ACERCA DE COLLARES Y PATRONES.
UNA SECUENCIA PARA TRABAJAR EN LA ESCUELA PRIMARIA

Fernanda Gallego, Ana Bressan, Silvia Pérez

¿Por qué collares?

Los collares son objetos culturales y desde los primeros tiempos de la historia del ser humano han estado presentes en la vida cotidiana. En la caverna de Blombos (Sudáfrica) se encontraron restos de hace unos 75.000 años correspondientes a caracoles perforados y teñidos usados para hacer collares. Este hallazgo supone adelantar unos 35.000 años la Edad de los adornos y ubica al collar como la joya más antigua.

A partir de esta evidencia, el Dr. Juan Nápoles Valdés[1] destaca la capacidad del ser humano de pensar matemáticamente, en tanto estos collares implican que alguien los diseñó, creó e imaginó antes de hacerlos.


EL PAIS

Joyas con 75.000 años

Unas cuentas halladas en Suráfrica son el adorno humano más antiguo

Hoy siguen estando vigentes en nuestra cultura. De hecho, y según nuestra experiencia, cuando a los chicos se les presentan collares de los que comúnmente se usan en la vida diaria, expresan...

-*"Se usan para estar más elegantes"*
-*"Son para ponerlos"*
-*"Son para estar más lindas, para ser más coquetonas"*
-*... "para jugar"*
-*"Los usan las señoras, ¡esos son de vieja!" (refiriéndose a un collar de perlas)"*
-*"Ese es de Boca porque es azul y amarillo"*
-*"Es de madera y con semillitas"*
-*"Cortaron vidrios y los pusieron"*

Es decir, ven a los collares como objetos reales, les atribuyen características materiales específicas y destacan sus múltiples usos en la vida cotidiana.

En cambio, los docentes tienden a verlos como objetos ya didactizados, o sea, desde el punto de vista de sus posibles usos en situaciones de enseñanza/aprendizaje de la matemática:

[1] Charla TED, "La matemática en la historia del hombre", en https://www.youtube.com/watch?v=7KGP86Dx1Eo
Para más información: http://www.elmundo.es/elmundo/2004/04/15/ciencia/1082052542.html

-*"Sirve para contar."*
-*"Se puede usar para clasificar (por forma, color y tamaño)."*
-*"Para medir."*
-*"Sirve para observar simetrías."*
-*"Estudiar formas geométricas."*
-*"Trabajar escalas."*
-*"Hacer agrupamientos."*

Esto sucede porque los collares han sido incorporados como recursos didácticos a la enseñanza de la matemática. Ya desde la pedagogía Montessori aparecen armados intencionalmente para facilitar el aprendizaje y la comprensión de los números a través de experiencias sensoriales con ellos.

Desde la corriente realista de educación matemática (EMR) los collares en el aula demuestran su potencial didáctico desde dos vertientes:

- **COMO MODELO EN SÍ MISMO PARA TRABAJAR REGULARIDADES Y PATRONES**[2]. El collar con cuentas o bolitas de diferentes colores y disposición, ofrece grandes posibilidades para investigar regularidades, expresarlas y codificarlas. De allí que el uso de collares permite trabajar el contenido matemático patrones e iniciar un camino desde el álgebra informal al álgebra formal.

[2] Un **patrón** es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo una regla, ley u algoritmo, ya sea de repetición o de recurrencia. Los patrones de **repetición** son aquellos que poseen un núcleo que se repite en forma periódica. Por ejemplo: los algoritmos convencionales de cálculo, la construcción geométrica de polígonos, el diseño de frisos y guardas, la sucesión numérica escrita. Los patrones de **recurrencia** son aquellos en los que el núcleo cambia con regularidad de modo tal que un término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores, de cuyo análisis se infiere su ley de formación. El sistema de numeración decimal representa un patrón de recurrencia dado que cada diez unidades de un nivel determinan una unidad del orden superior siguiente; también las escalas y las sucesiones de números cubos y cuadrados perfectos. De Bressan, A. & Bogisic, B. (1996*), Las regularidades: fuente de aprendizaje matemático*, disponible en: http://www.gpdmatematica.ar/

Se trata precisamente de hacer uso de collares concretos (físicos), dibujados, imaginados, simbolizados para generar conversaciones y producciones relacionadas con patrones: repetición, simetría, recurrencia, paridad, uso de expresiones simbólicas para representarlos y el razonamiento inductivo en torno a la estructura de collares semivisibles o “interminables” en situaciones en las que estudiantes y docentes se aboquen a actividades en torno a este objeto dando lugar a aprendizajes matemáticos ricos y duraderos. Las actividades propuestas, de complejidad creciente, son lo suficientemente accesibles, razonables y abiertas como para invitar a los estudiantes a poner en juego su sentido común, conocimientos y experiencias previas para desarrollar modelos y herramientas en el campo de la lógica, la aritmética y el álgebra. Para que esto suceda, cabe a los docentes facilitar actividades, no sólo a nivel perceptual e intuitivo, que favorezcan la distinción de lo que es propio de cada situación y lo que es común a todas; y el desarrollo de conjeturas, generalizaciones y demostraciones, al describir oralmente la regularidad percibida y expresarla simbólicamente con palabras o símbolos.

- COMO MODELO DE LA SUCESIÓN NUMÉRICA. Cuando este contexto se presenta organizado intencionalmente con un patrón alternado de dos colores en agrupaciones de 10 (o de 5) cuentas o bolitas, posibilita trabajar los números hasta 100 y el cálculo en ese intervalo. Así, el collar se convierte en un modelo concreto y manipulativo de la sucesión de los números naturales a 100 (20 o 50, si se decide trabajar cada uno de estos intervalos) para actividades relacionadas con la cardinalización, la ubicación, el ordenamiento y el cálculo, facilitando la evolución de los estudiantes en estos contenidos desde un nivel concreto al que requiere el cálculo formal. Esta secuencia de trabajo se aborda en otro artículo.

COMO MODELO EN SÍ MISMO PARA TRABAJAR REGULARIDADES Y PATRONES

Se sugieren los siguientes propósitos para la enseñanza del tema patrones en la educación primaria:

- **En el primer ciclo**: Iniciar a los niños en el reconocimiento, la descripción, el completamiento de patrones no numéricos y numéricos y la explicitación de la ley que rige la secuencia de un patrón, mediante el uso de lenguaje coloquial, gráfico y simbólico.
- **En el segundo ciclo**: Trabajar con patrones complejizando la ley que rige la secuencia y generalizándola a través de procesos inductivos y deductivos, utilizando lenguajes variados.

