Diagramar y pensar diagramáticamente. El problema de la escalera.
Rev. Novedades Educativas. Junio 2017. pp 36 a 43.
Betina Zolkower y Ana Bressan

RESUMEN: Enmarcado dentro de la Educación Matemática Realista, este artículo trata acerca de los modelos en el aprendizaje-enseñanza de la matemática desde una perspectiva semiótica y que concibe al pensamiento como una práctica social y material de índole diagramática. Con el objeto de ilustrar las múltiples funciones del diagrama analizamos diagramas realizados por alumnos y docentes para abordar un problema de conteo. Al cierre, enfatizamos la importancia de diagramar y del estudio de los diagramas tanto en las aulas como en la formación docente.

1. Introducción

En este trabajo articulamos ideas centrales de la Educación Matemática Realista (EMR) - matematización, reinvención guiada, interacción y modelo de/modelo para[1] - con la semiótica Peirceana, específicamente, la problemática de los diagramas y el pensamiento diagramático. Partiendo del supuesto que todo pensamiento es diagramático (Peirce 1931-58), argumentamos que darles oportunidades guiadas a los alumnos para que diagramen situaciones problemáticas y luego analicen en detalle los diagramas producidos a la luz de la situación en cuestión, contribuye significativamente a desarrollar su capacidad para pensar matemáticamente con y acerca de diagramas.

Abordamos el tema en cuestión tomando como ejemplo el siguiente problema (Rubel & Zolkower, 2007): *¿Cuántas son todas las maneras diferentes posibles de subir una escalera de 10 escalones si está permitido subir los escalones de 1 en 1, de 2 en 2 o combinando saltos de 1 y 2?* Presentando distintos modos de diagramar la situación, destacamos los aspectos de la misma visibles en que cada diagrama, describimos en qué medida y cómo cada uno apoya el conteo de diferentes maneras de subir y, haciendo 'dialogar' los distintos diagramas, explicitamos relaciones entre la secuencia de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …), las permutaciones con repetición, los números combinatorios, los números triangulares, los números tetraédricos y el triángulo de Pascal. Concluimos con una reflexión acerca del valor de trabajar con diagramas, en las aulas de matemática y en las de formación docente, tratando a estos como modelos de representación, herramientas de trabajo, dispositivos de comunicación y artefactos para pensar y razonar.

2. Diagramas y pensamiento diagramático

Tal como explica Hoffmann (2007), para Peirce el diagrama es un signo que representa relaciones el cual se construye, interpreta y transforma en base a reglas y convenciones de un determinado

---

[1] La EMR concibe a la matemática como una práctica social que consiste en organizar (*matematizar*) situaciones problemáticas. Matematizar horizontalmente consiste en transitar de un fragmento de la realidad que se presenta como problemático y matematizable a un modelo que sirve de herramienta para abordar el problema en cuestión. Matematizar verticalmente consiste en trabajar dentro de la matemática, por ejemplo, explorando ideas subyacentes a un modelo determinado o relacionando distintos modelos. Es crucial distinguir entre *modelo de* y *modelo para.* El *modelo de* se asemeja a la situación de referencia; el *modelo para* se desprende de la misma lo cual le da una mayor generalidad y rango de aplicabilidad. Desde esta corriente didáctica, al docente le toca la doble tarea de presentar situaciones problemáticas realistas (razonables, imaginables) que conduzcan a la *reinvención* de modelos y guiar la *interaccion* en el aula con miras a facilitar procesos de esquematización, abstracción, generalización, simbolización y formalización (Freudenthal 1991, van den Heuvel-Panhuizen 2003, 2005, Streefland 1991, Treffers, 1991, Bressan y otros, 2005, Zolkower & Bressan 2012).

sistema. Desde la semiótica Peirceana la matemática se entiende no como una actividad mental apoyada sobre diagramas sino, en cambio, como una actividad (pensar con y razonar acerca de diagramas) esencialmente material, perceptual, empírica y experimental (Dörfler 2001). La relación entre el diagrama como signo y el objeto/situación de referencia es triádica (signo-interprete-objeto) de lo cual se desprende de esto que el significado de un diagrama (como el de todo signo) está sujeto a múltiples interpretaciones y que este proceso de interpretación requiere del lenguaje verbal (Dörfler, 2005).

