

BUSCANDO FRACCIONES ENTRE DOS DADAS

Oscar Bressan y Ana Bressan

Dadas dos fracciones tal que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, siempre se puede obtener una fracción **entre ellas** sumando entre sí los numeradores y los denominadores de las fracciones dadas para obtener respectivamente el numerador y el denominador de la fracción buscada.

Hipótesis: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

Tesis: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Demostración:

Si buscamos un denominador común podemos escribir la tesis como:

$$\frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd}$$

y consecuentemente "bc" es mayor que "ad". Luego generamos una fracción sumando los numeradores que dividimos por la suma de los denominadores:

$$\frac{ad+bc}{2bd}$$

Entonces multiplicando por 2 numerador y denominador, lo que es igual a 1, tenemos que:

$$\frac{2ad}{2bd} < \frac{ad+bc}{2bd}$$

ya que $bc > ad$

Análogamente tenemos que:

$$\frac{ad+bc}{2bd} < \frac{2bc}{2bd}$$

Por lo tanto:

$$\frac{2ad}{2bd} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{2bc}{2bd}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Extensión: En general no hay muchos problemas interesantes con fracciones. Presentamos aquí un problema con este tema que puede resultar entretenido.

Tenemos las siguientes desigualdades entre tres fracciones:

$$45/61 > r/s > 59/80$$

a) Sin condicionamientos, encuentre un valor para "r" y para "s" tal que se satisfaga esa relación.

b) Busque otro par de valores condicionado a que $1 < s < 200$.

a) Buscamos el mcm (61,80) para llevar las dos fracciones a un mismo denominador y poder comparar.

Como 61 es primo y 80 no es múltiplo de 61, el mcm (61,80) = 61 . 80 = 4880

Transformamos las dos fracciones en otras equivalentes con denominador 4880:
 $3600/4880 > r/s > 3599/4880$

Así expresadas con este denominador, no podemos encontrar ninguna fracción porque entre 3600 y 3599 no hay ningún número entero. Pero si seguimos buscando denominadores comunes (múltiplos del que está), se pueden encontrar otros valores. Si nos imaginamos las dos fracciones en la recta numérica, hacemos subdivisiones cada vez más pequeñas entre los dos números. Este proceso se puede seguir hasta infinito. Por ejemplo:

$$4880 \cdot 2 = 9760$$

$$7200/9760 > r/s > 7198/9760$$

O sea que si elegimos $s = 9760 \Rightarrow r$ puede valer **7199**

Si seguimos buscando múltiplos de los denominadores comunes, las posibilidades para hallar el valor de r se amplían.

b) Usando la propiedad demostrada anteriormente sabemos que si hay una relación de orden entre dos fracciones si sumamos los dos numeradores en nuestro caso

$$45/61 > r/s > 59/80$$

nos da 104 como r, y los dos denominadores nos da 141 como s.

Esta fracción, 104/141 cumple con la condición: $45/61 > 104/141 > 59/80$ (se puede verificar aplicando la propiedad del producto de los extremos por el producto de los medios).