Vale señalar que el tratamiento de este tema se articula con otros contenidos (numéricos, algebraicos, geométricos, métricos y estadísticos) y propicia procesos de pensamiento y comunicación fundamentales para la construcción de otros conceptos matemáticos más complejos que competen al nivel secundario. El potencial de este tema trasciende la matemática y puede enriquecerse aún más con el estudio de patrones desde otras disciplinas (como la biología, el arte, etc.).

La secuencia que aquí se propone se basa en el uso del collar e incluye actividades que abarcan desde describir, dibujar y simbolizar collares hasta generalizar reglas, razonar y argumentar acerca de los patrones que encierran. Esto no supone descartar el uso de otros recursos y contextos que enriquezcan el trabajo con patrones. Esperamos que la misma contribuya a facilitar trayectorias de ida y vuelta de lo concreto a lo abstracto, de lo visible a lo invisible, de lo singular a lo universal, y del mundo cotidiano al de la matemática, que enriquezcan las conversaciones, construcciones y producciones de docentes y estudiantes en las aulas de nuestras escuelas.

En las actividades siguientes sólo se señala el objetivo más relevante alrededor del cual se organiza la actividad, pues al ser actividades contextuales muy ricas en general se consideran varios contenidos.

PARA NIVEL INICIAL Y PRIMER CICLO

Actividad 1. A jugar con los collares

Objetivo: Reconocer regularidades en una sucesión.

Se invita a los estudiantes a que traigan collares de sus casas. A medida que los collares van apareciendo se plantean preguntas que inviten a descubrir y a analizar su estructura: ¿Cómo es este collar? ¿De qué está hecho? ¿Cómo están puestas sus bolitas? ¿Cuántas bolitas de cada color (forma o tamaño) tiene? ¿Cómo empieza y cómo termina? ¿Se podría hacer uno igual? ¿Cuántas bolitas de cada color se necesitarían? ¿Cómo hay que colocar las bolitas para hacer un collar igual a este?, etc.

Comentarios: En general, los chicos comienzan por describir los collares teniendo en cuenta atributos físicos (colores, formas, materiales, etc.). En algunos casos, indican también cantidades (por ejemplo, tres rojas y tres verdes, una grande y dos chiquitas, etc.). Es importante guiar estos intercambios dando lugar a preguntas que lleven a la observación y descripción de regularidades. También resulta sustancial distinguir aquellos collares que no presentan ningún patrón.

Actividad 2: Armar un catálogo

Objetivo: Reproducir patrones.

Ante la imposibilidad práctica de dejar los collares en el aula para que mamá siga usándolos, para que no se rompan o para que no se pierdan; el docente sugiere que cada uno copie su collar en una hoja de papel. Estas reproducciones permiten armar un registro de los distintos collares en un catálogo que se completará con diseños inventados por los chicos o extraídos de libros y revistas.

Comentarios: El docente lleva a la clase diferentes catálogos para discutir su uso, y los estudiantes pueden ver que, muchas veces, además de la foto aparece una descripción del objeto. Al terminar el dibujo, deberán enunciar, en forma oral o escrita, las características del collar dibujado. Estos catálogos darán lugar a actividades tales como asignar precio a los distintos tipos de bolitas y collares, jugar a comprar y vender collares, y confeccionar collares según el diseño elegido previo cálculo de la cantidad de bolitas y del dinero necesario para realizarlos.

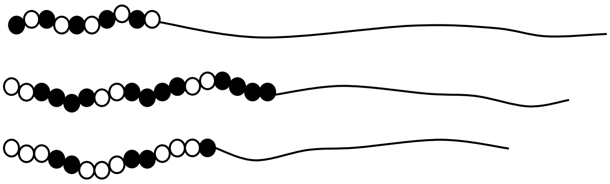
Esta actividad, utilizada en un aula, mostró que algunos inventaron collares y los dibujaron abiertos o cerrados y respetando o no un patrón determinado, otros copiaron un collar de la caja llevada al aula:

Actividad 3. Completar collares

<u>Objetivo</u>: Discriminar el patrón que rige cada collar.

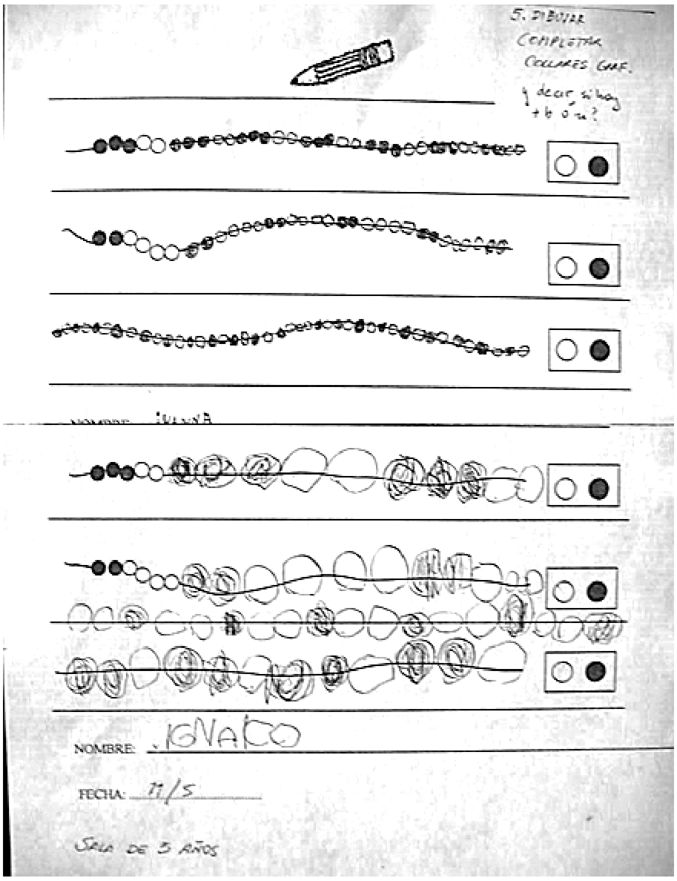
La docente propone la siguiente actividad para que los estudiantes realicen individualmente.
Se exponen luego algunas producciones de los estudiantes para que expliquen su trabajo.

Se olvidaron de dibujar algunas perlas de estos collares, ¿te animás a completarlos?