Los diagramas cubren un continuo desde lo puramente icónico, donde hay relación de semejanza con el objeto que significan, hasta lo puramente simbólico donde la relación es arbitraria o convencional. Algunos ejemplos de diagramas matemáticos son: los diagramas de árbol, los grafos, las flechas, las tablas, la línea numérica, los gráficos cartesianos, las figuras geométricas, las expresiones algebraicas, los sistemas de ecuaciones, las series, los polinomios, los vectores y las matrices. A pesar de diferencias en el grado de iconicidad, todos estos son diagramas en la medida en que se trata de inscripciones materiales (sobre el papel, la pizarra, la pantalla) que captan relaciones espaciales relevantes a la situación/objeto de referencia. Lo importante es la estructura de los diagramas, las relaciones espaciales que establece entre las partes que lo componen (letras, números, filas y columnas, vértices, lados, nodos, índices, coeficientes) y las operaciones y transformaciones que pueden realizarse con/sobre estos (Dörfler 2001).

A modo de ilustración de los distintos grados de iconicidad que estos pueden exhibir los diagramas, consideremos el siguiente problema: *Una* araña *camina por las aristas de un cubo, partiendo de un* v*értice y llegando al opuesto, tratando siempre de hacer el camino más corto. ¿De cuántas maneras distintas puede lograrlo?* La figuras 1a , b , c, d y e) muestran cinco diagramas realizados por docentes en ejercicio durante un seminario auspiciado por el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM).

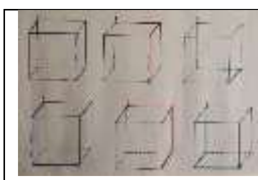
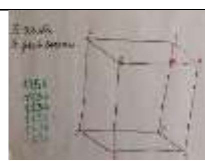
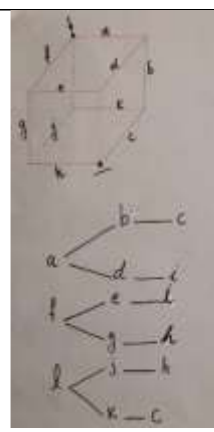
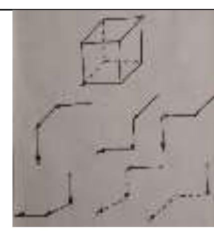
 Muestra los seis recorridos en diagramas separados coloreando las aristas.	 Numera las aristas y lista los seis recorridos.	 Usa letras para cada arista y luego un diagrama de árbol para obtener los seis recorridos (aquí hay error en la notación).	 Usa flechas para mostrar los recorridos (con dirección) y línea solida o punteada para distinguir lo que se ve de lo que no se ve.	 Usa dos grafos diferentes.

Fig. 1a,b,c,d,e: Diagramas de la situación “araña que camina por las aristas de un cubo”

Según plantea Hoffmann (2007), la función primordial de los diagramas, dada su naturaleza externa, es facilitar procesos de pensamiento individuales o colectivos en situaciones demasiado complejas para ser encaradas exclusivamente por medio de herramientas cognitivas o mentales. Razonar diagramáticamente consiste en: 1) construir un diagrama acorde con determinadas condiciones; 2) experimentar con el diagrama; 3) observar (y tomar nota de) los resultados de los experimentos, asegurándose que experimentos similares realizados sobre cualquier otro diagrama construido de acuerdo con esas mismas condiciones dan lugar a los mismos resultados; y 4) expresar esos resultados en términos generales (Hoffmann, ibid.).

En línea con las ideas de Freudenthal (1991) acerca de la actitud matemática, pensar con y razonar acerca de diagramas involucra una multiplicidad de hábitos mentales entre los que se destacan: reflexionar acerca de un fenómeno determinado sin estar sujeto a las limitaciones de nuestra memoria; analizar un problema profunda y sistemáticamente; clarificar el significado del problema en cuestión; jugar con distintas interpretaciones posibles de un problema; explicitar supuestos implícitos que puedan ser insuficientes o inadecuados; cambiar de perspectiva; identificar consecuencias indeseables o inesperadas; descubrir posibles contradicciones; y distinguir lo esencial de lo periférico (Hoffmann, ibid.).

Uno puede crear varios diagramas para una misma situación o interpretar situaciones diferentes utilizando el mismo diagrama o diagramas similares. Tal como los modelos de y para que describe la EMR, los diagramas, lejos de ser estáticos, evolucionan y admiten transformaciones (por ejemplo, composición de funciones, descomposición y transformación de figuras geométricas, resolución de sistemas de ecuaciones, etc.). Lejos de ser puramente mecánico o algorítmico, el razonamiento diagramático requiere de la imaginación, la invención y la creatividad. Por lo tanto, en el aula, de lo que se trata no es de enseñar a diagramar como si se tratara de un lenguaje de programación ni estudiar los procesos cognitivos del alumno al enfrentar diagramas sino de facilitar el inter-juego entre diagramas y razonamiento cuando los alumnos deben resolver problemas, encarar algo nuevo o resolver conflictos.

