JAMES A. MIDDLETON, MARJA VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN Y JULIA A. SHEW

Usando Representaciones de Barras como un Modelo para Conectar Conceptos de Número Racional

Los estudiantes de los grados intermedios deberían entender, representar y usar números en una variedad de formas equivalentes, incluyendo fracciones, decimales y porcentajes. Deberían desarrollar un sentido numérico para las fracciones y otras representaciones del número racional. También deberían poder representar esas relaciones en forma gráfica (NCTM 1989). Este artículo profundiza los modelos de barra como representaciones gráficas del número racional.

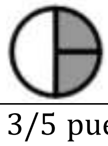
Fundamentación

Muchas de las investigaciones en el ámbito de la comprensión de los niños del concepto de número racional indican que, aunque el aprendizaje básico de las fracciones básicas se construye sobre conceptos aritméticos de los números enteros que los niños tienen, en general ya adquiridos, tienden a tener una gran dificultad en poner juntas estas ideas significativamente (Ohlsson, 1988). Algunas de las dificultades que los niños experimentan están resumidas en la **figura 1** (Marshall, 1993; Streefland, 1993).

Las dificultades en la enseñanza de los números racionales pueden atribuirse en gran medida al excesivo énfasis en los diferentes significados de los números racionales en lugar de sus similitudes generales. Cada significado de los números racionales ha sido tratado como un tema aislado: y cada manera de representar razones como un método distinto o un conjunto de símbolos. Generalmente, los intentos para hacer conexiones entre ellos a través de representaciones apropiadas no han sido difundidos lo suficiente. Los estudiantes deben llegar a comprender que fracciones, decimales, porcentajes y razones tienen un significado común subyacente y que uno puede y debería moverse de uno a otro cuando sea apropiado.

Para ayudar a resolver estas confusiones, los docentes necesitan alguna forma de representación de los números racionales que sintetice la naturaleza relativa de las cantidades, pero que también pueda usarse como un modelo "concreto". Los dibujos se han utilizado por mucho tiempo para dar a los estudiantes una percepción de la magnitud de las fracciones. Gráficos circulares, dibujos de conjuntos discretos de objetos y otras formas de representar fracciones, como las tiras, se han desarrollado específicamente con el propósito de comunicar números racionales de una manera que sea fácilmente comprendida.

Cualquier representación adecuada debe ser construida en base al conocimiento previo de nuestros estudiantes -su comprensión del compartir, estirar, contraer y graduar en el mundo real. Este requerimiento significa que, por una parte, el modelo debe ser concreto para los estudiantes en el sentido que sea imaginable y comprensible en sí mismo, y por otra parte, el modelo debe ser tan flexible como los mismos números racionales.

DIFICULTAD	EJEMPLO
Sobregeneralizar las propiedades de los números naturales a los números racionales	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2/4$
No tener en cuenta el "tamaño" de las partes	El dibujo de un niño de 2/3: 
Confundir los diferentes significados de una fracción en diferentes contextos, lo que	3/5 puede tener cualquiera de los siguientes significados:

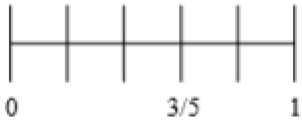
puede ocurrir cuando cada significado es enseñado como un tema separado	-*Parte / todo*: 3/5 de un sándwich submarino ("sub"). -*Probabilidad*: La chance de ganar es de 3 a 5 (3 eventos ganadores sobre un total de 5 eventos) -*Parte- parte*: Las probabilidades de ganar son 3:5 (3 eventos ganadores de cada 5 eventos perdidos). -*Factor de escala*: Yo sólo necesito 3/5 como mucho. ¿Puedes reducirlo al 60%? -*Unidad de medida*: Lleva 5 vueltas de 3/5 de km. para finalizar una carrera de 3km. -*Número en una recta numérica:* 

Figura 1: Algunas de las dificultades que tienen los niños cuando aprenden los conceptos de número racional

La Barra como un Modelo Matemático

La **figura 2** ilustra cómo hemos usado los modelos de barra para desarrollar la comprensión de los estudiantes de las fracciones, decimales, porcentajes y razones. Nosotros generalmente comenzamos con los objetos "reales" y nos movemos hacia representaciones más abstractas a medida que la comprensión de los estudiantes se hace más sofisticada, pero un docente puede desear introducir la representación completa en cualquier momento, de acuerdo a cómo los estudiantes están pensando o al contexto del problema. Nosotros elegimos el contexto de los sándwiches submarinos como la primera introducción formal a nuestros estudiantes de las fracciones porque la división en partes iguales es *lineal,* entonces los estudiantes necesitan atender a una sola dimensión, y porque el modelo encarna la unidad común, la longitud. Otros contextos lineales también son usados: vasos graduados para medir, rutas en un mapa, etc. para hacer conexiones con las comprensiones que los estudiantes tienen del mundo real.

A medida que los estudiantes se familiarizan con cortar sándwiches y otros modelos "lineales", los dibujos luego son abstraídos a una similar pero *común* representación, una barra (ver **figura 2a**). Pero aún aquí, la barra es usada a la manera de un "número natural". Cada sándwich submarino, o "sub", se representa con una barra separada. Los estudiantes pueden modelizar cualquier problema de partición con la barra como un sustituto de los objetos reales y contar el número de pedazos para ser distribuidos en el total.

