RAÍCES CUADRADAS… CON REGLA Y COMPÁS. ¿Y LAS CÚBICAS?

Oscar Bressan

Para la geometría clásica griega una construcción geométrica debía realizarse utilizando sólo regla y compás, con la condición restrictiva que debía ejecutarse con un número finito de pasos y la regla no tuviera marcas.

En particular no se encontró solución al problema de la cuadratura del círculo (dibujar un cuadrado que tenga la misma superficie que un círculo), a la duplicación del cubo (dibujar el lado de un cubo cuyo volumen duplique al de un cubo dado) y a la trisección de un ángulo (dividir un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales).

La cuadratura del círculo implica trabajar con π. Carl Louis Ferdinand von Lindemann (alemán, 1852-1939) probó en 1882 que π es un número irracional trascendente y no puede construirse con regla y compás. La duplicación del cubo y la trisección de un ángulo implican trabajar con raíces cúbicas, y tampoco pueden hacerse con regla y compás, como lo demostró Pierre Wantzel (francés, 1814-1848) en 1837.

Las únicas operaciones que pueden hacerse con regla y compás son sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces cuadradas

Las raíces cuadradas de un segmento se pueden graficar (todos los triángulos son rectángulos).

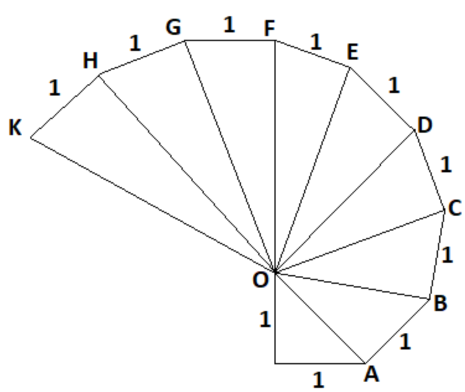

Figura 1

En la figura 1 vemos que el segmento OA = $\sqrt{2}$, OB = $\sqrt{3}$, OC = $\sqrt{4}$ = 2, OD = $\sqrt{5}$, OE = $\sqrt{6}$, OF = $\sqrt{7}$, etc.

¿Cómo obtendría un segmento de longitud $\sqrt{45}$ sin tener que pasar por las raíces de todos los números de 1 a 44? (Al final veremos la respuesta como solución número 1).

No pueden obtenerse raíces cúbicas con regla y compás, pero Isaac Newton (inglés, 1643-1727) encontró un procedimiento notable para encontrar una raíz cúbica. Aquí tenemos un triángulo ABC equilátero cuyos lados miden una unidad y construcciones complementarias. Los únicos datos son algunos segmentos que también miden una unidad (ver figura 2). El problema es determinar la longitud del segmento CF teniendo tan pocos datos:

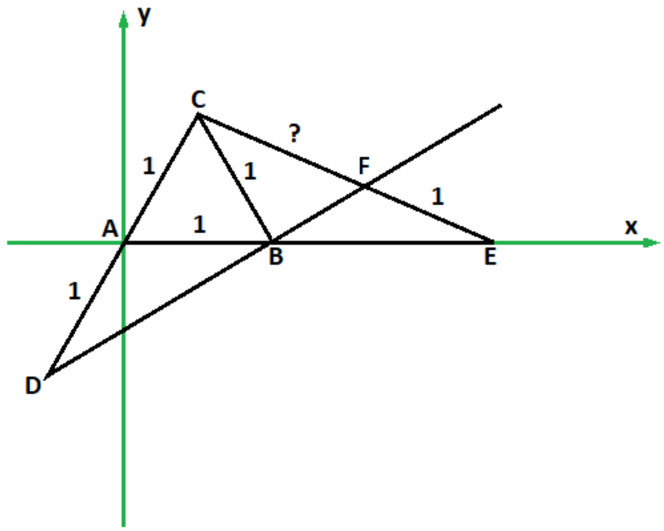

Figura 2

Este gráfico no puede lograrse **sin hacer marcas en la regla** y por tanto escapa a las aspiraciones clásicas de los griegos. Es para pensar un buen rato y reconocer que Newton era un genio, aunque según cuentan tenía un carácter conflictivo. Al final daremos la respuesta (solución número 2). (Si bien este método no es generalizable para otras raíces cúbicas).

