TEOREMA DE VAN AUBEL

Una propiedad casi mágica de los cuadriláteros

Oscar Bressan y Adriana Rabino

El teorema de van Aubel es llamativo, precioso y casi mágico:
Sea un cuadrilátero cualquiera y dibujamos un cuadrado sobre cada uno de sus cuatro lados. Luego trazamos los dos segmentos que unen los centros de los cuadrados situados en los lados opuestos. El teorema de van Aubel demuestra que estos dos segmentos tienen la misma longitud y, además, son perpendiculares **(ver figura 1).**

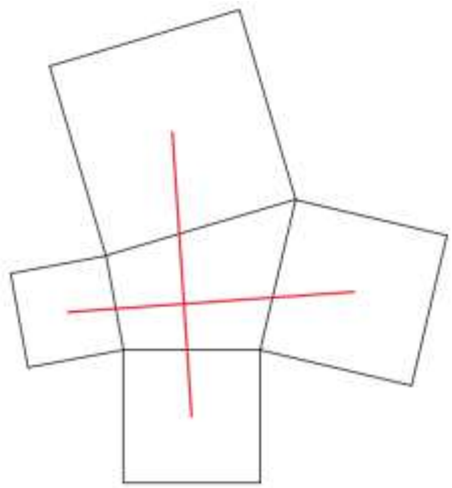


Figura 1

Esta propiedad es obvia si el cuadrilátero original es un cuadrado (ver figura 2) y se puede demostrar en forma sencilla si fuera un rectángulo (ver figura 3), pero resulta menos obvia si es un paralelogramo (ver figura 4). En estos casos particulares los segmentos se cortan por el medio formando una cruz de cuatro brazos iguales, lo que no ocurre en el caso general como ya se observa en la figura 1, pero siempre los segmentos tienen igual longitud y siempre son perpendiculares.

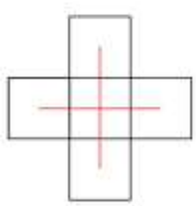


Figura 2

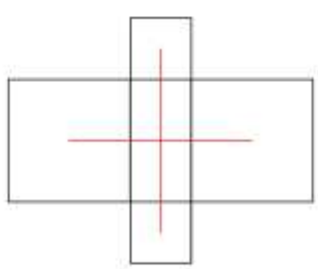


Figura 3

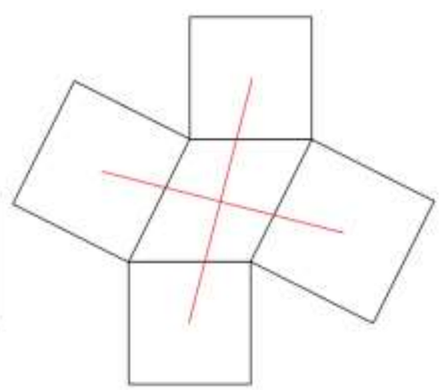


Figura 4

Si uno de los lados del cuadrilátero disminuye progresivamente hasta tender a un punto en el vértice A, ¿el teorema sigue valiendo? La respuesta es positiva (ver figura 5). Todo sigue funcionando.