<u>Comentarios</u>: Los estudiantes deberán reconocer cuál es el núcleo del patrón en cada caso y decidir el número de bolitas a dibujar para que dicho patrón no se corte, o discutir su continuidad. En cuanto al tercer collar, la tarea se complica debido a que en la porción dibujada el núcleo del patrón se repite dos veces completo y una incompleto.

Esta actividad fue realizada por estudiantes de nivel inicial así:



Una vez que los estudiantes han comprendido cómo se forman los patrones de repetición es posible iniciarlos en los patrones de recursión:

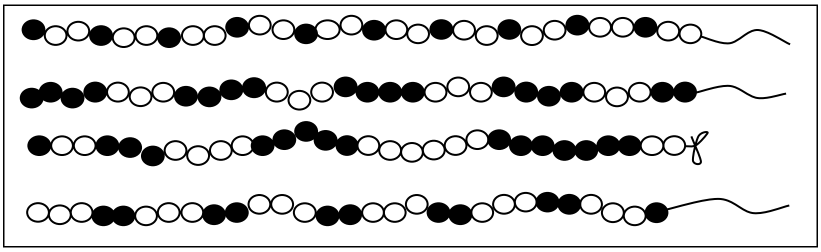
Puede ser conveniente trabajar con los chicos en la confección de collares con diferentes colores, formas y número de bolitas con patrones sugeridos por los chicos o dados por el docente, con núcleos dados verbalmente ("uno y uno", "dos y tres", " con uno más que el anterior", etc.) o con códigos gráficos, antes de pasar a la representación pictórica y al tratamiento aritmético de los mismos.

Tanto esta actividad como la anterior pueden desarrollarse con apoyo de algún recurso TIC, alguna aplicación o programa[3] que permita a los niños dibujar collares usando distintas formas, colores, etc..

Actividad 4. Comparar collares

Objetivo: Observar las múltiples combinaciones que pueden lograrse, dado un número fijo de bolitas, al cambiar la cantidad de cada color o su disposición en el collar.

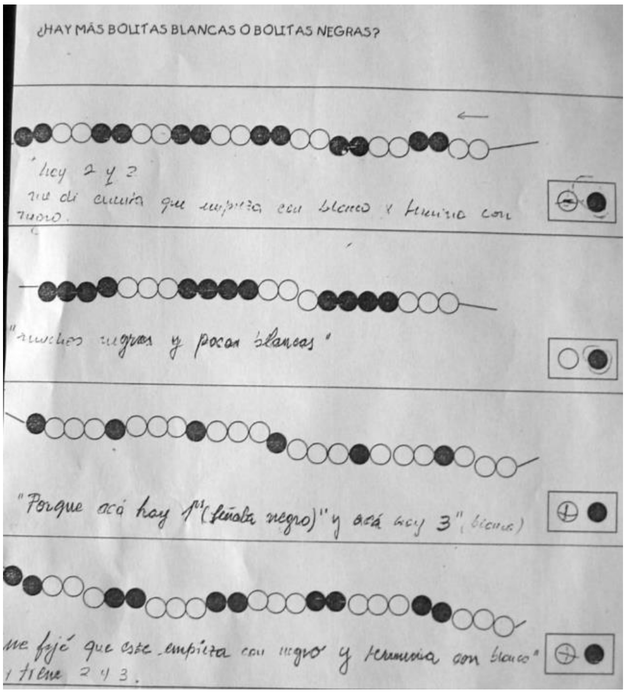
a) La docente distribuye a cada grupo distintos collares, con la misma cantidad de bolitas (por ejemplo 30), pero con diferentes patrones. Los estudiantes estudian las características de sus collares y el docente pregunta:
- ¿Cuántas bolitas tiene tu collar? ¿Tiene el de tu compañero la misma cantidad? ¿Quién posee un collar igual a este? ¿Cómo se dan cuenta de que es igual? Busquemos uno distinto, ¿en qué difiere?
- ¿Quién tiene un collar con tantas bolitas negras como blancas? ¿Dónde hay un collar en el que por cada bolita negra haya dos blancas?
b) Una vez que los estudiantes han explicado las diferencias se puede preguntar:
- En este collar ¿de qué color hay mayor cantidad de bolitas? ¿Cómo se dan cuenta?
-¿Cuál sería una regla para saber cuándo hay más o menos bolitas de un color? Aquí el docente presenta collares que generen discusiones variadas acerca de la cantidad de bolitas que posee el patrón o sobre collares que terminan de distinta manera, completando o no dicho patrón:



Comentarios: Los estudiantes deberán distinguir el patrón que se repite o crece (cambia, en el caso de patrones recursivos en forma sistemática) solicitándose además que expresen en qué orden están colocadas las cuentas. Frente a dos collares de estructuras NNBBBNNBBB y BBBNNBBBNN, los chicos deberán concluir que aunque la relación (razón) bolitas negras/ bolitas blancas es la misma (2/3), los collares son diferentes porque el orden de las mismas está invertido. La comparación de collares permite también trabajar la idea de simetría. Si bien conviene que analicen primero collares reales que poseen un patrón simétrico o no, el estudio de collares completos con cuentas bicolores permite avanzar en esta distinción. Los ilustrados arriba por ejemplo, no son simétricos en sí mismos mientras que si consideramos estos dos collares siguientes NNBBBBBBNN y BBBNNNNBBB podemos notar que cada uno de ellos muestra un patrón simétrico. Más aún, el comparar collares permite también considerar reglas para 'invertir' collares, por ejemplo, modos de cambiar bolitas de un color por bolitas de otro.

Estudiantes de nivel inicial realizaron la actividad 4b) usando estas estrategias:

[3] Por ejemplo: Tux Paint, Paint, Paint 3D, Pinta, Baby Paint, Paint.NET, Gimp, Ibis Paint



"Hay dos y dos.
Me di cuenta que empieza con blanco y termina con negro"

"Hay muchas negras y pocas blancas"

"Porque acá hay una (señala la negra) y acá hay tres (señala las blancas)"

"Me fijé que este empieza con negro y termina con blanco. Tiene dos y tres"

Actividad 5. ¡Mirar con atención!