El uso de un dibujo para construir el razonamiento acerca de las fracciones es útil de varias maneras. La barra se divide fácilmente en fracciones referentes, como ½, 1/3 y ¼, simplemente estimando o midiendo. En las instancias de ½ y ¼, la simetría de la barra permite el desarrollo de estrategias conceptuales que hacen uso del dividir por dos reiteradamente. La barra entonces provee un indicador visual del tamaño relativo de estas fracciones y puede ser fácilmente situada en un contexto en el que los estudiantes o bien comprendan intuitivamente o tengan un fácil acceso experimental, como compartir sándwiches o tiras de fruta, o medida y distancia (ver Ball [1993] para una linda descripción de cómo ella usa modelos pictóricos en su enseñanza).

La comprensión que la barra puede usarse para representar contextos- el numerador (aquí los sándwiches) o el denominador (la gente) - puede significar un salto grande para algunos estudiantes (ver **fig. 2b**). La fracción debe extraerse del número de personas por el principio de reparto equitativo: Un pedazo de cada sub se da a cada una de las cinco personas, resultando en un total de 2/5 de sub para cada una. Debe señalarse que la contabilidad de los objetos es todavía esencial, de modo que la abstracción del modelo no es demasiado grande. El salto puede también reducirse tomando sólo un sub (ver **fig. 2c**) y relacionando la fracción a una propiedad física del contexto, como el peso.

La barra puede también usarse para representar una cantidad que pueda no ser contable en la representación misma. En el ejemplo de compartir 30 subs entre 75 personas (**fig.2d**), los alumnos deben usar razonamiento proporcional para dividir la barra equitativamente para descubrir que 5 personas deberían compartir 2 subs entre ellos. Aquí, el estudiante dividió la barra primero en tercios, y luego cada tercio en quintos, la fracción reducida. El estudiante puede entonces comenzar a ver la relación entre 30/75; 20/50; 10/25, y la fracción irreducible 2/5, con la ayuda del modelo.

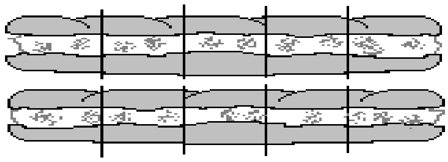
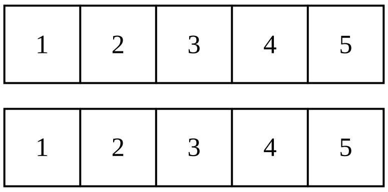
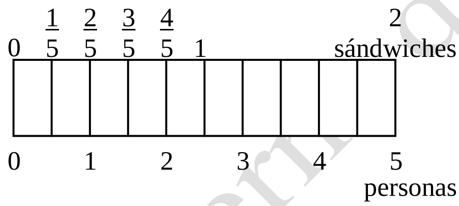
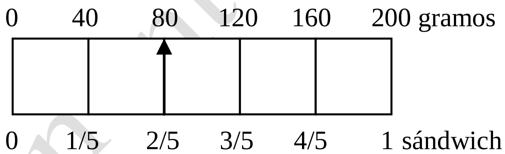
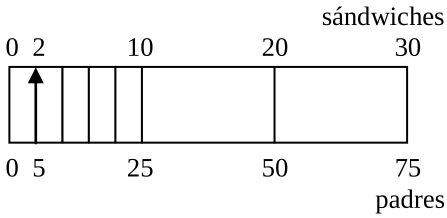
Cuando se extiende a una representación abstracta de la relación entre dos o más cantidades (ver **fig. 2e**), la barra de fracción ayuda a los estudiantes a conectar diferentes nociones de los números racionales con una indicación visual de las proporciones. Dado que las notaciones comunes usadas para comunicar números racionales -fracciones, decimales, porcentajes y razones- surgen de la representación común, pueden ser vistas por los estudiantes como instancias del mismo concepto matemático. Hemos encontrado que estos puntos comunes son particularmente útiles para minimizar las dificultades asociadas con la enseñanza de las diferentes notaciones de las relaciones parte – todo - fracciones, decimales y porcentajes.

Tal herramienta gráfica permite un acceso fácil al sentido numérico para estudiantes que son pensadores más visuales, así como también actúa como una herramienta de flexibilización visual para estudiantes que son más simbólicos en el pensamiento. Provee una base para desarrollar rutinas conceptuales para el cálculo y ofrece una manera rápida de chequear la racionalidad de las respuestas. Más aún, se extiende al uso de gráficos de dos dimensiones en álgebra, geometría y contextos de estadística.

Viñetas

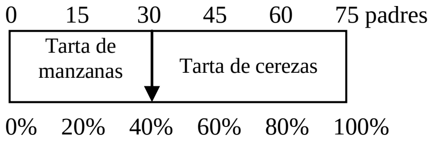
Compartir sándwiches submarinos

Esta viñeta describe las estrategias de estudiantes de quinto grado en sus primeras experiencias con el modelo de barra. Era su primera experiencia formal con fracciones en quinto grado, aunque su conocimiento informal era bastante detallado para las fracciones de referencia comunes como ½, ¼ y ¾. Los estudiantes, trabajando en grupos, tuvieron que resolver problemas del conjunto de abajo en la **fig. 3** (van Galen et al. 1977). Cuando los grupos terminaron, el docente los reunió para discutir las estrategias. Sus soluciones se presentan en la **figura 4**.