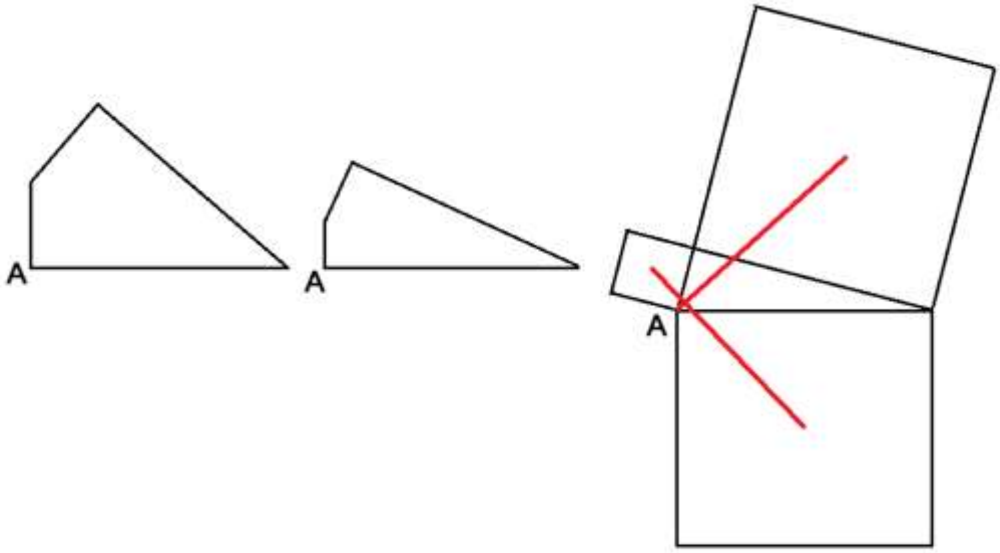


Figura 5

Propuesta: Con un software de geometría dinámica, dibujar el cuadrilátero, dibujar los cuadrados adyacentes, mover un vértice hasta que coincida con uno de los vértices consecutivos (de esta manera desaparece un lado y uno de los cuadrados) y verificar la propiedad.

¿Si el cuadrilátero "colapsa" hasta convertirse en un segmento el teorema sigue siendo válido? La respuesta es positiva (ver figura 6). Todo sigue funcionando.

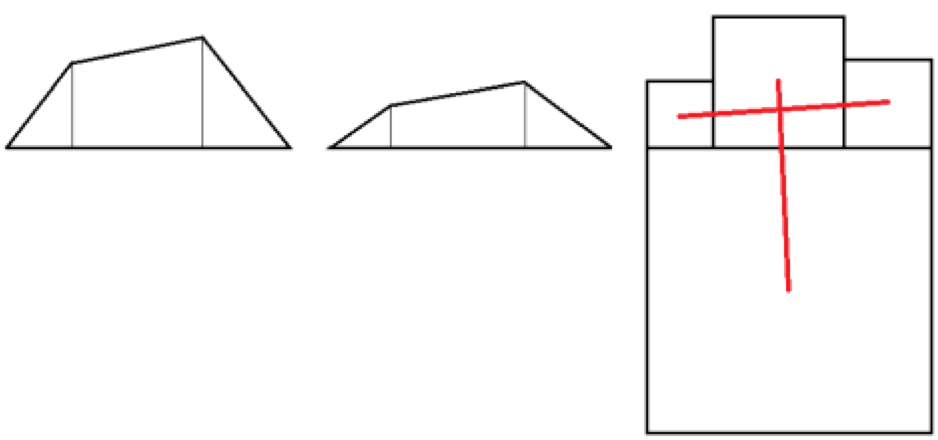


Figura 6

¿Si el cuadrilátero es cóncavo en vez de convexo el teorema sigue valiendo? La respuesta es afirmativa (ver figura 7). Todo sigue funcionando.

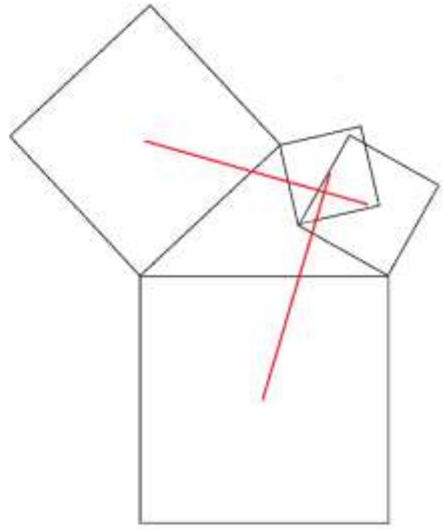
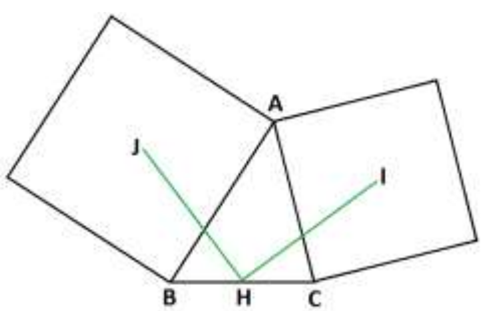


Figura 7

Este **teorema**, por tener esta categoría, es una propiedad que se puede demostrar. Para demostrar cualquier propiedad en matemáticas, se hace uso de “herramientas matemáticas” que pueden ser: definiciones, axiomas o postulados u otros teoremas ya demostrados.