3. Problemas, diagramas y pensamiento diagramático: El problema de la escalera

La teoría acerca de los diagramas y del razonamiento diagramático presenta coincidencias con la EMR, de ahí su interés para el GPDM dado que nuestro propósito central es profundizar y aportar a la corriente realista. Las actividades dentro y fuera del GPDM involucran a docentes y, por medio de estos a sus alumnos, en matematizar situaciones problemáticas no rutinarias. Dentro de estas incluimos problemas que dan lugar a múltiples estrategias de resolución (Silver y otros, 2005); problemas abiertos (Cifarelli y Cai, 2005), tareas en espiral (Fried y Amit, 2005), problemas que llaman a generar ejemplos (Watson y Mason, 2005), problemas presentados por medio de imágenes visuales (Pérez y otros, 2006), problemas de *bajo umbral* y *techo alto* (McClure, 2011), rompecabezas (Zolkower y Pérez, 2009; Bressan y otros, 2014) y juegos (Brinnitzer y otros, 2015).

Dada la limitación en la extensión de este artículo, hemos seleccionado solo algunas de las múltiples producciones realizadas por docentes y alumnos en varias instancias de trabajo en San Carlos de Bariloche y Nueva York. Esta selección apunta a demostrar la riqueza del problema de la escalera y, en particular, su potencial para fomentar el uso de diagramas y, por medio de estos, procesos de matematización horizontal y vertical. Dado que los diagramas no hablan por sí mismos sino que requieren interpretación y, por lo tanto, uso del lenguaje verbal, en la sección 4.3

incluimos un extracto de registro tomado en una clase de secundaria donde docente y alumnos discuten tres diagramas para resolver el problema (i.e. listas ordenadas, diagrama de árbol y secuencia de Fibonacci). Acompañamos el registro con un breve análisis de la interacción en el que resaltamos las intervenciones de la docente y la función de los diagramas.

Consideremos dos enunciados distintos del problema: a) ¿De cuántas maneras diferentes se puede subir una escalera de 10 escalones, subiendo de 1 en 1, salteando 1 escalón, o combinando ambas posibilidades? b) ¿De cuántas formas distintas se puede subir una escalera de 10 escalones si desde cada posición (excepto la penúltima) pueden subirse uno o dos escalones? El enunciado a) presenta la situación de manera estática y desde el punto de vista de los escalones: se trata de elegir las distintas combinaciones y ordenamientos posibles de saltos de 1 y/o 2 hasta completar un total de 10 escalones. En b) la situación se presenta de manera dinámica y desde el punto de vista del que sube la escalera: se trata de decidir, paso por paso si subo al siguiente escalón o si lo salteo (excepto cuando llego al noveno escalón ya que ahí solo puedo subir uno más).

Este es un problema de conteo, de carácter no rutinario (a menos que ya se hayan resuelto problemas similares a éste) que posee umbral bajo (accesible incluso a niveles bajos de matematización) y techo alto (con potencial para alcanzar niveles más altos). Se trata de una situación realista en el sentido de imaginable o razonable ya que uno puede ponerse fácilmente en la situación planteada.

En lo que hace al uso de notación, esto puede hacerse de muchas maneras (Fig.2a, b, c).

11111	12345	12345
1112	1235	12305
1121	1245	12045
1211	1345	10345
2111	2345	02345
122	135	10305
212	235	02305
221	245	02045

Fig.2 a, b c: Tres formas distintas de notación para el caso de 5 escalones

Al pedir a los alumnos que comparen y contrasten distintas notaciones de una misma manera de subir la escalera (ej. 212, 235 y 02305) o que, más tarde, a la hora de resolver problemas similares, practiquen el uso de una u otra notación—según la conveniencia relativa a la situación en cuestión—fomenta en ellos la disposición al cambio de perspectiva, hábito mental de carácter fundamental para el quehacer matemático.

El proceso de resolución requiere tomar una decisión: ¿Qué hacer con las dos condiciones o restricciones dadas: 10 escalones; los saltos permitidos son de 1 y/o 2? La segunda condición hace a la esencia del problema (aunque esta podría modificarse: por ejemplo, subir de 1, 2, y/o 3 escalones) mientras que la primera no lo es, dado que podríamos ignorarla y considerar escaleras de 1, 2, 3, 4, 5, escalones, etc., lo cual permite simplificar el problema y descubrir su carácter recursivo (Fig.3): la cantidad de maneras de subir, por ejemplo, una escalera de 5 escalones se puede obtener sumando las maneras de subir una de 4 escalones y las de subir una de 3 escalones.