Objetivo: Discriminar patrones y representarlos mentalmente.

a) El docente muestra el dibujo de un collar bicolor por un par de segundos y luego lo oculta. Los chicos deben describir la estructura del collar: ¿Cuántas cuentas piensan que podrá tener este collar? ¿Posee más rojas o más blancas? ¿Cómo se dieron cuenta? ¿Cuántas bolitas de cada color tiene este collar? ¿Cómo hicieron para calcular tan rápido?

b) El docente oculta parte del collar en una caja o lo tapa y pregunta ¿Cómo sigue este collar? ¿Cómo se dieron cuenta?
Si tiene 30 bolitas (20, 50, 100,…) ¿Cuántas bolitas están escondidas? ¿Cuántas bolitas rojas están escondidas? ¿Cuántas bolitas blancas? ¿Cómo lo saben?

Comentarios: En estas actividades interviene la memoria visual y la observación de los aspectos relevantes de la estructura de cada collar. Los estudiantes deberán distinguir la naturaleza de patrones de repetición (o de recursión para los más grandes) y del núcleo que los componen, y generalizar su uso a partir de una parte visible del collar. Además, y en base a las propiedades de regularidad, podrán conjeturar que la cantidad de bolitas que puede tener el collar y cuántas de cada color. En el ejemplo anterior (asumiendo que lo que no se ve del collar está bien confeccionado y que el patrón queda completo) el total de bolitas será un múltiplo de 5, siendo las cantidades posibles de bolitas rojas: 3, 6, 9,... (múltiplos de 3) y de bolitas blancas: 2, 4, 6, (múltiplos de 2) en cada caso. Como se podrá apreciar, esta actividad es interesante para trabajar con divisores y múltiplos, y anticipar un tratamiento más formal del tema razones y proporciones. A medida que se discute la veracidad de las conjeturas presentadas y su forma de justificación, se evolucionará hacia un tratamiento numérico más avanzado.

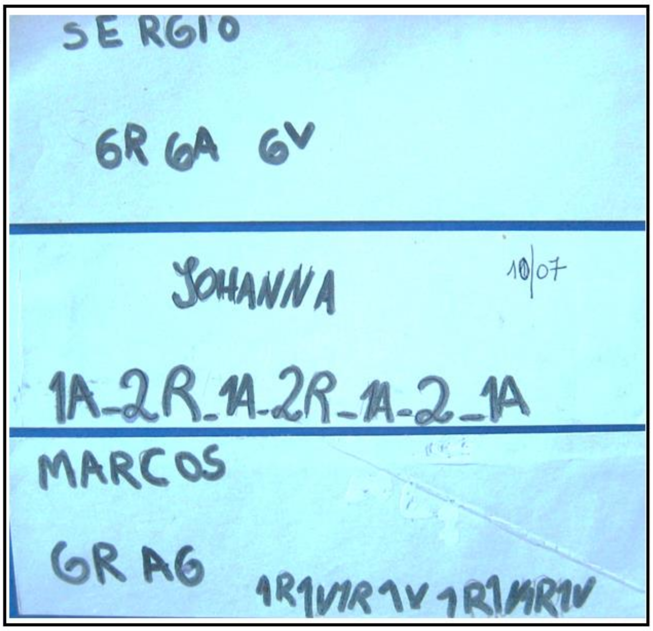
Actividad 6. Construir y descifrar mensajes

Objetivo: Codificar y decodificar patrones a nivel simbólico.

Se reparten a parejas de estudiantes tarjetas con collares dibujados, y se les solicita que redacten un mensaje con el **mínimo** de datos necesarios para que otro grupo pueda dibujar un collar semejante al propio. Una vez finalizada la tarea, se exponen los dibujos producidos, las tarjetas originales y los mensajes elaborados por los estudiantes. Esto da lugar a analizar las coincidencias y diferencias, dando cuenta de la causa de estas últimas.
Se propone después que los estudiantes clasifiquen los mensajes de acuerdo con el lenguaje utilizado (coloquial, dibujo, esquema, etc.). ¿El mensaje es claro? ¿Se remite a los datos necesarios? ¿Cuál de estas representaciones es más clara, sencilla y práctica?

<u>*Comentarios*</u>*: Se trata de lograr que, al finalizar el primer ciclo, los estudiantes hayan adquirido la habilidad de descifrar un patrón dado así como también de codificarlo mediante el uso de letras u otros signos. Esto les posibilitará anticipar cualquier elemento del patrón sin necesidad de construirlo. Por ejemplo, en un patrón con el núcleo de la forma AAB, el décimo elemento puede ser "adivinado" sin completar el patrón, basta escribir AABAABAAB<u>**A**</u> y el alumno estará en condiciones de responder con propiedad a la pregunta, indicando que resulta igual al primer término del núcleo dado.*
En la puesta en común de esta actividad, docente y estudiantes analizan los mensajes, tanto en el lenguaje utilizado (coloquial, gráfico o simbólico) como en la cantidad de datos.

Algunos ejemplos de codificación de collares inventados por estudiantes de 1° grado:



<u>*Ejemplos de mensajes:*</u>
<u>Con datos insuficientes:</u> "*uno y uno*", "*rojo y negro*", "*tenés que poner 15 perlitas negra-roja*" (en el caso de un collar de núcleo 3 negras 2 rojas)
<u>Con datos suficientes</u>: "*tiene 30 bolitas, 5 verdes 5 rojas*", "*tiene 24 bolitas, RRBB*", "*5v5r5v5r5v5r*" (para un collar de 30 bolitas). Escribe "*son 10 bolitas*" y dibuja 5 blancas y 5 negras.
<u>Con más datos de los necesarios</u>: "*tiene 15 bolitas 3r 2v 3r 2v 3r 2v.*"

PARA SEGUNDO CICLO

Si los estudiantes no han tenido experiencias previas con actividades del tipo de las descriptas hasta ahora, la secuencia didáctica deberá comenzarse con las actividades para el Primer Ciclo (adaptándolas si fuera necesario) antes de acceder a las que se proponen a continuación.

Actividad 1. Con collares imaginarios

Objetivo: Interpretar códigos de patrones.

Me han dado los siguientes códigos para armar collares:

a) NBNBNB...
b) NNBBNNBBNNBB...
c) NNBBBNNBBBNNBBB...