Representación	Modelo	Problemas ejemplo
Objetos “reales”		Cinco estudiantes quieren compartir dos sándwiches submarinos. ¿Cuánto recibe cada alumno?
a) Substituir los objetos “reales”		Cinco estudiantes quieren compartir dos subs. ¿Cómo pueden compartirlos de forma equitativa?
b) Partición parte-todo y denominación de los pedazos con fracciones (Aquí la barra representa más de un solo objeto).		Cinco estudiantes quieren compartir dos subs. ¿Qué fracción recibe cada uno?
c) Relacionar fracciones con las propiedades del objeto. (peso, costo, etc.)		Cada sándwich pesa 200 gramos. Si cada estudiante recibe 2/5 de sub, ¿cuánto pesa la porción?
d) Cantidad que representa la relación entre dos conjuntos de objetos.		El consejo de estudiantes servirá 30 subs a 75 padres. ¿Cuánto recibe cada padre?

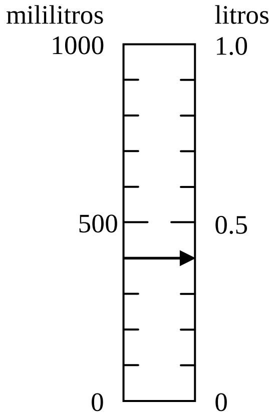
e) Representación abstracta de dos o más cantidades relacionadas.

Porcentaje



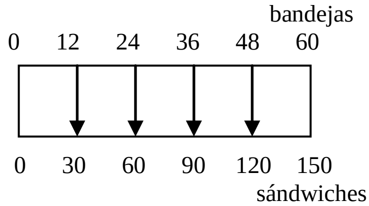
El consejo de estudiantes tiene 30 pedazos de pastel de manzanas y 45 de pastel de cerezas para repartir entre los 75 padres. ¿Qué porcentaje de los padres recibe cada tipo de pastel?

Decimal



Susan tiene 400ml de jugo que quedaron después de la fiesta. Ella solo tiene una botella de un litro para guardarlo. ¿Hasta dónde se llenará su botella?

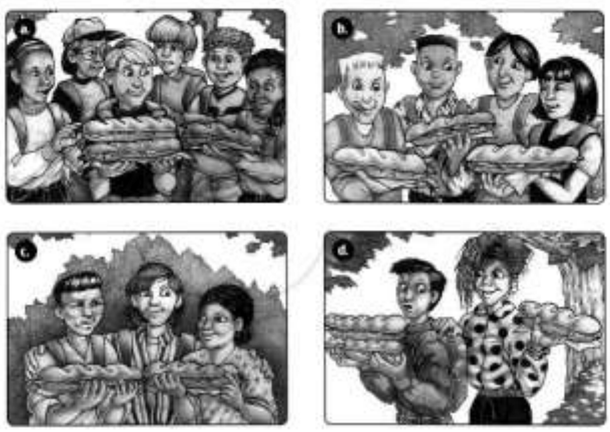
Razón



El consejo de estudiantes planea comprar 12 bandejas grandes de ensalada por cada 30 sándwiches. Si compran 150 subs, ¿cuántas bandejas de ensalada tendrán que comprar?

Figura 2: Maneras en que los modelos de barra apoyan la comprensión de los estudiantes de diferentes significados de los números racionales

Sándwiches



En la escuela Booker T. Washington, una clase está planeando una salida de campo. La clase está dividida en grupos de estudiantes. Cada grupo junta su dinero para comprar sándwiches submarinos para el almuerzo. Cuando llega la hora del almuerzo, cada grupo comparte los subs equitativamente. Arriba, puedes ver cuatro grupos y el número de subs que tienen para compartir.

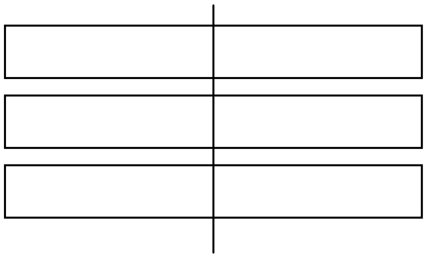
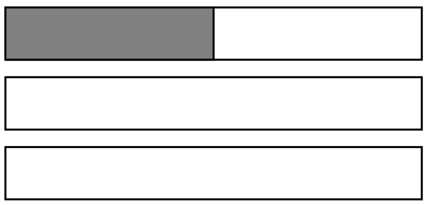
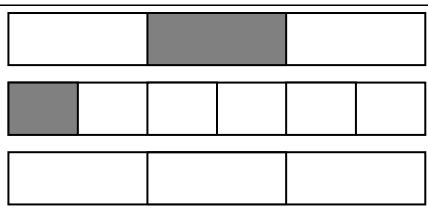
1. ¿En qué grupo los estudiantes reciben mayor cantidad para comer?
2. ¿En qué grupo reciben menos? Explica tu respuesta

3. Usa los rectángulos que están al lado de cada dibujo para mostrar cómo deberían cortarse los sándwiches para que cada estudiante en el grupo reciba la misma cantidad. Colorea los pedazos para Emmy, Jake, Sandra y Walter. Luego usa fracciones para describir cuánto recibirá cada uno. 1. Haz dos dibujos más de estudiantes con sándwiches submarinos. Elige tus propios números para estudiantes y sándwiches. Muestra cómo podrían ser repartidos de manera equitativa. Describe en fracciones cuánto recibirá cada estudiante.	Fuente original del material: Corporación Educativa de la Enciclopedia Británica, *Matemáticas en un Contexto: Algunas de las Partes, 1997.* Todos los derechos reservados. Adaptado con permiso. Sólo puede ser reproducido con propósitos educativos. Llamar al (800) 554-9862 para pedir información.