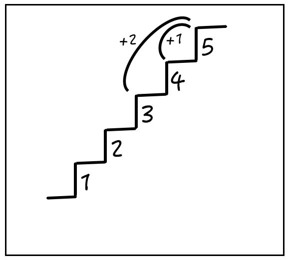


Fig.3: Diagrama que muestra el carácter recursivo de la situación

Una vez tomada la decisión en relación a las condiciones dadas, lo que sigue es ponerse en la situación, diagramarla y usar el diagrama como herramienta de resolución. Esta diagramación puede hacerse desde el punto de vista *dinámico* del que va subiendo la escalera (subo 1 o subo 2) o desde el punto de vista *estático* de los escalones en tanto casilleros a rellenar (vacío u ocupado). El primer enfoque conlleva a una solución de tipo recursiva, la cual puede diagramarse de manera icónica dibujando los escalones y usando flechas para indicar los saltos o de manera más esquemática o menos icónica utilizando un diagrama de árbol (Fig.4).

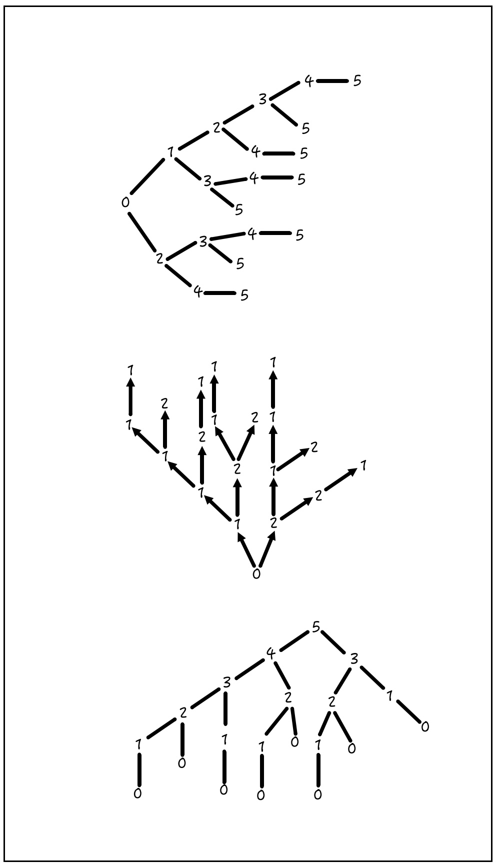


Fig. 4: Tres diagramas de árbol para el caso de 5 escalones

El segundo enfoque (b) conlleva a una solución de tipo combinatoria en la cual, en forma más o menos explícita o formalizada/simbolizada, se calculan todas las permutaciones con repetición, variando la cantidad de saltos de 1 y saltos de 2 a realizar y, para cada caso, contando todos los ordenamientos posibles) (modelo para) (Fig. 5).

1	2		
5	0	11111	1
3	1	2111 1211 1121 1112	4
1	2	221 212 122	3
			8

$$\frac{5!}{5!\,0!} = 1$$

$$\frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

$$\frac{3!}{1!\,2!} = 3$$

Fig.5: Combinaciones de 1s y/o 2s y permutaciones con repetición para la escalera de 5 escalones

Es posible un tercer enfoque (c), versión híbrida de a) y b), que consiste en ir haciendo listas ordenadas de 1s y/o 2s (Fig.6). Este diagrama explicita y, de ese modo, ayuda a comprender porqué la secuencia de Fibonacci resuelve el problema ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$).