Y me preguntaron: ¿Cuántas bolitas pueden tener estos collares para quedar completos?
¿Cuántas bolitas de cada color son necesarias en cada caso? Si el collar tuviera 1.000 (50, 100, 300) bolitas, ¿de qué color sería la última bolita?[4]

Comentarios: Puede ocurrir que algunos niños:
- No interpreten el código.
- Piensen que el número de letras escritas corresponde al total de bolitas del collar.
- Formulen generalizaciones parcialmente verdaderas, por ejemplo, que si empieza con un color, el collar termina con el otro, sin tener en cuenta la distribución de las bolitas de cada color en el núcleo. Por ejemplo, si el núcleo fuera NBBN esa afirmación es incorrecta.
- Si el total de bolitas es par, termina con el color contrario. Por ejemplo, en el segundo caso, 12 es un número par de bolitas pero el patrón no está completo.
- Usen collares de 10 o de 100 para juzgar qué pasará con un collar de 1.000 bolitas. Es un error razonable extender las conclusiones de los collares tanto de 10 como de 100 porque son divisores de 1.000. El problema reside en cómo se 'fragmenta' mentalmente el collar para identificar su núcleo. Por ejemplo, en el caso de BNBNBNBNBN..., fragmentar el collar en porciones de 10 bolitas cada una lleva a concluir correctamente que la bolita número 1.000 es negra. Por el contrario, en el caso de BBNNBBNNBB..., esta fragmentación conduce a una respuesta equivocada. El tratamiento de este error resulta altamente productivo para generar debates en el aula en relación a los modos alternativos de fragmentar un collar dado (y la relación de estos fragmentos con múltiplos de la cantidad de bolitas del núcleo y divisores del número total de bolitas) a fin de anticipar el color de una bolita sin tener que completarlo.

Los estudiantes han de concluir que en los casos presentados, hace falta saber:

1) *El núcleo del patrón.*
2) *El total de bolitas del collar.*
3) *Con qué color empieza. (acordamos que BBNN* ***no*** *equivale a NNBB, como patrón).*

En cuanto a las respuestas a las preguntas anteriores:

- *el collar NBNBNB....tendrá un número par de bolitas y con la misma cantidad de bolitas de cada color. Las bolitas 50, 100, 300 y 1.000 serán blancas porque son todos números pares y las bolitas pares son blancas y las impares, negras.*
- *el collar NNBBNNBB..... tendrá un número de bolitas múltiplo de 4 y con la misma cantidad de bolitas blancas y negras. Todas las bolitas que son múltiplos de 4 serán blancas, por eso la bolita 50 será N porque la 48 es B, mientras que las bolitas 100, 300 y 1.000 serán todas B.*
- *el collar NNBBBNNBBB... tendrá un número de bolitas igual a un múltiplo de 5 y la cantidad de blancas será múltiplo de 3 y de negras múltiplo de 2. Y todas las bolitas serán blancas porque 50, 100, 300 y 1.000 son múltiplos de 5.*

[4] van den Heuvel-Panhuizen y Fosnot 2001.

Actividad 2. ¿Es par o impar?

Objetivo: Extraer y generalizar relaciones numéricas.

El docente presenta a los estudiantes collares con un número limitado de bolitas y de distintas estructuras (en términos de cantidad de bolitas por color, distribución, abiertos o cerrados, totalmente visibles o semiocultos) y pregunta: ¿Este collar posee un número par o impar de bolitas? Discutir los distintos modos de justificar las respuestas.

Comentarios: Esta actividad da lugar a justificaciones basadas en la percepción tales como: "es impar porque empieza y termina con negra"; "es impar porque al hacer parejas, una bolita negra queda suelta, sin emparejarse". El docente guiará la evolución del pensamiento numérico de los estudiantes proponiendo situaciones donde entre en juego la extensión del collar y la naturaleza del patrón. Este trabajo lleva a discutir las propiedades de la suma de números pares (P) e impares (I) (P + P = P, P + I = I + P = I, I + I = P). Por ejemplo: "es impar si el número de bolitas negras es par y el de blancas es impar (o viceversa)", "es impar si el núcleo es impar y se repite un número impar de veces".

Actividad 3. Collares y proporcionalidad

Objetivo: Descubrir relaciones (razones) numéricas entre dos conjuntos de bolitas.

El docente muestra un collar cerrado bicolor muy largo (o un dibujo del mismo en perspectiva de modo tal que no se puedan contar todas las bolitas como el de la derecha) con la estructura BBBNNNNNBBBNNNNNBBBNNNNN... y pregunta:

¿Cuántas bolitas de cada color hay en este collar?
¿Este collar podría tener 50 bolitas negras? ¿Por qué?
¿Este collar podría tener 50 bolitas blancas? ¿Por qué?
¿Podría hacerse un collar de 100 bolitas con esta estructura? ¿Por qué?
Si el collar tiene 75 bolitas blancas, ¿cuántas negras llevará para mantener el patrón?

Comentarios: Las preguntas formuladas por el docente se pueden responder a varios niveles de matematización.[5] Por ejemplo, los estudiantes podrán:

a) construir una tabla para buscar los múltiplos sucesivos y comprobar en qué caso son posibles respuestas positivas:

Blancas	3	6	9	12
Negras	5	10	15	...
TOTAL	8	16	24	...

b) acortar la tabla, cuando el collar es lo suficientemente largo, usando multiplicaciones que los llevarían más rápidamente al resultado (multiplicando por 10, por 100, por 20, etc.). Por ejemplo:

30	*60*	*300*	*600*	*...*
50	*100*	*500*	*1000*	*...*

c) calcular mentalmente el múltiplo de la cantidad de bolitas del núcleo del patrón (8) y viendo si la cantidad total de bolitas coincide con él o con un múltiplo de él. De la misma forma, analizar si 50 es múltiplo de 3 (B) y de 5(N), para llegar a la conclusión de que no es posible que el collar posea 50 bolitas blancas, pero sí es posible que tenga 50 bolitas negras y que, en ese caso, el collar tendría exactamente 80 bolitas.

[5] El uso de collares para encarar el tema de razones y proporciones y trabajar con la tabla de razones como herramienta numérica fue sugerido por Freudenthal (1985).

Esta actividad ofrece la oportunidad de pasar de la suma reiterada a la multiplicación; relacionar esta última con la división; trabajar nociones de múltiplos y divisores y razones y proporciones.
En los siguientes cuadros se presentan ejemplos de estrategias utilizadas por estudiantes de 4º año del nivel primario al resolver esta actividad para un collar de 100 o 1.000 bolitas:

(4B3N) "La última bolita va a ser blanca, pero el grupo de blancas quedaría cortado. Porque de 7 en 7 se llega a 28, más 7x10, me da 98 y me faltan 2, que pongo de un grupo de blancas" (Lu)

5!
NNNBBNNNBB
La última bolita será blanca. 10 x 5 = 50
20 x 5 = 100 (Ma)

Hay 10 bolitas dibujadas: 6N y 4 B, y termina en B.
Entonces, si dibujara 600N y 400B terminaría en B.
Como 600+400=1000, la respuesta es que terminaría en B. (Ju)

Actividad 4. Diseñar collares mentalmente

Objetivo: Representar patrones mentalmente en base a relaciones numéricas dadas.