Figura 3: Fracciones de sándwiches submarinos

Durante la clase con todo el grupo, los niños idearon varios métodos para compartir tres subs de manera equitativa entre seis estudiantes. Las soluciones dadas por Beth y Steve fueron las estrategias más comunes, y los estudiantes fácilmente vieron que tres subs divididos en seis pedazos hacían porciones del mismo tamaño que dividiendo un solo sub en dos pedazos. Sin embargo, los estudiantes discutieron acerca de si la fracción representada por la porción debería ser un sexto o un medio. El grupo de Beth sostuvo que la fracción debería ser un medio porque los subs fueron cortados en seis pedazos en total. El grupo de Steve contradecía diciendo. “Sí, pero Emmy sólo recibe un medio de un sub.” La maestra preguntó: ¿Quién tiene razón?

“Depende de si piensas que el “todo” es un sub o todos los subs. Beth tiene razón si estás tomando una fracción de todos los subs, pero Steve tiene razón si estás hablando de qué parte de un sándwich ella recibe.”

ALUMNO	ESTRATEGIA	MODELO DE BARRA
Soluciones para el problema de compartir tres subs entre seis		
Beth	Cortar los 3 subs en dos pedazos y dar la mitad a cada estudiante.	
Steve	Cortar todos los subs en dos pedazos y dar la mitad a Emmy.	
Anna	Cortar los 3 subs en tercios, y luego cortar un sub en sextos (dividiendo los tercios por la mitad)	

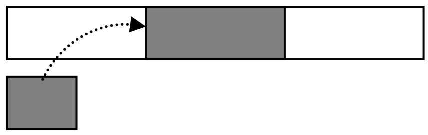
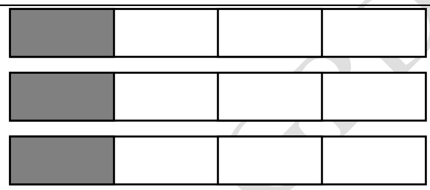
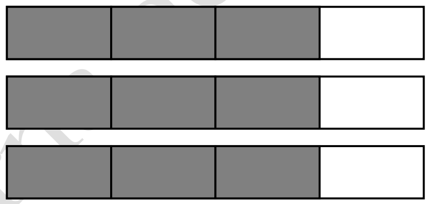
Darren	(Usando la solución de Anna) Mover físicamente un sexto de un sub al lado de un tercio de un segundo sub para hacer tres sextos.	
Soluciones para el problema de compartir tres subs entre cuatro estudiantes		
Jeff	Cortar un sub en un pedazo de tres cuartos y dar el pedazo más grande a Jake.	
Anna	Cortar todos los subs en cuartos, y darle a Jake tres pedazos de un cuarto a Jake. Los pedazos restantes son distribuidos entre los otros estudiantes.	
Tim	Cortar los tres subs en cuartos, y dar tres pedazos de un cuarto a tres estudiantes. Los pedazos restantes se ponen juntos para hacer la última porción de tres cuartos.	

Figura 4: Estrategias de niños de quinto grado que usan la barra para modelizar fracciones parte –todo.

Más tarde Anna dio una estrategia muy diferente (ver **fig. 4**). La cuestión que surgió fue si su solución era la misma que la de Steve. Darren usó el modelo de barra de Anna para demostrar que 1/3+1/6=1/2. Las explicaciones de Darren ilustran el uso de la barra para desarrollar los comienzos del razonamiento proporcional. Como las barras son del mismo largo, el "entero" es un valor constante y los estudiantes sólo necesitaban acomodar los pedazos para comparar las diferentes soluciones.

Después, cuando la clase pasó al problema de compartir tres subs entre cuatro estudiantes, los niños usaron estrategias similares de cortar y pegar para comprobar si las soluciones diferentes eran equivalentes. Las estrategias de Jeff, Anna y Tim ilustran distintas maneras en las cuales los niños usan las barras para probar que tres pedazos de un cuarto son lo mismo que un pedazo de tres cuartos.

Estas estrategias ilustran cómo los modelos pictóricos como la barra pueden usarse como una herramienta para la comunicación de todo el grupo. La barra es valiosa como un modelo que permite a los estudiantes *mostrar* diferentes niveles de soluciones y sostiene diferentes maneras de expresar las fracciones subyacentes.

Después de crear sus propias estrategias individuales y de los pequeños grupos, los estudiantes compartían formas muy distintas de pensar sobre el problema, y esta discusión era importante para llevar a los estudiantes a un nivel mayor de razonamiento. Jeff veía la fracción como tres cuartos de un solo sub. Tim también puede haber percibido la fracción en esta forma. Él inicialmente bromeaba que no todos los estudiantes recibirían una porción tan grande, olvidándose de los tres "pedazos de las puntas". Sin embargo, cuando Anna hizo una representación contable y distribuyó los pedazos, Tim y el resto de la clase fueron capaces de ver la conexión entre tres cuartos (los tres pedazos) y ¾ (la proporción continua).

Tim: Ellos suman uno, dos, eso haría medio y luego ¡boom! ¡Tenés tres cuartos!

