DE UNA FUNCIÓN A LOS NÚMEROS TRIANGULARES

Oscar Bressan

Problema: Una función es definida como

$$f(1) = 1000 \quad \text{y}$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = n^2 f(n)$$

para todo valor de n. Calcular el valor exacto de f(1000).

Solución:

Entonces

$$f(1) = 1000/1$$

$f(1) + f(2) = 2^2 f(2)$ despejando $f(2)$ → $f(2) = 1000/3$

$f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 f(3)$ → $f(3) = 1000/6$

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4^2 f(4)$ → $f(4) = 1000/10$

$f(1) + f(2) + \ldots + f(5) = 5^2 f(5)$ → $f(5) = 1000/15$

$f(1) + f(2) + \ldots + f(6) = 6^2 f(6)$ → $f(6) = 1000/21$

Esto nos da una pista, y todo apunta a que los denominadores de 1000 **son los sucesivos números triangulares.** Efectivamente, esto se puede demostrar fácilmente por inducción completa. Los números triangulares satisfacen:

1º 1

2º 1 + 2

3º 1 + 2 + 3

4º 1 + 2 + 3 + 4

…..

1000º 1 + 2 + 3 + … + 999 + 1000

y en consecuencia f(1000) = 1000 dividido el milésimo número triangular.

El milésimo número triangular es una serie aritmética de 1000 términos y de razón 1 cuya suma es:

$$(1 + 1000)*1000/2 = 500.500$$

Finalmente la solución resulta ser:

$$\mathbf{f(1000) = 1000/500.500 = 2/1.001}$$