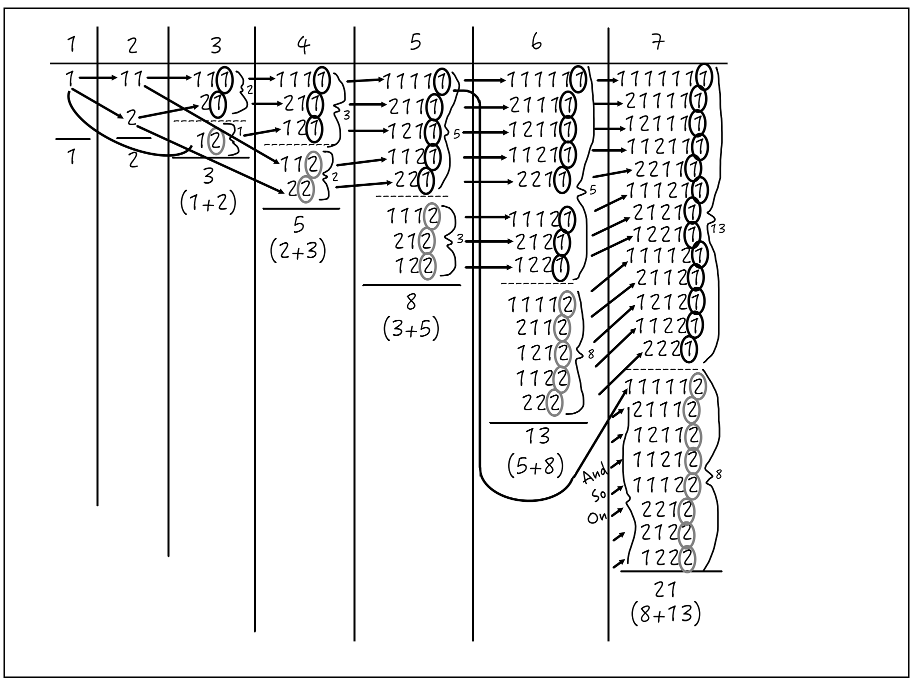


Fig.6: Listas para escaleras de 2 a 7 escalones que muestran la recursividad $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Aún más, haciendo otro cambio de perspectiva, podemos hacer otro ordenamiento de las listas el cual resulta en sumas parciales que hacen evidente que cada número de Fibonacci está formado por 1s, números consecutivos, números triangulares (o sumas de consecutivos: 1, 3, 6, 10, 15…), números tetraédricos (1, 4, 10, 20, 35…), etc. (Figs. 7a y 7b).

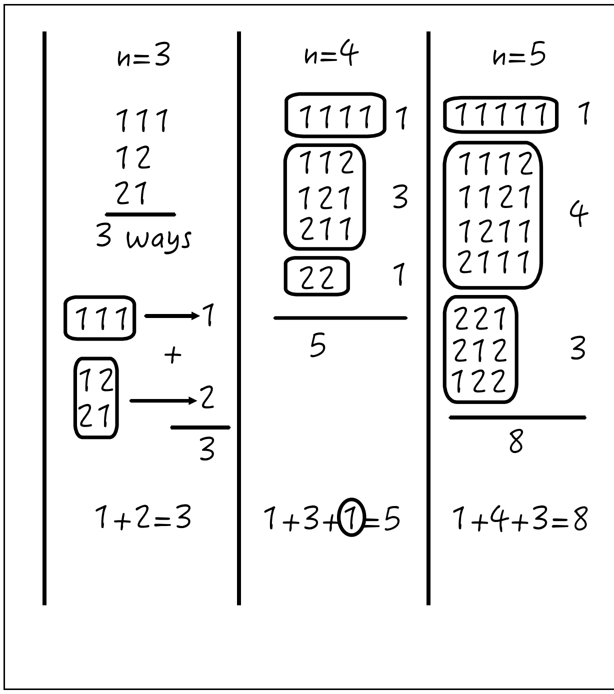


Fig.7a: Sumas parciales

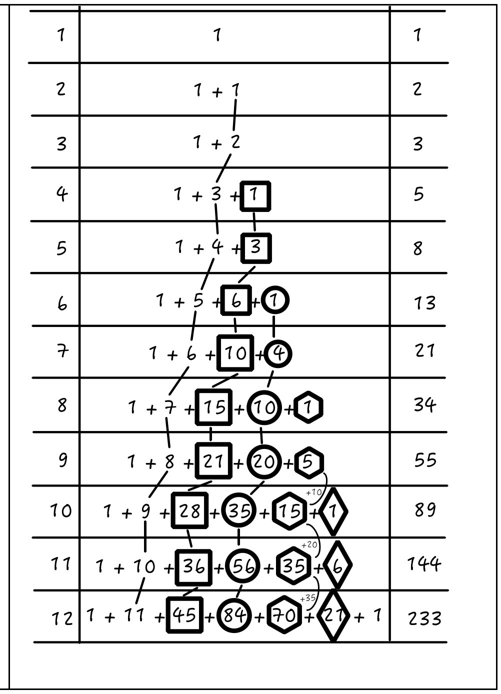


Fig. 7b: Tabla con sumas parciales

La tabla que aparece en la Fig.7b vincula los números de Fibonacci con el triángulo de Pascal (el cual aparece, de manera implícita, en la solución vía permutaciones con repetición). Vale enfatizar que para explorar/descubrir todas estas (y tal vez aún más) interrelaciones es necesario pensar los diagramas como artefactos matemáticos en sí mismos y no como modelos de representación de una situación problemática, herramientas para resolverla o dispositivos para comunicar a otros la solución del problema.