Determinar el uso del estacionamiento

Esta viñeta es de otra clase de quinto grado, que había tenido más experiencia con números racionales. Los estudiantes estaban acostumbrados a usar el modelo de barra para estimar fracciones, pero esta actividad fue su primer intento para conectar su conocimiento de fracciones con el nuevo concepto: porcentajes. Se presentó a los estudiantes la página de problemas que aparece en la **figura 5** y trabajaron en pequeños grupos (van den Heuvel-Panhuizen et al. 1997). Sus estrategias de solución se muestran en la **figura 6**.

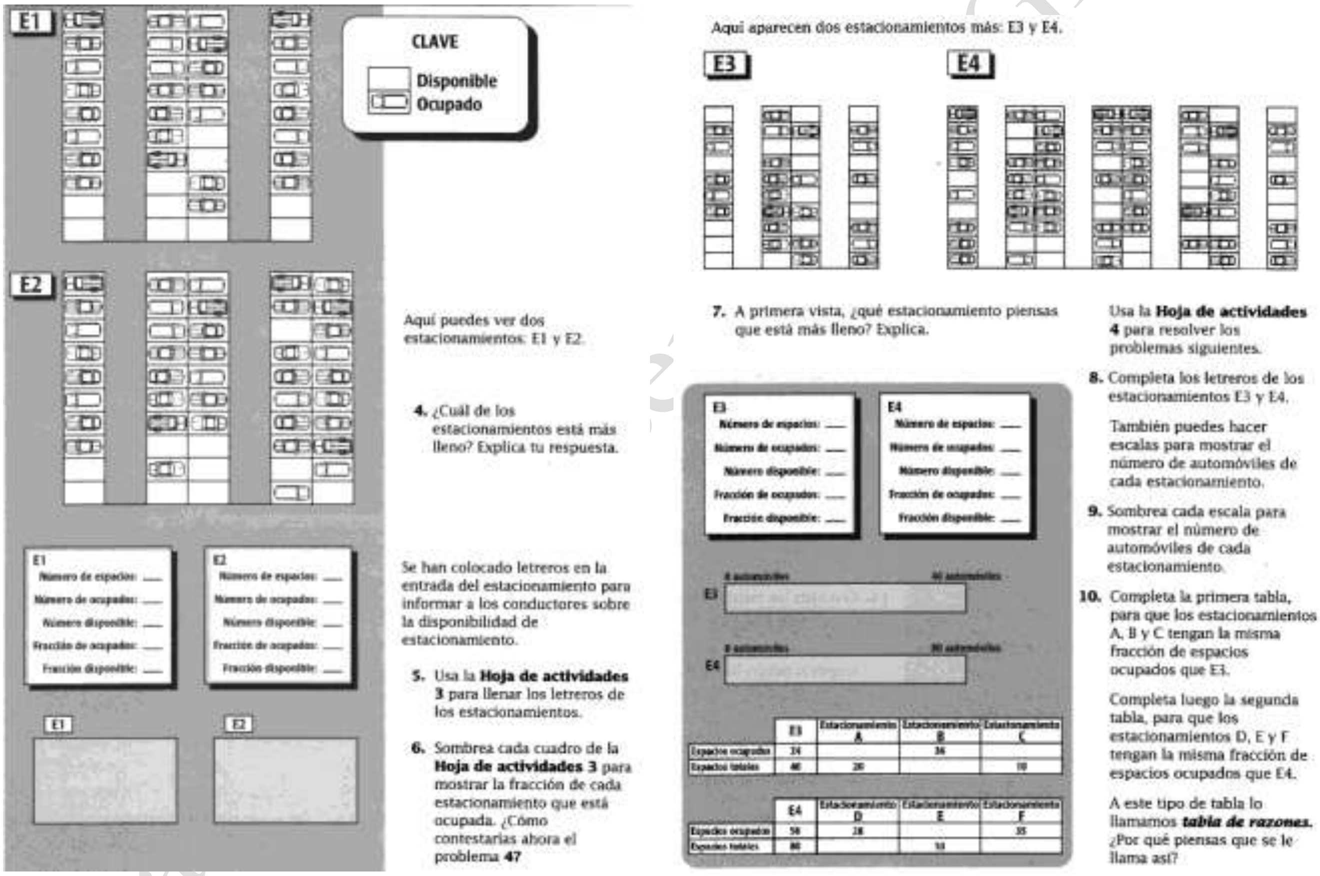


Figura 5: Problemas en el estacionamiento

Rae: Yo tomé ½ y un poquito más… Encontré 24 aquí [señala la línea de la barra de arriba], y como 40 es la mitad de 80, esto [señala el 24] es la mitad de aquí [señala al 48 en la barra de abajo], entonces esto es 48, y un poco más es 56.

En otro grupo el razonamiento fue menos visual y más de cálculo; de todas maneras, ilustra las conexiones que la barra puede hacer entre estrategias de cálculo y modelos visuales.

Breah: Nosotros dividimos la barra de arriba en 5 espacios iguales [y pintamos 3], y pintamos 7 (en el estacionamiento 4).

Cal: 3/5=6/10, que es menor que 7/10, entonces el estacionamiento 4 está más lleno (ver **figura 7**).

Antes de hacer este ejercicio, Cal pensó que el estacionamiento 3 estaba más lleno; él se estaba enfocando en el número de espacios vacíos en cada estacionamiento (16 contra 24) más que en la proporción de lugares ocupados. Después corrigió su razonamiento para incluir ambos argumentos -que si uno estaba buscando un lugar para estacionar, el número de espacios sería suficiente para tomar una decisión, pero si uno estuviera planeando cerrar un estacionamiento, las proporciones serían más adecuadas.

