977). Antwoord door Prof. Dr. H. Freudenthal na het verlenen van het eredoctoraat [Answer by Prof. Dr. H. Freudenthal upon being granted an honorary doctorate]. *Euclides, 52*, 336-338.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical fenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K. (1982). Het gebruik van contexten [The use of contexts]. *Willem Bartjens, 1* (4), 192-197.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute.
- Goffree, F. (2000a). Bollebozen vroeger en nu. Heeft de wiskunde bollebozen iets te bieden? *Willem Bartjens, 20*, 1, 40-42.
- Goffree, F. (2000b). De andere wereld van (hoog)begaafde rekenaars*. Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs, 19*, 3, 26-29
- Janssen, J., F. van der Schoot, B. Hemker, and N. Verhelst (1999). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3* [An account of mathematics education in the final grade of primary school, part 3] . Arnhem: Cito.
- Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Beaton, A.E., Gonzalez, E.J., Kelly, D.L., and Smith, T.A. (1997). *Mathematics Achievement in the Primary School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Rengerink, J. (1983). *De staartdeling, een geïntegreerde aanpak volgens het principe van progressieve schematisering* [The long division, an integrated approach according to the principle of progressive schematization]. Utrecht: Vakgroep Onderwijskunde/IPAW, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron [Mathematics as an activity and reality as source], *Nieuwe Wiskrant, 5*, 1, 60-67.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education*. A Paradigm of Developmental Research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Streefland, L. (1996). Negative numbers – Reflections of a learning researcher. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 1, 57-79.
- Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht* [Wiskobas goal-directed]. Utrecht: IOWO.

- Treffers, A. and Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education – the Wiskobas program. In L. Streefland (ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. II, pp. 97-121). Utrecht: OW&OC, Utrecht University.
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Treffers, A. (1992). *Terug naar de toekomst. Reken-wiskundeonderwijs voor de basisschool 1972 – 2002* [Back to the future. Mathematics education in primary school 1972 – 2002]. In F. Goffree, - A. Treffers, J. de Lange, Rekenen anno 2002 (pp. 11-34). NVORWO.
- Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal: Realistic Mathematics Education. In L. Streefland (ed.), *The legacy of Hans Freudenthal*. Educational Studies in Mathematics, 25, 1-2. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- van den Boer, C. (1997). Allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs [Immigrant children in mathematics education]. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken- wiskundeonderwijs, 15*, 4, 27-34.
- Van den Brink, J.F. (1989). *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen* [Realistic arithmetic education to young children]. Utrecht: OW & OC, Utrecht University.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). *A representional model in a long-term learning process — the didactical use of models in Realistic Mathematics Education*. Paper presented at the 1995 AERA in San Francisco.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996*). Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). Gender differences in mathematics achievements in Dutch primary schools — On the search for features of mathematics education that are important for girls. In Chr. Keitel (ed.), *Social Justice and Mathematics Education* (p.135 -149). Berlin: Freie Universität Berlin.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). Realistic Mathematics Education: Work in progress. In T. Breiteig and G. Brekke (Eds.), *Theory into practice in Mathematics Education*. Kristiansand, Norway: Faculty of Mathematics and Sciences.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. and A. Treffers (1998). *Oefenen. Module behorende bij de Nationale Cursus Rekencoördinator* [Exercising. In-service training module for mathematics coordinators]. Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. and H. Vermeer (1999). *Verschillen tussen meisjes en jongens bij het vak rekenen-wiskunde op de basisschool* [Differences between girls and boys in primary school mathematics education]. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
- van den Heuvel-Panhuizen (ed.), M. (2001). *Children learn mathematics*. Utrecht/Enschede: Freudenthal Institute, Utrecht University / SLO.
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001a). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Utrecht: Freudenthal Institute (paper published on FI cd-rom).
- van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001b). Realistic mathematics education in the Netherlands. In J. Anghileri (ed.), *Principles and Practices in Arithmetic Teaching*. Buckingham: Open Univerity Press.
- van der Kooij, H. (2001). Mathematics and key skills for the workplace. In FitzSimons, O'Donoghue, Coben (eds.), *Adult and Lifelong Education in Mathematics* (pp. 231-242). Language Australia.
- van Galen, F. and E. Feijs (1991). A mathematics lesson on videodisc. In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
- van Galen, F., M. Dolk, E. Feijs, V. Jonker, N. Ruesink, and W. Uittenbogaard (1991). *Interactieve video in de nascholing reken-wiskunde* [Interactive video in the in-service training of teachers]. Utrecht: CD-ß Press / OC&OW, Utrecht University.