La Fig.8 muestra una tabla funcional, diagrama de mínima iconicidad que, haciendo uso de la regla recursiva, permite llegar a la solución final para la escalera de 10 escalones.

N	maneras distintas de subir
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89

Fig. 8: Tabla funcional

Por último, la Fig.9 presenta un diagrama que resume a todos los anteriores en tanto incluye combinaciones de saltos de 1 y/o 2 escalones, cantidad variable de casilleros a rellenar (10, 9, 8, 7, 6 o 5, según la cantidad de saltos de 2 a realizar, 0, 1, 2, 3, 4 o 5, respectivamente), lista de maneras de rellenar los casilleros (incompleta, faltan las permutaciones para cada combinación), uso de factoriales para calcular permutaciones (con repetición) y listas parciales que suma la cantidad total de maneras de subir.

# de uno	# de dos	lugares	#s para colocar		# de maneras
10	0	$\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_^{10}$	1111111111	$\frac{10!}{10!\,0!}=1$	1
8	1	$\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_^{9}$	2 1111 1111	$\frac{9!}{8!\,1!}=\frac{9\cdot\cancel{8!}}{\cancel{8!}}=9$	9
6	2	$\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_^{8}$	22 111 111	$\frac{8!}{6!\,2!}=\frac{{}^{4}\cancel{8}\cdot 7\cdot\cancel{6!}}{\cancel{6!}\cdot\cancel{2}}=28$	28
4	3	$\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_^{7}$	222 11 11	$\frac{7!}{4!\,3!}=\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}=35$	35
2	4	$\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_^{6}$	2222 11	$\frac{6!}{2!\,4!}=\frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{{}_{1}\cancel{2}\cdot\cancel{4!}}=15$	15
0	5	$\_\,\_\,\_\,\_\,\_^{5}$	22222	$\frac{5!}{0!\,5!}=1$	1

Fig.9: Tabla-resumen (diagrama de diagramas)

4. En el aula

A continuación presentamos un extracto de registro tomado en una clase de 9no grado de una escuela de Nueva York, donde docente y alumnos discuten el caso de una escalera de 5 escalones.

[…]

110	Docente (D)	Bueno. Si quisiéramos contar todas las maneras distintas de subir cinco escalones y estar seguros de que no nos falte ninguna, ¿cómo podríamos hacerlo, empezando por ésta? (*Escribe 11111*)
111	Stacey	Podés ponerlas en una lista de manera organizada. Tendrías uno, uno, uno dos (1112), después uno, uno, dos uno (1121) y así.
112	D	(*Escribe 1112 y 1121*) ¿Ven cómo vamos moviendo el dos de manera organizada?
113	Edgardo	Después movés el uno.
114	D	Después movemos el 1 organizadamente. (*Escribe 1211 y 2111*) ¿Algo más?
115	Edgardo	¡Todos dos!
116	D	(*Escribe 222*) ¿Qué pasa si ponemos todos dos? Si hacemos tres saltos de dos, ¿a qué escalón llegamos?
117	Alice	¡Esto es muy confuso!
118	Edgardo	Estarías en el sexto escalón.
119	D	Bien. Además de ser bien cuidadosos y de hacer las listas sistemáticamente, ¿cuál podría ser una tercera manera de hacer esto asegurándonos de que no nos falte nada? ¿Tony?