Nótese que aquí, la barra ha evolucionado desde un modelo concreto de los objetos a compartir, como en el ejemplo de sándwiches submarinos, hacia un modelo *relativo* que puede ser usado para hacer comparaciones.

Como los estudiantes comenzaron a usar la barra como una herramienta para dibujar a escala, empezaron a desarrollar estrategias generales para la estimación. La estrategia más común que vemos en clases de quinto grado es la de dividir por la mitad reiteradamente. Por ejemplo, al siguiente estudiante se le pidió que estimara el porcentaje de competidores que abandonaron en una maratón a causa de la lluvia. El número total de competidores era 1603, y el número de los que abandonaron fue 91.

Alumno: Es un poco menos que 6 %.

Los dibujos del estudiante (**fig. 8**) son un ejemplo claro de la división reiterada por dos como una estrategia de estimación general. Él halló la mitad del número total de competidores, después de redondear a 1600, y marcó esa posición en la barra. Luego usó su conocimiento previo de porcentajes y fracciones de referencia y escribió el 50% que correspondía a los 800 competidores. Luego encontró la mitad de los 800 y marcó 25% en la barra. Repitiendo esta estrategia, nuevamente con un redondeo apropiado, finalmente terminó con 100 competidores, lo cual corresponde aproximadamente al 6% del total. Como 91 es un poco menos que 100, una estimación rápida "Es un poco menos del 6%" parece ser una muy buena y pronta estimación conceptual del 5% representado por el número.

También se usaron otras estrategias. Muchos estudiantes como Breah y Cal, usaron su conocimiento previo de fracciones referentes, ½, ¼, ¾, 1/5 y 1/10, para dividir las barras y asignar los porcentajes o razones correspondientes. Otros usaron una combinación de estrategias, como encontrar 3/10, o 30%, y luego dividir por 2 para encontrar 3/20, o 15%. Las barras se volvieron herramientas flexibles para la estimación y el cálculo.

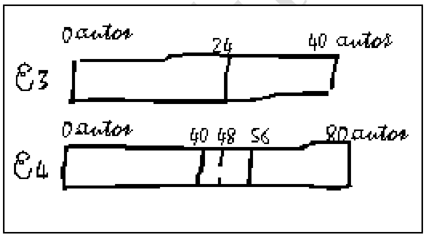


Fig. 6: Una solución visual del problema del estacionamiento

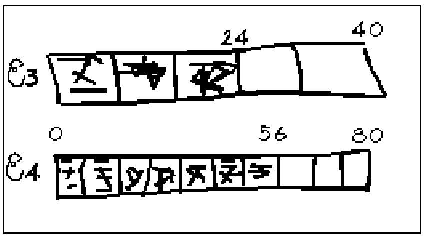


Fig. 7: Una solución más computacional

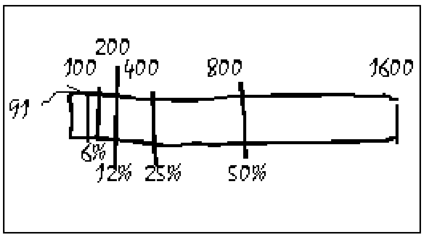


Fig. 8: Estimación usando la división reiterada por 2

Aplicaciones del Modelo de Barra

En numerosas aplicaciones de la vida diaria encontramos extensiones del modelo de barra, donde a menudo aparecen como "líneas numéricas dobles". Por ejemplo, casi todas las herramientas para convertir las unidades del sistema métrico decimal a las unidades usuales en los EE.UU. toman esta forma. Un patrón metro –yarda, puede leerse como una relación lineal o de razón entre dos sistemas de medida para la longitud. Otros ejemplos pueden encontrarse en la **figura 9.**

Aplicaciones del modelo de Barra en el Mundo Real	Relación Matemática
Gráficos de barras	Proporciones de barras indican el porcentaje relativo o fracción del número total de observaciones.
Indicadores del nivel de llenado en aspiradoras nuevas	Indicador visual de cuán llena de polvo está la cámara de recolección de una aspiradora.
Medidores de combustible	Indicador visual de cuan lleno está el tanque de combustible de un automóvil puede ser comparado con la capacidad total en litros o galones. (ej., lleno por la mitad = 7 galones)
Cilindros graduados	1 litro = 1.06 cuartos de galón. 1 decilitro = 100 mililitros. 1 mililitro = 0.034 onzas fluidas. 355 mililitros = 12 onzas fluidas, la capacidad de una lata típica de gaseosa.
Escalas en los mapas	1 km = 0.625 millas (alrededor de 5 mi/ 8km). Los mapas más viejos también usan el rod (5.0292 m) como unidad de medida.
Patrón de metro – yarda	1m = 3.3 pies. 1cm = 0.4 pulgadas. ½ m = 50 cm. 15 m = 50 pies, la altura promedio de un edificio de cinco pisos.
Medidor de velocidad	88 km por hora = 55 millas por hora, un típico límite de velocidad máxima.
Barras de estado en las computadoras	Muestran cuánto ha sido copiado de un archivo, a menudo están expresadas en bytes y porcentajes.
Medidores de la presión de las cubiertas de un vehículo	1 kilopascal (Newtons por metro cuadrado) = 0.1458 libras por pulgada cuadrada. 247 kilopascales = 36 libras por pulgada cuadrada, una típica presión de cubierta recomendada para automóviles en E.E.U.U.