El docente propone que los estudiantes imaginen las estructuras de distintos collares a partir de ciertas restricciones. Por ejemplo:

a) Diseñar un collar de 1.000 bolitas (dos colores) tal que la última bolita sea blanca.
b) Diseñar un collar bicolor de modo tal que la razón bolitas negras / bolitas blancas sea 2/3.
c) Diseñar un collar tricolor de modo que la relación blancas / negras / rayadas sea 3/2/1.
d) Diseñar un collar bicolor de modo tal que el 75% de las bolitas sean blancas y el 25% sean negras.

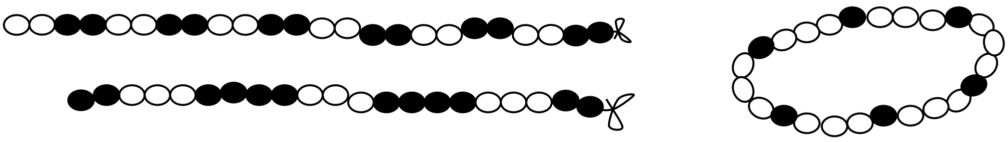
Comentarios:
*Con respecto a la situación **a)** se pueden diseñar variados collares de 1.000 bolitas de modo que la última sea blanca. Simplemente es necesario tener en cuenta que el patrón sea un divisor de 1.000 y que termine en B, por ejemplo: NNBBNNBB....., NNBBBNNBBB...., NNNNNBBBBBNNNNNBBBBB.....etc.*
En el caso en que se deba satisfacer una relación entre las cantidades de bolitas de cada color, por ejemplo la razón 2/3, es probable que al principio los chicos se atengan a lo que les sugiere la escritura. Es decir, la mayoría se inclinará por afirmar que sólo se puede diseñar un collar con la estructura: NNBBBNNBBB..., pensando en el núcleo 2N-3B, en lugar de la razón entre el conjunto de bolitas negras y blancas. En el contexto de la interacción orientada por el docente, los estudiantes podrán descubrir otros núcleos que mantengan esa razón como, por ejemplo: 6N9B o 8N12B.
*Para **c)** el collar será de tres colores con un total de bolitas múltiplo de 6 y la cantidad de blancas será un múltiplo de 3, la de negras un número par y las tres clases de bolitas mantendrán la relación establecida: 3/2/1, 6/4/2, 9/6/3, 12/8/4 y así sucesivamente.*
*Y para el collar **d)**, pedir que el 75% de las bolitas sean blancas equivale a decir que de 4 bolitas, 3 deben ser blancas; y que el 25% sean negras, 1 de cada 4. Entonces, en este collar la relación blancas a negras será 3:1 o bien, 1:3 negras con respecto a las blancas.*
También en una tabla pueden representarse las cantidades de bolitas que podría tener este collar:

Blancas	3	30	60	90	300
Negras	1	10	20	30	100
Total	4	40	80	120	400

OTRAS ACTIVIDADES

PARA PRIMER CICLO

1) Observa los collares que te presentamos:

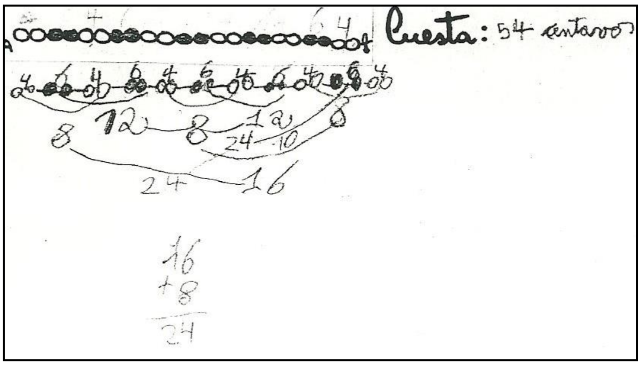


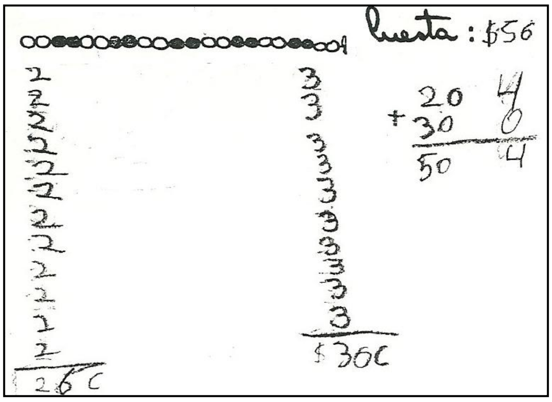
a) Si cada bolita negra cuesta $3 y cada blanca, $2, ¿cuál será el costo de cada uno de estos collares?

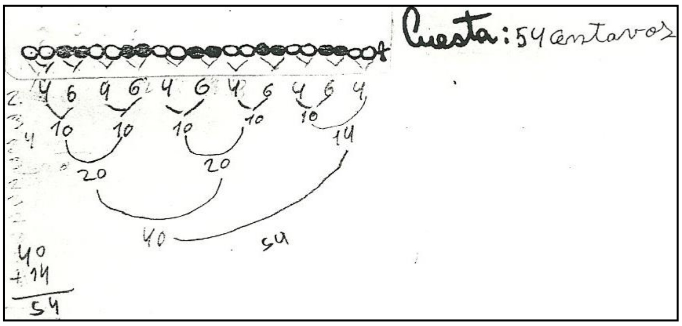
b) ¿Cómo será un collar de bolitas blancas y negras para que su costo sea de $20? ¿Hay una sola posibilidad? Ejemplifica. ¿En qué caso será más largo?