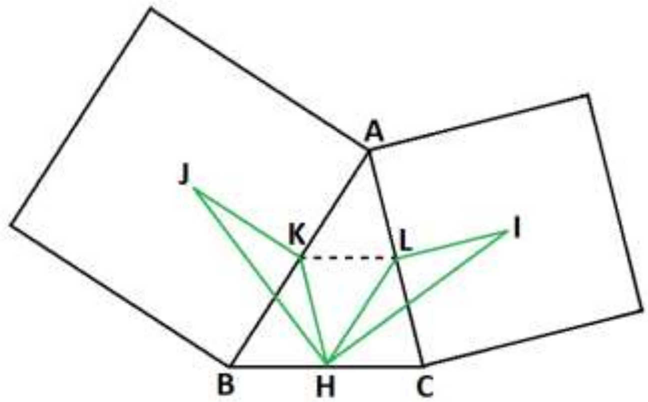
Por ejemplo, para realizar la **demostración** del Teorema de van Aubel, se utiliza esencialmente otro teorema que dice así:

Partiendo de un triángulo cualquiera de vértices ABC, tomamos dos de sus lados, AB y AC por ejemplo, y dibujamos cuadrados apoyados en ellos. Llamamos I y J a los centros de los dos cuadrados y H al punto medio del lado del triángulo donde no hemos apoyado ningún cuadrado (el BC en este caso). Los segmentos HI y HJ tienen la misma longitud y además son perpendiculares. La situación puede verse en esta figura:



(Verificar esta propiedad en un software de geometría moviendo uno de los vértices del triángulo para ver que se sigue cumpliendo).

Sea *K* el punto medio del lado *AB* y *L* el punto medio del lado *AC*. Dibujar los triángulos *HKJ* y *HLI* y el segmento *KL* (en línea punteada), como se ve en la figura:



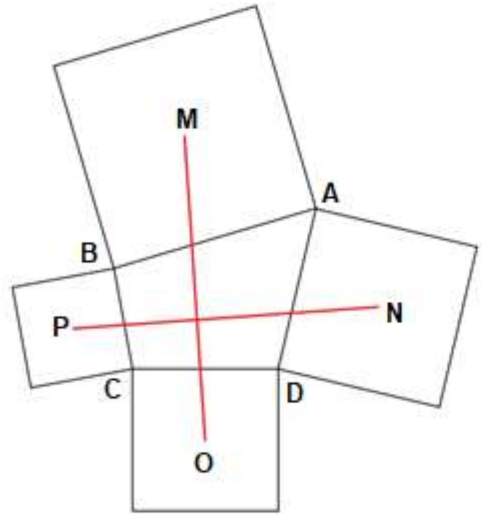
Como el segmento *LH* es base media del triángulo ABC, es paralelo al lado *AB*. Lo mismo ocurre con el segmento *KL* que, al ser base media del triángulo ABC, es paralelo al lado *BC*. Esto nos dice que *BHLK* es un paralelogramo, por lo que los segmentos *KB* y *LH* son congruentes. También son congruentes *KB* y *JK*, por lo que obtenemos que *JK=LH*. El mismo razonamiento nos sirve para llegar a que *ALHK* es un paralelogramo, por lo que, en particular, los segmentos *AL* y *KH* son congruentes. Pero *AL* y *LI* también lo son, por lo que se obtiene que *KH=LI*.

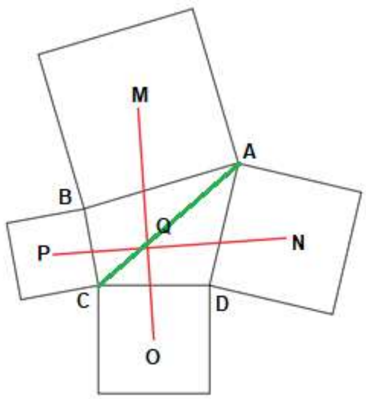
Por otro lado, los triángulos *KBH* y *LHC* tienen sus lados congruentes y paralelos, por lo que el ángulo *BKH* y el ángulo *HLC* son también congruentes.

Entonces se tiene que los triángulo *JKH* y el *HLI*, tienen dos lados congruentes (*KJ=LH* y *KH=LI*) y además también tienen igual el ángulo formado por esos lados (el ángulo *JKH* es *90+ BKH*, y el *HLI* es *90+ HLC*, que hemos visto antes que es igual a *BKH*). Con esto se puede concluir que los triángulos JKH e ILH son congruentes, y el hecho de que lo sean nos asegura que **los segmentos *HI* y *HJ* tienen la misma longitud**.