Figura 9: Aplicaciones del modelo de barra en el mundo real

Conclusión

Comparando las barras de fracciones con tablas de razones (Middleton y van den Heuvel–Panhuizen, 1995) y otras formas de enseñar números racionales, las estrategias numéricas se conectan con las estrategias visuales, permitiendo a los estudiantes con diversas formas de pensamiento, compartir su comprensión. A menudo, las conexiones entre diferentes maneras de representar los números racionales -entre un dibujo, un símbolo y una actividad manipulativa- construyen comprensión para los niños. (Behr et al. 1992). El modelo de barra es una representación matemática para enseñar números racionales que hace estas transferencias más fáciles. Es una extensión de varias cosas que muchos buenos docentes ya usan, como tiras o regletas de fracciones, pero puede ser desarrollada para incluir situaciones más complejas. Aunque nosotros nos focalizamos en este método de representar razones, no estamos propiciando la imposición de la barra a los estudiantes como "la manera correcta de pensar sobre las fracciones." En lugar de eso, creemos que la barra debería surgir naturalmente de los buenos problemas que son imaginados fácilmente como un modelo lineal, y luego puede desarrollarse como una manera común para los estudiantes de mostrar su pensamiento para facilitar la comunicación. El docente puede desear dar dibujos de barras para que los estudiantes usen, pero más a menudo, alentarlos a que ellos dibujen las representaciones. A medida que los estudiantes se familiarizan con las fracciones referentes, el uso de las barras tiende a disminuir siendo reservado para problemas más difíciles.

Nosotros hemos incluido dos ejemplos de problemas en la **figura 10** para usar con los estudiantes. El primer problema puede referirse tanto a fracciones como a razones -usar una relación para predecir una cantidad a partir del valor de otra cantidad diferente -y el segundo problema tiene que ver con razonar a partir de porcentajes. Este segundo problema es bastante difícil para muchos estudiantes de grados intermedios sin el apoyo de un dibujo, pero se hace mucho más accesible a través del uso de la barra como modelo de apoyo.

PROBLEMAS	SOLUCIONES

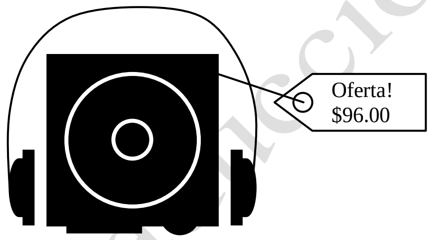
PROBLEMAS

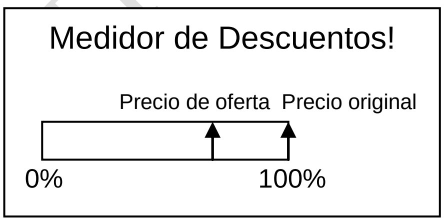
Problema 1

John y Margie están conduciendo de Salt Lake City a Reno. La mamá de Margie le dice que es un viaje de alrededor de 10 horas. Margie está de acuerdo. “Mirando el mapa, parece ser de 520 millas,” dice ella. Durante el viaje, John dice, “Hemos conducido aproximadamente 7 horas. Me pregunto qué distancia tenemos que recorrer aún.”
Dibuja una barra que ilustre la distancia desde Salt Lake City a Reno. Muestra en la barra el lugar aproximado en el que están John y Margie y la distancia que aún deben recorrer. Usando tu dibujo, explica cómo se relacionan el tiempo y la distancia que han recorrido.

Problema 2

Un centro comercial está realizando una liquidación en su departamento de electrónica. El precio de oferta de un reproductor de discos compactos se muestra en la etiqueta del dibujo.

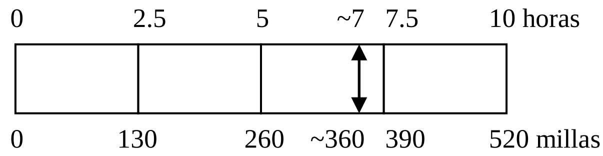




De acuerdo a la barra, ¿cuánto piensas que fue el porcentaje aproximado de descuento? ¿Cuál

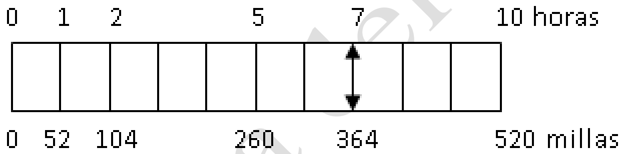
SOLUCIONES

Problema 1: Solución 1



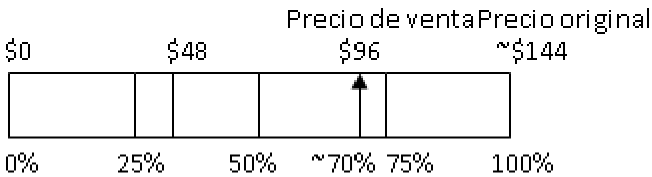
Aquí la división repetida por dos es la estrategia primaria. Primero marcar el punto medio a las 5 horas y 260 millas. Luego, encontrar los tres cuartos del viaje (7½ horas y 390 millas) y moverse un poco hacia la izquierda para realizar una estimación de 360 millas. Restando esta cantidad a 520 se muestra que quedan alrededor de 160 millas para recorrer.