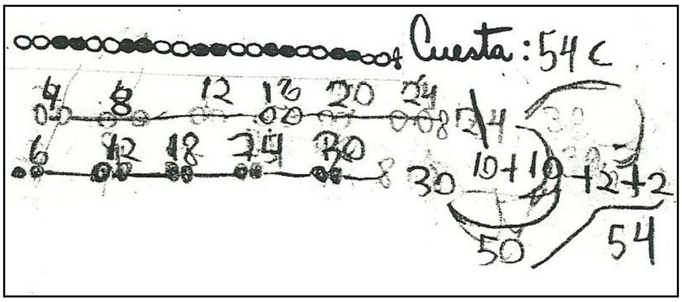
Comentarios:

a) *Esta situación, con valores de 3 centavos para las bolitas blancas y de 2 centavos para las negras, fue resuelta por estudiantes de 3º grado con diferentes estrategias. Aquí, algunas de ellas para el primer collar:*









b) *Esta situación fue propuesta con costos relacionados a la anterior (3 centavos y 2 centavos por tipo de bolita) y por ello el collar total suma 20 centavos. Una tabla resulta ser una manera práctica y organizada de resolver actividades como esta:*

Costo fijo del collar	Precio de las bolitas B (2 c c/u)	Precio de las bolitas N (3 c/u)	Cantidad de bolitas B	Cantidad de bolitas N	Total de bolitas del collar
20 c	2	18	1	6	7
20 c	4	16	2	No	No
20 c	6	14	3	No	No
20 c	8	12	4	4	8
20 c	10	10	5	No	No
20 c	12	8	6	No	No
20 c	14	6	7	2	9

20 c	16	4	8	No	No
20 c	18	2	9	No	No

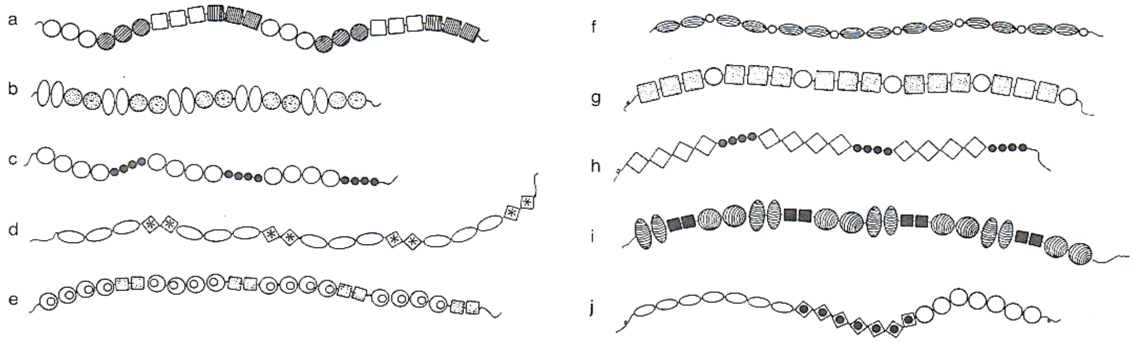
Cada fila se va completando según se arme un collar con 1, 2, 3, 4, etc., bolitas blancas y el costo de las negras para completar 20c. No siempre es posible hacer un collar porque, por ejemplo, cuando se emplean 2 bolitas blancas (4c), con los 16c restantes se pueden comprar 5 bolitas negras y en este caso el collar costaría 19c. Lo mismo ocurre con 3, 5, 6, 8 y 9 bolitas blancas.
De la tabla surge además que es posible confeccionar varios collares de 20 c, que el más largo tendrá 9 bolitas en total (7 blancas y 2 negras) y que con estas 9 bolitas se pueden hacer varios collares con diferentes núcleos (cada uno de ellos, simétrico): BBBNBNBBB, BBNBBBNBB, BNBBBBBNB y NBBBBBBBN.

2) Imagina que los collares que te dimos en la actividad anterior continúan y continúan, ¿es posible decir en cada uno si tendrán más bolitas negras que blancas? Explica tu razonamiento. ¿La bolita número 30 será blanca o negra?, ¿y la número 50? ¿Y la 100?

Comentarios:
Esta también es una situación que admite diferentes estrategias de resolución.
En cuanto a la cantidad de bolitas blancas y negras, una forma elemental sería contar de a 1, 2 o más las bolitas de uno y otro color, o a simple vista como es el caso del collar 3. Sin embargo se espera que del análisis del patrón de cada uno surja la respuesta:
- el primer collar tiene igual cantidad de bolitas de cada color porque su núcleo es BBNN y empieza en B y termina en N. Es decir que a igual cantidad de bolitas, es necesario ver en qué color termina.
- el segundo collar tiene más cantidad de bolitas negras porque su núcleo es NNBBBNN, 3 B cada 4 N.
- en el tercer collar hay más bolitas blancas, cada 3 B hay 1 N.
Y en relación a la siguiente pregunta, es posible que los estudiantes dibujen todo el collar y luego cuenten las bolitas para determinar el color de la bolita 30 o 50, cosa que se complicaría para el collar de 100 bolitas. Sin embargo, usando una estrategia de mayor nivel sería usar el núcleo de cada collar. Por ejemplo:
- el collar BBNN tiene un núcleo de 4 bolitas, por eso todos las bolitas múltiplos de 4 serán negras porque caigo en el color que completa un núcleo. Siguiendo la escala del 4, se puede decir que la bolitas 28 es negra, entonces la 30 es blanca. También, y usando la multiplicación, pensar que 7x4 es 28, negra, y dos más, blanca. El mismo razonamiento para las bolitas 50 (B) y 100 (N).
- en el collar NNBBBNN el núcleo tiene 7 bolitas, entonces es posible usar la escala del 7 o la tabla del 7 para determinar el color de las bolitas. En este caso todas son negras.
- el tercer collar es necesario rectificarlo para determinar su núcleo: NBBB o BBBN. Una vez acordado, se puede proceder como en los collares anteriores teniendo en cuenta que si bien en ambos casos el núcleo tiene 4 bolitas, la última bolita es B o N respectivamente. Por lo tanto en NBBB, las bolitas 30, 50 y 100 serán blancas; y en BBBN, las bolitas 30 y 50 serán blancas pero la 100 será negra.

PARA SEGUNDO CICLO

1) a) Estos collares con este patrón completo, ¿podrán tener 100 bolitas? ¿Cómo lo sabes?



Algunas resoluciones de estudiantes de 4° grado:

a) no porque multipliqué 4 x 24 y me dio 96
b) si: porque 20 x 5 = 100
c) No: " 24 x 4 = 96
d) si: porque 20 x 5 = 100
e) No porque 24 x 4 = 96.
NO ALCANZAN

El A el C y el E no pueden porque repitiendo la escala del 12, del 8 y del 6 no se llega justo a 100.
La B y D sí llegan a 100 porque en la escala del 20. (20-40-60-80-100) puede llegar.