SOLUCIÓN NÚMERO 1

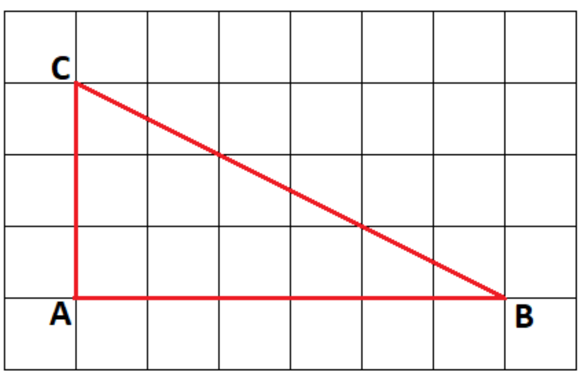

Figura 3

Dibujamos un triángulo rectángulo donde un cateto mide 3 unidades (AC) y el otro cateto mide 6 unidades (AB). Entonces por Pitágoras la hipotenusa BC = $\sqrt{}$45.

SOLUCIÓN NÚMERO 2

Tomamos el punto A como origen de coordenadas.

El punto B tiene como coordenadas (1; 0).

El punto C tiene como coordenadas (0,5; $\sqrt{}$3)/2).

El punto D tiene como coordenadas (-0,5; -$\sqrt{}$3)/2).

El punto E tiene como coordenadas (xe; 0), donde xe es la coordenada x del punto E.

EF = 1 y es la distancia del punto E a la intersección de la recta que pasa por DB con la recta que pasa por CE.

Las coordenadas del punto F las llamaremos (xf; yf).

De geometría analítica sabemos que la ecuación de una recta que pase por los puntos P1(x1; y1) y P2(x2, y2) es

$$(y - y1) = (y1 - y2)\ (x - x1)/(x1 - x2)$$

En consecuencia la ecuación de la recta que pasa por los puntos D y B de la figura 2 es:

$$(y + \sqrt{3})/2) = (-\sqrt{3})/2)\ (x + 1/2)/(-1/2 - 1)$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos C y E es:

$$(y - \sqrt{3})/2) = (\sqrt{3})/2)(x - 1/2)/(1/2 - xe)$$

Estas dos rectas tienen a F como punto común, de modo que debe satisfacerse simultáneamente:

$$(yf + \sqrt{3})/2) = -(\sqrt{3})/2)\ (xf + 1/2)/(-1/2 - 1)$$

$$(yf - \sqrt{3})/2) = (\sqrt{3})/2)(xf - 1/2)/(1/2 - xe)$$

Además y como dato del problema la distancia entre E y F es igual a 1:

$$((xf - xe)^2 + (yf)^2)^{½} = 1$$

Estas últimas ecuaciones forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: xe, xf, yf. El sistema no es lineal y ello implica una difícil resolución. Hay cuatro resultados posibles, y el que nos interesa es:

$$yf = \frac{1}{2}\sqrt{-1 + 2^{2/3}}$$

$$xf = \frac{1}{2}(3 - 2^{1/3} + 2^{2/3})$$

$$xe = 1 + 2^{2/3}$$

Ahora ya conocemos las coordenadas del punto F y podemos calcular la distancia entre C y F que es la longitud del segmento CF:

longitud CF = $(0,5 - xf)^2 + (\sqrt{3}/2 - yf)^2)^{½} = 2^{1/3}$

de modo que el resultado resulta ser la raíz cúbica del número 2 = 1,25992…

Es sorprendente que Newton haya desarrollado el esquema de la figura 2 para encontrar este resultado hace más de 300 años, cuando todos los cálculos debían hacerse a mano.