120	Tony	Un diagrama de árbol.
121	D	Bien. Acá lo tenemos (*señala el trabajo de Tony, el cual consiste en un diagrama de árbol incompleto para el caso de 5 escalones*). Está casi terminado. Lo que tenemos acá (*sigue señalando el diagrama de árbol*), ¿sería suficiente para que nos de la solución… para una escalera de cinco escalones?
122	Alice	No.
123	Tony	Casi.
124	D	Casi, porque tenemos que llegar hasta ¿dónde?
125	Alice	Hasta 5 en cada rama. Si llegamos a cinco, podemos multiplicar eso por dos, ¿no? ¡No, esperá!… no, no se puede hacer eso.
126	Jenny	Pero cuando terminamos el árbol, ¿cómo sabemos cuántas maneras hay?
127	D	Contás los caminos. Son uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) hasta llegar al quinto escalón. Seguís los caminos hasta llegar al final de cada uno. Son ocho puntos finales. ¿Alguien ve algún patrón acá: uno, dos, tres cinco, ocho, trece?
128	Devon	¡Fibonacci!
129	D	Si, Fibonacci. ¿Y después qué sigue?
130	Coro	¡Veintiuno!
131	Stacey	Sumás. Primero sumás uno, después dos, después tres. Después salteas el cuatro.
132	D	Vas sumando los dos anteriores, ¿no? Nada, o sea cero, más uno es uno. Uno más uno es dos. Dos más uno, tres y tres más dos, cinco.
133	Stacey	¡Oh! Habíamos sumado mal.
134	D	Bueno, pero la idea está correcta. La respuesta es… ¿Daniel?
135	Daniel	89.
136	D	Sí, seguimos Fibonacci hasta llegar al décimo término.

[…]

En este extracto, que consiste en menos de 10 minutos de interacción, los turnos (en total 27) están más o menos equitativamente distribuidos entre docente y alumnos (docente: 12, alumnos: 15). Durante esos pocos minutos, la conversación involucra activamente a 7 alumnos (sobre un total de los 28 presentes ese día). Las intervenciones de la docente (2 años en ejercicio) son casi todas preguntas, la mayoría abiertas (aunque no del tipo meta-cognitivo, por ejemplo, ¿Cómo lo pensaste?). La docente usa la primera persona del plural,[2] mayor frecuencia de verbos de hacer (por ejemplo: *hacer, subir, mover, seguir, llegar, terminar*, *contar, sumar*) que verbos de ser (*ser, estar*); hace uso frecuente uso del modo condicional (carácter tentativo, exploratorio y no definitivo, algorítmico, pre-determinado); combina el lenguaje oral y el escrito; usa pronombres demostrativos y gestos de señalar (vinculando así lo verbal con lo escrito y lo diagramado). La docente no encara directamente los errores, omisiones, o vaguedades. Por ejemplo, la lista para el caso de 5 escalones no se completa aunque la docente, mediante una pregunta [116], hace lugar

[2] Cf. En Zolkower y otros (2016) se analiza como una docente usa de la primera persona del plural y el singular en una situación de interacción de toda la clase.

para corregir la sugerencia de un alumno de hacer tres saltos de 2. Edgardo se corrige a sí mismo (turnos 115 y 118) facilitado por la pregunta de la docente. Nótese también otras dos instancias de auto-corrección: Alice [125] y Stacey [133].

Según nuestra interpretación, el que la docente haya decidido en el momento no terminar la lista organizada hasta obtener los 8 arreglos posibles tiene su lógica dado que eso eventualmente se logra usando el diagrama de árbol. Esto le da dinamismo a la conversación en tanto evita la redundancia de responder la pregunta ¿Cuántas maneras diferentes hay de subir 5 escalones? más de una vez. A la luz del modo en que la docente conduce la interacción, deducimos que, a su juicio, no tiene sentido trabajar los diagramas algorítmicamente sino que lo importante es aprovechar la variedad de las producciones de sus alumnos e involucrarlos activamente en el análisis de las mismas. En otras palabras, el foco de esta breve conversación no es tanto el resultado final como el modo de trabajar ("ser bien cuidadosos" y "hacer las listas sistemáticamente") y el uso de diagramas (listas, árbol, secuencia de Fibonacci). Este fragmento de conversación de toda la clase muestra como, bajo la batuta de un buen docente, analizar e interpretar diagramas y reflexionar acerca de distintos modos de diagramar puede contribuir a desarrollar el pensamiento matemático (diagramático) de los alumnos.[3]

6. Cierre

La resolución de problemas realistas da pie a al uso de diagramas/modelos y a razonar diagramáticamente poniendo en juego las tres funciones que los caracterizan: representar, esquematizar o estructurar una situación problemática y resolverla, comunicar la solución y comparar y contrastar diversas estrategias de resolución, y pensar acerca del significado de la situación problemática y su relación con los distintos modos de esquematizarla o estructurarla y las diversas estrategias de resolución. Para lograr un razonamiento diagramático eficiente y exitoso es necesaria una práctica intensiva y extensiva manipulando diagramas, considerando, además, el uso del lenguaje natural complementado con el vocabulario específico, para mejorar la comprensión de los mismos.