Problema 1: Solución 2



Esta estrategia es un poco más sofisticada. Encontrar 1/10 de la razón para determinar cuánto han viajado en una hora. Luego multiplicar por 7 para determinar la distancia que viajaron en 7 horas.
Una alternativa sería dividir por 2 para encontrar la distancia que viajaron en 5 horas. Encontrar 1/10 de la barra y duplicar esta cantidad para encontrar la distancia que viajaron en 2 horas (o solo hallar 1/5). Sumar esta cantidad a la distancia que viajaron en 5 horas para encontrar la distancia que viajaron en 7 horas.
Ambas estrategias llevan a la solución exacta de 364 millas en 7 horas, con 156 millas más para recorrer.

Problema 2: Solución



Esta estrategia involucra dividir por dos los $96 para llegar a $48, aproximadamente 1/3 del precio original. Sumando los $48 a los $96 se aproxima al precio original de $144.
Para estimar el porcentaje de descuento, dos métodos son comunes. El primero reconoce visualmente que el precio de oferta es alrededor de 2/3 del total. La mayoría de los estudiantes después, o bien recuerdan que 1/3 es un poco más del 33% y estiman que el doble de esta cantidad es 67%,

era el precio original del reproductor? (a)	o dividen el 100% en tercios y suman dos de los tercios. El segundo método que hemos visto para estimar el porcentaje también involucra la división reiterada por 2. Los estudiantes primero hacen una marca para 50% y otra para 75%. Luego, hacen una estimación “a ojo” de aproximadamente el 70%, o continúan dividiendo por 2 (por ejemplo, encuentran 62.5%, luego 69%, etc.) hasta que piensan que su estimación está lo suficientemente cerca del precio de liquidación. (b)

Figura 10: Problemas ejemplo (a) y soluciones (b)

Referencias

- Ball, Deborah L. “Mitades, Pedazos y Medios: Construcción y Uso de Contextos de Representación en la Enseñanza de las Fracciones.” En *Números Racionales: Una Integración de la Investigación,* editado por Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, y Thomas A. Romberg. Hillsdale, N.J.: Asociación Lawrence Erlbaum 1993.
- Behr, Merlyn J., Guershon Harel, Thomas Post, y Richard Lesh. “Número Racional, Razón y Proporción.” En *Guía de la Investigación de la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática,* editado por Douglas A. Grouws. Reston, Va.: Consejo Nacional de Maestros de Matemática, 1992.
- Marshall, Sandra P. “Evaluación de la Comprensión de los Números Racionales: Un Enfoque Basado en Esquemas.” En *Números Racionales: Una Integración de la Investigación,* editado por Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, y Thomas A. Romberg, 261-88. Hillsdale, N. J.: Asociación Lawrence Erlbaum, 1993.
- Middleton, James A. y van den Heuvel-Panhuizen, Marja. “La Tabla de Razones: Ayudando a los alumnos a Comprender los Números Racionales” *Enseñanza de la Matemática en los Grados Intermedios 1*(Enero – marzo 1995): 282-88.
- Consejo Nacional de Maestros de Matemática (NCTM). *Standards de Curriculum y Evaluación para la Matemática Escolar.* Reston, Va.: NCTM, 1989.
- Ohlsson, S. “Significado Matemático y Significado de Aplicación en la Semántica de las Fracciones y Conceptos Relacionados.” En *Conceptos Numéricos y Operaciones en los Grados Intermedios,* editado por James Hiebert y Merlyn Behr. Reston, Va.: Asociación Lawrence Erlbaum, 1988.
- Streefland, Leen. “Fracciones: Un Enfoque Realista”. En *Los Números Racionales: Una Integración de la Investigación,* editado por Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema. Y Thomas A. Romberg, 289 – 325. Hillsdale, N.J.: Asociación Lawrence Erlbaum, 1993.
- van den Heuvel – Panhuizen, Marja; Streefland, Leen y Browne, James. “Por el Sentido.” En *Matemáticas en un Contexto: Un Curriculum Conectado para Grados del 5° al 8°*, editado por el Centro Nacional de Investigación de la Educación de las Ciencias Matemáticas y el Instituto Freudenthal. Chicago: Corporación Educativa de la Enciclopedia Británica, 1997.
- van Galen, Frans; Wijers, Mónica; R. Cole, Beth y Shew, Julia A. “Algunas de las Partes.” En *Matemáticas en un Contexto: Un Curriculum Conectado para Grados del 5° al 8°*, editado por el Centro Nacional para la Investigación de la Educación de las Ciencias Matemáticas y el Instituto Freudenthal. Chicago: Corporación de Educación de la Enciclopedia Británica, 1997.

JAMES MIDDLETON, jimbo@imapl.asu.edu, enseña en la Universidad del Estado de Arizona, Tempe, AZ 85287. Sus intereses profesionales se centran en el pensamiento matemático de los niños, la motivación y el cambio en los docentes.
MARJA van den HEUVEL – PANHUIZEN, m.vandenheuvel@fi.uu.nl. fue durante diez años maestra de grados en la escuela primaria y de educación especial. Desde 1987, ha trabajado en el Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, Países Bajos. Es una de las personas que desarrolló el material para el proyecto Matemática en Contexto y está especialmente interesada en evaluación.
JULIA SHEW, shewa@muc.edu. Enseña en la Universidad Mount Union, donde disfruta de trabajar con maestros primarios en formación.

Este artículo fue publicado en la revista Mathematics Teaching in the Middle School – Vol. 3. Nº 4 – January 1998, pág. 302-312 - NCTM – Estados Unidos de Norteamérica.
Traducido por Nora A. Da Valle y Ailén Bressan (2000) y revisado por Ma. Fernanda Gallego (2018).