Falta demostrar que estos dos segmentos son perpendiculares. Pero esto es sencillo: *JK* forma un ángulo de *90* con *AK*, que es paralelo a *LH*. Por tanto *JK* y *LH* son perpendiculares. Del mismo modo, *LI* forma un ángulo de *90* con *AL*, que es paralelo a *KH*. Por tanto *LI* y *KH* también son perpendiculares. Como los triángulos son congruentes (por ende sus ángulos correspondientes también lo son), todo esto nos asegura que los lados correspondientes son perpendiculares. Por lo tanto, **los segmentos *HI* y *HJ* lo son**.

Entonces, como dijimos anteriormente, vamos a utilizar este teorema para demostrar **el de van Aubel,** en donde la situación original es la que se ve en la figura y lo que se quiere demostrar es que los segmentos ***MO y NP son congruentes y perpendiculares.***



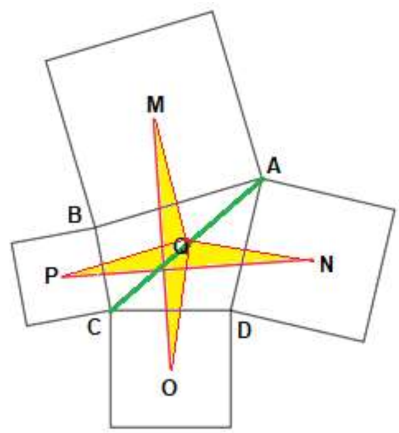


Dibujar una de las diagonales del cuadrilátero inicial, *AC* en este caso, y marcar su punto medio, *Q*. Considerando los triángulos CBA y ADC, a cada lado de esa diagonal, podemos aplicar lo demostrado en el teorema anterior:

Los triángulos MQO y PQN son congruentes porque cumplen con el criterio de congruencia L.A.L. (lado-ángulo-lado), por lo tanto MO = PN.

Como MQ es perpendicular a QP y QN es perpendicular a QO (lados correspondientes entre triángulos congruentes), luego MO es perpendicular a PN.

De esta manera queda demostrado el teorema de van Aubel.



Este resultado fue publicado por Van Aubel en 1878 en *H. H. Van Aubel, Note concernant les centres des carrés construits sur les côtés d'un polygon quelconque, Nouv. Corresp. Math. ,4(1878), 40-44*.

Extensión:

1) Como un ejercicio sencillo se presenta en la figura 8 un cuadrilátero y los cuadrados adosados a los cuatro lados sobre una cuadrícula. Verificar que los dos

segmentos rojos tienen igual longitud y que son perpendiculares (recordar la condición que deben cumplir las pendientes de dos rectas para que sean perpendiculares).

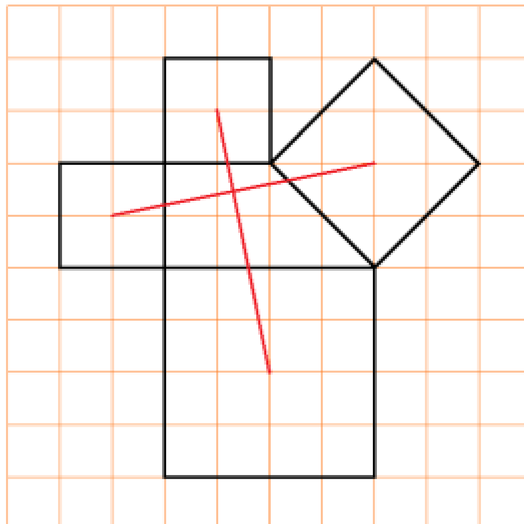


Figura 8

2) ¿Si en vez de un cuadrilátero o un triángulo se tiene otro polígono, obviamente con un número par de lados, se sigue cumpliendo la propiedad? (Puedes utilizar un software de geometría para verificarlo).

3) Realmente este teorema más parece magia que matemáticas, y en cierto sentido "esta magia" se acerca al teorema de Napoleón (si sobre los lados de un triángulo totalmente arbitrario y en el exterior de este, se construyen triángulos equiláteros, entonces los centros de estos triángulos son también vértices de un triángulo equilátero). ¿Te animás a demostrarlo?

Quien quiera averiguar un poco más sobre el teorema de van Aubel, vale la pena que consulte en Internet a: *https://www.gaussianos.com/el-teorema-de-van-aubel-un-sorprendente-resultado-geometrico/*