Cerramos con la siguiente reflexión de Dörfler (2007, traducción libre de las autoras):

> Quisiera concluir planteando la posibilidad de cultivar el interés en los sistemas de signos y los diagramas independientemente de sus potenciales interpretaciones. En lo que hace al aprendizaje escolar, esto podría consistir en explorar propiedades y relaciones de las estructuras simbólico-diagramáticas en sí mismas. En muchos casos esto consiste en reconocer patrones recurrentes y regularidades (ej. los números figurados) o investigar preguntas del tipo '¿Qué pasaría si..?' […] De esa forma, la matemática aparece no como una actividad mental e individual con objetos abstractos sino como una práctica compartida y social que consiste en el uso de signos. […] Por supuesto que, para que esto ocurra, es necesario que los docentes compartan esta visión (págs. 107-8).

Referencias

[3] Cf. Shreyar, Zolkower & Pérez, 2010 y Zolkower, Shreyar & Pérez, 2016: Análisis, con herramientas de la gramática sistemico-funcional, de situaciones de interacción de toda la clase con foco en las intervenciones de la docente.

Bressan, A, Zolkower, B., & Gallego, Ma. F. (2005). Los principios de la educación matemática realista. In *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. (pp. 69-98). Editado por H. Alagia, H., Bressan, A., & Sadovsky, P. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bressan, A., Rabino, A. & Zolkower, B. (2014). El rompecabezas hexagonal: ¿Dónde está la matemática? *Didáctica*, 28-35.

Brinnitzer, E., Collado, M., Fernández Panizza, G., Gallego, Ma., F., Pérez, S., & Santamaría, F. (2015). *El juego en la enseñanza de la matemática*. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Cifarelli, V. & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem solving situations. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3), 302–324.

Dörfler, W. (2001). Instances of diagrammatic reasoning. Paper presented to the discussion group on semiotics and mathematics education. 25th PME Conference, Utrecht University, The Netherlands.

Dörfler, W. (2003). Observation and design in mathematics proofs. *La lettre de la preuve*. Printemps. www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/03Printemps/DorflerThemeUK.pdf

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic Thinking. Affordances and Constraints. In M. Hoffmann, J. Lenhard & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign: grounding mathematics education* (pp. 57-66). New York: Springer.

Dörfler, W. (2007). Making mathematics more mundane. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 105-108. Seoul: PME. http://www.emis.de/proceedings/PME31/1/103.pdf

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Capítulo Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fried, M. & Amit, M. (2005). A spiral task as a model for in-service teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education 8(5)*, 419-436.

Hoffmann M. H. G. (2007). Cognitive conditions of diagrammatic reasoning: A semiotic approach**.** *Special Issue on Peircean Diagrammatical Logic.Eds* Joao Queiroz and Frederik Stjernfelt. *Semiotica... https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/23809/wp24.pdf*

Mclure, L. (2011). Using low threshold high ceiling tasks in ordinary classrooms. http://nrich.maths.org/7701

Peirce, C. S. (1931-1958). Collected Papers, Vol. I-VIII. Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Pérez, S., Bressan, A., & Zolkower, B. (2006). Las imágenes y las preguntas en la escuela. *Novedades Educativas,* 182, 22-26.

Rubel, L. & Zolkower, B. Arranging blocks, climbing stairs and beyond: Learning about the significance of mathematical representations. *Mathematics Teacher* 101(5), 340-4.

Shreyar, S., Zolkower, B., & Pérez, S. (2010). Thinking aloud together: A 6th grade teacher's mediation of a whole-class conversation about percents. *Educational Studies in Mathematics,* 73, 21-53.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129–135.

Silver, E. et al. (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 287–301.

Streefland, L. (Ed.) (1991). *Realistic mathematics education in primary school*. Utrecht, The Netherlands: CD-B Press/Freudenthal Institute.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary school. In Streefland, L. (Ed.) *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 21-56).

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentrallblatt for Didaktik der Mathematik, 37*(4), 287-307.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Zolkower, B. & Bressan, A. (2012). Educación matemática realista. In *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Editado por M. Pochulu & M. Rodríguez. Buenos Aires: Editorial Universitaria Villa María y Universidad de General Sarmiento.

Zolkower, B. & Shreyar, S. (2007). A teacher's mediation of a thinking aloud discussion in a 6th grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics,* 65, 177-202.

Zolkower, B. Shreyar, S., & Pérez, S. (2016). Whole-group interaction as teacher-guided thinking aloud together: Functional grammar of a mathematical conversation in a 6th grade classroom. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education* 47(7): 1323-1336.