A un cuadrado negro 3,6,9 y 1 = 10
B un obalo blanco la escala del 2
C un circulo blanco 4,8 y 2 = 10
D un cuadrado pintado 3,2,3,2 = 10
E un sirculo pintado 4, 2, 4 = 10
F un obalo 2,1,2,1,2,2 = 10
G un cuadrado 3,1,3,3 = 10
H un cuadrado 4,4,2 = 10
I un cuadrado negro 2,2,2,2,2 = 10
J un cuadrado 7,3 = 10

b) ¿Cuál sería la bolita 100 en cada uno de estos collares?

2) Observá:

Con este patrón:

- ***a)*** ¿Podría haber un collar con 30 bolitas blancas y 40 negras?
- ***b)*** ¿Y con 300 blancas? ¿Cuántas negras llevaría?
- ***c)*** ¿Qué opinás de hacer uno con 60 negras y 60 blancas?
- ***d)*** ¿Y uno con 27 blancas y 32 negras?

En cada caso, explicá por qué puede ser o por qué no.

3) Sabemos que hay collares con los siguientes patrones:

- ***a)*** NBNBNBNBNB...
- ***b)*** NNBBNNBBNNB...
- ***c)*** NBBBNNBBBNNBBBNNB...
- ***d)*** NNNBBNNNNNNBBNNNNNNBB...
- ***e)*** NBBNNNBBBBNNNNNBBBBBB...

3.1) Si cada uno de estos collares siguiera hasta 1.000, ¿de qué color sería la última cuenta?

3.2) Diseñá un collar blanco y negro, diferente a los dados, de modo que la bolita número 1.000 sea blanca.

<u>Comentarios:</u>
El patrón de este collar es BBBNNNNBBBNNNN.... por lo tanto la cantidad de bolitas blancas será un múltiplo de 3 y la de negras un múltiplo de 4, entonces:

- ***a)*** *se podría hacer uno con 30 blancas y 40 negras.*
- ***b)*** *también podría tener 300 bolitas blancas. En ese caso, llevaría 400 negras.*
- ***c)*** *si bien 60 es tanto múltiplo de 3 como de 4, el collar no puede tener 60 bolitas de cada color. Si tuviera 60 blancas debería tener 80 negras, o bien, con 60 negras llevaría 45 blancas.*
- ***d)*** *solamente es posible armar un collar con 27 blancas y 32 negras con el patrón incompleto, es decir, empieza con 3 blancas y termina de la misma forma.*

En la siguiente tabla se ven claramente los resultados posibles:

Blancas	*3*	*30*	*300*	*60*	*45*
Negras	*4*	*40*	*400*	*80*	*60*

En relación con la otra actividad planteada, la bolita 1.000 en cada collar será:

- ***a)*** *blanca porque 1.000 es múltiplo de 2.*
- ***b)*** *blanca porque 1.000 es múltiplo de 4.*
- ***c)*** *negra porque 1.000 es múltiplo de 5 .*
- ***d)*** *negra porque 1.000 es múltiplo de 8.*
- ***e)*** *el patrón de este collar es recursivo. Los lugares pares están ocupados por bolitas blancas y los impares por negras.*

  Este collar representa una progresión aritmética de razón 1, cuya suma se calcula así:

  Sn = 1/2 n (1 + n), donde 1 es el primer término de la sucesión y n corresponde al último término.

  Dado que son 1000 bolitas: 1000 = 1/2 n (1 + n)
  1000 = 1/2 n + 1/2 n^2

Entonces 1/2 n^2 + 1/2 n -1.000 = 0 de cuya resolución surge n= 44,22. Por lo tanto n=44 está ocupado por blancas, entonces 44,22 corresponde a negra.

Otra forma de calcular el color de la bolita 1.000 es considerar la cantidad de bolitas sumando los 1.000 primeros números naturales de la siguiente forma:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45
10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 145
20 + 21 + ...+ 29 = 245
30 + 31 +..+ 39 = 345
40 + 41 +..+ 49 = 445

Si se suman los resultados parciales 45 + 145 + 245 + 345 = 780, 780 + 445 = 1.225 que es mayor que 1.000. Entonces se toma 780 y se van sumando los números siguientes:
780 + 40 = 820
820 + 41 = 861
861 + 42 = 903
903 + 43 = 946
946 + 44 = 990, bolita blanca. Por lo tanto, las 45 siguientes son negras y la bolita 1.000 será negra.

Por último, para diseñar un collar blanco y negro cuya bolita 1.000 sea blanca se deberá tener en cuenta el núcleo del patrón de repetición sea un divisor de 1.000 y que termine en una bolita blanca.

REFERENCIAS

- Boswinkel, Nina, *et al*. (1997). *Wis en Reken*, Utrecht, Baarn: Bekadidact.
- Bressan, Ana y Bosigic, Beatriz (1996). *Las regularidades: fuente de aprendizajes matemáticos*. Desarrollo curricular Nº 3. EGB 1 y 2. Consejo Provincial de Educación. Provincia de Río Negro.
- Cobb, Paul; Yackel, Erna y K. McClain (comps.) (2000*). Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*, Mahwah, N.J. and London: Lawrence Erlbaum.
- Freudenthal, Hans (1985). Mathematics Starting and Staying in Reality, en Wirzup and Streit (comps.), *Developments in School Mathematics Education Around the World*, Reston, VA: NCTM.
- Freudenthal, Hans (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, Koeno (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*, Utrecht: Freudenthal Institute.
- National Center for Research in Mathematical Sciences Education and the Freudenthal Institute (1998). *Mathematics in Context: A Connected Curriculum for Grades 5-8*, Chicago: Enciclopedia Britannica.
- Streefland, Leen (comp.) (1991). *Realistic Mathematics Education in Primary School*, Utrecht: Freudenthal Institute.
- Van den Heuvel-Panhuizen, Marja (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education*, Utrecht: Freudenthal Institute.
- Van den Heuvel-Panhuizen, Marja y Fosnot, Catherine (2001). *Assessment of mathematics education: Not only answers count,* Proceedings de la 25va Conferencia del PME, Holanda (12-17 de Julio): 335-342.
- Yackel, Erna y Cobb, Paul (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education* 27: 458-477.
- Zolkower, Betina y otros, *Math Lessons and Other Stories in New York City Public Schools*, manuscrito en preparación.